

Sul calcolo dell'ampiezza originaria di un'onda presente in una serie temporale causale e stazionaria di dati equispaziati attraverso lo studio di uno spettro di potenza

(A technique of power spectra analysis to evaluate original amplitude of harmonic components in stationary random time series of equispaced data)

P. RANDI - M. E. RONCHI SELVA (*)

Ricevuto il 26 Gennaio 1973

RIASSUNTO. — In un precedente lavoro (4) gli Autori hanno descritto un programma che permette il calcolo dello spettro di potenza di una serie temporale casuale e stazionaria di dati equispaziati. Nel presente lavoro viene esposta una tecnica che permette di risalire al valore dell'ampiezza originaria di un'onda presente nella serie di dati e viene offerta la possibilità al ricercatore di eseguire un'analisi automatica delle caratteristiche delle onde più significative estraendone le corrispondenti ampiezze, sotto determinate condizioni da lui stesso poste.

Il modo di utilizzo e la specifica delle condizioni sono descritte nel paragrafo « Utilizzazione del programma - INPUT-OUTPUT », esposto più sotto.

SUMMARY. — A previous work (4) described a program which allows the computation of power spectrum for stationary random time-series of equispaced data. In the present work we describe a method to evaluate the original wave amplitude of harmonic terms in these series. This technique allows automatical analysis of the most significant features of principal harmonic components in the serie, under some user conditions. In the section « Utilizzazione del programma - INPUT-OUTPUT » we describe these conditions and how the program SPECTRA is accessible and utilizable.

(*) Centro di Calcolo Interuniversitario dell'Italia Nord-Orientale. Casalecchio di Reno (Bologna) - Italia.

IL PROGRAMMA SPECTRA

Il programma SPECTRA permette al ricercatore di fare l'analisi spettrale su una serie temporale stazionaria di dati casuali ed equispaziati di qualunque lunghezza dopo aver fatto precedentemente sulla stessa queste operazioni:

a) Si esegue un esame preliminare allo scopo di ripristinare la sequenza temporale corretta qualora, o per la presenza di dati ritenuti spuri, comunque originati, o per la mancanza di dati, la serie in INPUT non risulta equispaziata.

b) Si riporta detta serie nelle condizioni di media zero.

Alla serie $X(t)$ quale risulta dalle operazioni sopra descritte viene applicata la finestra:

$$D_2(t) = \frac{1}{2} \left(1 + \cos \frac{\pi t}{T} \right) \quad \text{con } |t| < T$$

allo scopo di eliminare le deformazioni sulle frequenze dovute alla limitatezza della serie dei dati.

Viene quindi calcolata la funzione di autocorrelazione:

$$F(\tau) = \frac{1}{N - \tau} \sum_{t=1}^N D_2(t) X(t) D_2(t + \tau) X(t + \tau)$$

col ritardo τ che va da zero al massimo fissato dal ricercatore. Infine viene calcolato lo spettro di potenza tramite la:

$$\varphi(\omega) = 2 \sum_{\tau=0}^{\tau_{\max}} F(\tau) \cos \omega \tau$$

con tutte le caratteristiche e disponibilità esposte nel lavoro già citato.

I problemi su cui gli Autori hanno fissato la loro attenzione sono i seguenti: data l'altezza del picco dello spettro, corrispondente a una certa frequenza, qualè l'ampiezza effettiva dell'onda originaria che ha generato quella banda spettrale; qualè inoltre la dipendenza dell'ordinata spettrale, ossia dell'altezza dei picchi dello spettro di potenza, dal ritardo massimo τ_{\max} scelto dal ricercatore e infine come è possibile eseguire automaticamente una analisi di $\varphi(\omega)$ per ricavarne informazioni sulle ampiezze, dopo aver stabilito un opportuno criterio di significatività per i massimi relativi che si presentano nello spettro.

I RISULTATI DELL'INDAGINE

Mediante l'uso del programma SPECTRA gli Autori hanno indagato sulle variazioni di altezza dei picchi dello spettro di potenza in funzione delle caratteristiche della serie data, e cioè al variare del numero dei dati e dell'ampiezza reale delle onde originarie, la cui sovrapposizione costituisce la serie in esame.

Fissato che la funzione di autocorrelazione è stata calcolata fino al massimo ritardo compatibile con la lunghezza della serie, i risultati dell'indagine sono mostrati in fig. 1.

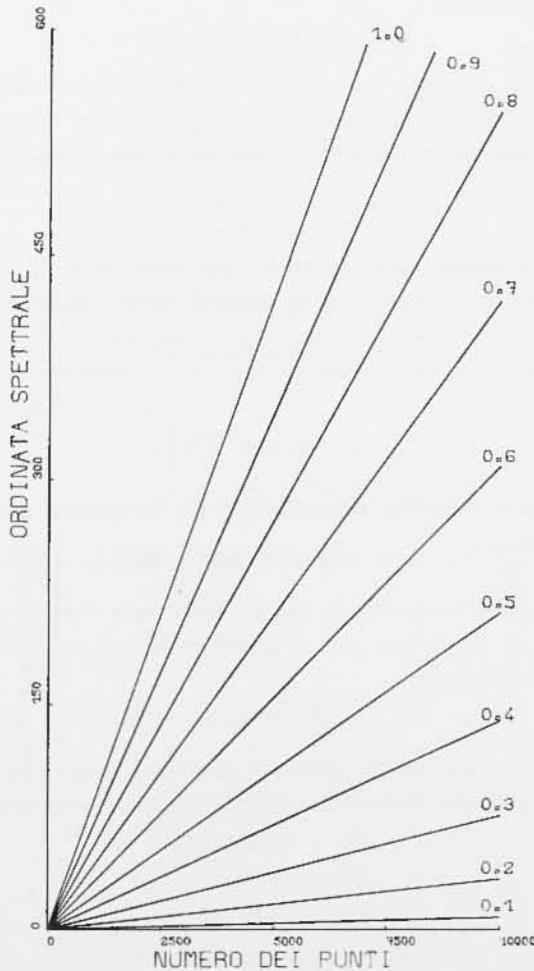


Fig. 1

Come si può vedere, esiste una dipendenza lineare fra l'altezza dei picchi $\varphi(\omega_i)$ corrispondenti a una certa frequenza e la lunghezza della serie, ad ampiezza originaria costante, del tipo:

$$\varphi(\omega_i) = a_1 N$$

essendo N il numero degli individui componenti la serie ed a_1 un opportuno coefficiente.

Tutte queste rette, passanti per l'origine, hanno il coefficiente angolare a_1 che è funzione dell'ampiezza dell'onda originaria, della estensione temporale della serie data nonchè del ritardo massimo (τ_{\max}), scelto dal ricercatore a seconda del problema trattato; per cui si può affermare che:

$$a_1 = f(A_1, \tau_{\max}, N).$$

Ora poichè ciò che interessa è ricavare l'ampiezza, una volta determinate le altezze dei picchi dello spettro per le varie frequenze presenti, conoscendo il numero di individui componenti la serie data e noti come

$$a_1 = \varphi(\omega_i) / N$$

i coefficienti angolari delle rette di appartenenza di ciascuna delle ordinate spettrali, si è cercato di esplicitare la funzione

$$a_1 = f(A_1, \tau_{\max}, N)$$

come

$$A_1 = f_1\left(a_1, \frac{\tau_{\max}}{N}\right).$$

Quando τ_{\max} è il massimo consentito dalla lunghezza della serie data, cioè quando $\frac{\tau_{\max}}{N} \sim 1$, la migliore interpolazione dei valori ottenuti per f_1 è una parabola passante per l'origine con asse parallelo all'asse delle ascisse, il cui ramo per y positive (che è quanto interessa) è descritto dall'equazione

$$A_1 = \sqrt{K_1 + K_2 a_1} - K_3$$

dove a_1 sono i suddetti coefficienti angolari, ricavabili come sopra esposto, e le costanti numeriche valgono rispettivamente

$$K_1 = 0.0002020$$

$$K_2 = 12.06$$

$$K_3 = 0.01421$$

In figura 2 si mostra l'andamento della funzione sopra scritta quando, come detto, τ_{\max} è il massimo consentito dalla serie dei dati.

Una ulteriore indagine è stata fatta per individuare il legame tra le ordinate spettrali e i ritardi massimi, τ_{\max} , fissati per il calcolo.

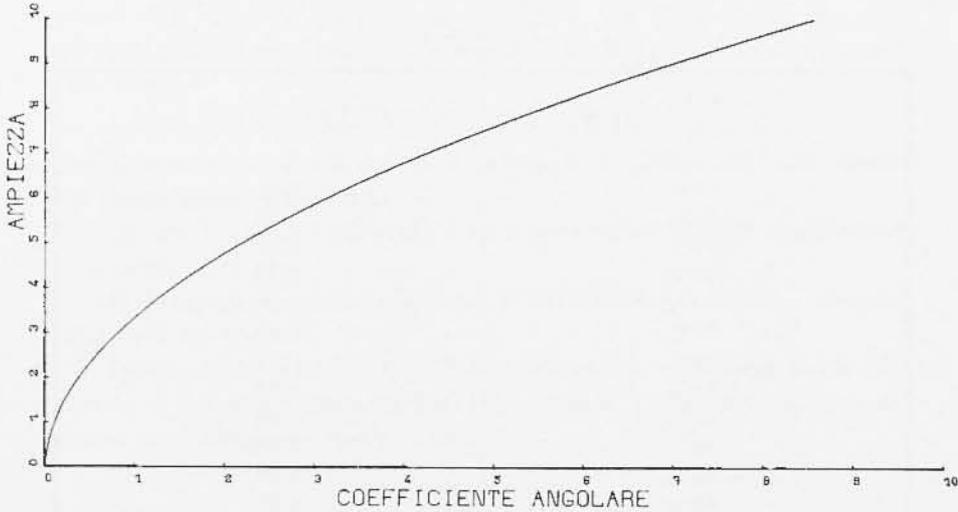


Fig. 2

Si è trovato che, indipendentemente dall'ampiezza dell'onda che ha generato quella banda spettrale, il variare del rapporto τ_{\max}/N genera una variazione concorde $1/\gamma$ dell'ordinata spettrale con un legame del tipo mostrato in fig. 3.

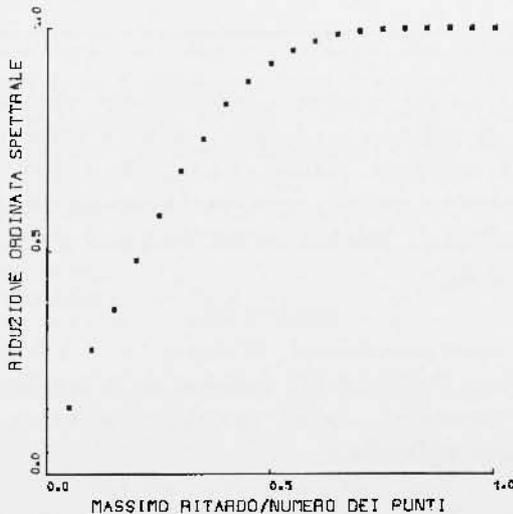


Fig 3

In Tabella 1 sono espresse percentualmente queste variazioni in funzione di τ_{\max}/N .

TABELLA 1

τ/N	$1/\gamma$
5%	0.15
10%	0.28
15%	0.37
20%	0.48
25%	0.58
30%	0.68
35%	0.75
40%	0.83
45%	0.88
50%	0.92
55%	0.95
60%	0.97
65%	0.985
70%	0.993
75%	0.997
80%	0.999
85%	0.9998
90%	1.0000
95%	1.0000
100%	1.0000

Infine si è voluta rendere completamente automatica l'analisi di uno spettro di potenza. La tecnica seguita è stata quella che tradizionalmente è applicata quando si ha a che vedere con una serie di dati indipendenti e casuali: sono considerati significativi tutti quei picchi dello spettro di potenza corrispondenti a $\varphi(\omega_1)$ il cui valore risulta maggiore di

$$\varphi(\omega_1) + 2\sigma.$$

In conclusione il ricercatore, qualsiasi sia la lunghezza della serie, qualsiasi sia il ritardo τ_{\max} usato, può risalire al valore dell'ampiezza dell'onda originale mediante la:

$$A(\omega_1) = \sqrt{K_1 + K_2 \frac{\gamma \varphi(\omega_1)}{N}} - K_3$$

relazione che è stata programmata e inserita come implementazione nel programma SPECTRA.

Qualora si preferisca sostituire al criterio di significatività dei picchi dello spettro di potenza utilizzato dal programma un altro ritenuto più consono (ad es. il criterio di Walker) è sufficiente scrivere una routine

FUNCTION TEST (PHI)

forzandone la compilazione ed il caricamento prima del caricamento del programma SPECTRA.

Questa funzione è diversa da zero per i valori di PHIF significativi, zero negli altri casi.

Il programma chiama questa FUNCTION per tutti i massimi relativi dello spettro.

Quella della FUNCTION TEST è l'unica variazione lecita alla struttura del programma SPECTRA, affinché i risultati relativi alla stima delle ampiezze siano validi.

UTILIZZAZIONE DEL PROGRAMMA INPUT-OUTPUT

Viene qui descritta la sequenza di schede parametri necessarie all'esecuzione del programma. Il contenuto di questo paragrafo in parte ripete ciò che è stato detto nel lavoro già citato in precedenza ⁽⁴⁾ in parte dipende dalla introduzione di nuove implementazioni nel programma SPECTRA ed è quindi una novità rispetto al precedente scritto.

Le schede contenenti i parametri relativi alla eventuale ristrutturazione dei dati letti e all'elaborazione della serie in ingresso sono *due* e devono essere sempre presenti. La presenza di altre schede può essere necessaria sotto particolari condizioni come scritto sotto.

1^a scheda FORMAT (212, I1, 212, I1, 2F5.0,15, 3F10.0,I1, 18X, 6I1)

Colonna	Nome della variabile	Tipo	Descrizione
1-2	MT	intero	Numero dell'unità logica contenente i dati in lettura: = 5 i dati sono su schede = 66 i dati sono su un file BCD di qualunque nome dichiarato sulla scheda LGO. (v. descrizione dell'INPUT). I dati sono letti tutti fino all'end-of-file.

(segue 1ª scheda)

Colonna	Nome della variabile	Tipo	Descrizione
3-4	NN	intero	Numero dei dati per scheda o record (massimo 80).
5	IZERI	intero	se = 0 i dati nulli sono significativi se $\neq 0$ i dati nulli rappresentano dati mancanti o errati e verranno sostituiti nel corso del programma.
6-7	GAPI (*)	intero	se = 0 nessun gap in lettura nei dati se $\neq 0$ indica il numero di volte che si debbono saltare i dati in lettura, dati che verranno sostituiti successivamente onde ripristinare la sequenza temporale della serie (massimo 99).
8-9	GAPE (*)	intero	se = 0 la successione dei dati dopo la lettura e l'eventuale sostituzione (GAPI $\neq 0$) è completa se $\neq 0$ la successione ottenuta è incompleta. Se ad es. GAPE = 1 significa che esiste un gruppo di dati fisicamente mancanti; la serie letta va integrata per ripristinare la sequenza temporale (massimo 99).
10	CHIUS	intero	se = 0 nei gaps viene inserita la media della serie letta se $\neq 0$ nei gaps vengono inseriti dati elaborati mediante interpolazione lineare usufruendo del metodo di chiusura.
11-15	PERC	reale	Differenza percentuale richiesta dal metodo di chiusura.

(*) Ai parametri GAPI, GAPE è associato un numero $n = \text{GAPI} + \text{GAPE}$ di schede che devono seguire la scheda parametri successiva alla scheda in esame. Ciascuna di queste schede contiene due valori interi con FORMAT (2110) rappresentanti il numero d'ordine, nella sequenza temporale da elaborare, dei dati validi immediatamente esterni ad ogni gap da integrare. Relativamente a GAPI = 1 comparirà una scheda contenente ad es. 25 (col. 9-10) e 42 (col. 19-20); questo significa che in lettura i dati dal 26° al 41° sono non significativi e andranno opportunamente sostituiti. Queste schede devono essere ordinate per valori crescenti dei limiti dei gaps.

(segue 1ª scheda)

Colonna	Nome della variabile	Tipo	Descrizione
16-20	T	reale	Semilunghezza della finestra D2 (in unità di ascissa).
21-25	TAUMAX	intero	Massimo ritardo nel calcolo della funzione di autocorrelazione (massimo 9999).
26-35	NIMIN	reale	Valore minimo delle frequenze considerate nel calcolo dello spettro di potenza.
36-45	N1MAX	reale	Valore massimo delle frequenze.
46-55	DN1	reale	Passo di frequenza, ossia differenza in ascissa fra 2 punti consecutivi dello spettro di potenza.
56	DN2	intero	Indica quante volte si vuole applicare ai dati la finestra D2.
75	IFPRINT	intero	= 1 viene stampata la tabella contenente, per ogni riga, la coppia di ascissa e ordinata spettrali di tutti i punti dello spettro di potenza. = 0 la precedente tabella non viene stampata.
76	IFFUNC	intero	= 1 viene stampata la tabella contenente, per ogni riga, ascissa e ordinata spettrali nonché ampiezza originaria dei punti massimi relativi significativi dello spettro. = 0 la precedente tabella non viene stampata né calcolata.
77	IFX	intero	= 0 non vengono eseguiti né il grafico né la perforazione della serie data. = 1 viene eseguito solo il grafico; = 2 viene eseguita solo la perforazione; = 3 vengono eseguiti sia il grafico sia la perforazione.
78	IFF	intero	Analogo a IFX per la serie dopo la D2.
79	IFTAU	intero	Analogo a IFX per la funzione di autocorrelazione.
80	IFPHI	intero	Analogo a IFX per lo spettro di potenza.

2^a scheda - FORMAT (8A10)

Colonna	Nome della variabile	Tipo	Descrizione
1-80	IFORM	alfa numerico	Contiene il formato di lettura nel normale linguaggio Fortran, comprese le parentesi esterne.

Il programma SPECTRA è disponibile già compilato su un Permanent File ed è richiamabile e utilizzabile mediante la seguente sequenza di schede:

a) nel caso in cui i dati sono contenuti su nastro:

```
JOB,CM130000,MT2,T.....
ATTACH(LIB,COLIB,ID=ASF,MR=1)
COPYN(Ø,LGO,LIB)
RETURN LIB.
REQUEST PLOTTER. nastro plotter
REWIND PLOTTER.
REQUEST DATI. nastro in lettura (contenente i dati)
REWIND DATI.
LGO(DATI)
```

7/8/9

```
SPECTRA,11
```

7/8/9

```
schede parametri
```

6/7/8/9

b) nel caso in cui i dati sono su scheda:

```
JOB,CM130000,MT1,T.....
ATTACH(LIB,COLIB,ID=ASF,MR=1)
COPYN(Ø,LGO,LIB)
RETURN LIB.
REQUEST PLOTTER. nastro plotter
REWIND PLOTTER.
LGO.
```

7/8/9

SPECTRA,11

7/8/9

schede parametri

schede dati

6/7/8/9

È opportuno forse a questo punto aggiungere una osservazione sui nomi di file riservati dal programma SPECTRA e sulla successione dei parametri della scheda LGO manipolabili eventualmente per l'esecuzione del programma.

SPECTRA utilizza internamente i files TAPE1, TAPE2, TAPE3, TAPE4, TAPE5, TAPE6, TAPE7, TAPE66 i quali non devono essere altrimenti usati in un job che esegua SPECTRA.

I parametri definibili all'atto dell'esecuzione mediante la scheda LGO sono:

LGO (lf1, lf2, lf3, lf4)

lf1 = nome del file contenente i dati in lettura (quando questi non sono su scheda) (default name = DATI)

lf2 = nome del file contenente l'uscita binaria del plotter (default name = PLOTTER)

lf3 = default name = INPUT

lf4 = default name = OUTPUT.

PROGRAMMA PER IL CALCOLO E IL PLOT DELLO SPETTRO DI POTENZA

 Costanti usate per l'elaborazione

Numero dei dati letti	=	6000
Numero dei punti della D2	=	5999
Massimo ritardo	=	5995
Freq. min.	=	0.
Freq. max.	=	3.00000000E-01
Passo	=	1.00000000E-03

Valori massimo e minimo delle serie

Val. massimo = 4.65409416E+00	Val. minimo = -3.70119278E+00
Val. massimo = 4.00428324E+00	Val. minimo = -4.11636707E+00
Val. massimo = 7.48305788E-01	Val. minimo = -4.59271637E-01
Val. massimo = 2.42406482E+02	Val. minimo = -1.14494097E+01

Fig. 4 a

Frequenza		Ordinata dello spettro	
0.000000		.76128070	
0.001000		.75623720	
0.002000		.74698793	
0.003000		.75064731	
.		.	
.		.	
.		.	
.		.	
.		.	
Frequenza	Ordinata dello spettro	Ampiezza	
.020000	242.40648173	.68	
.025000	127.06493989	.49	
.125000	45.89002899	.29	
.	.	.	
.	.	.	
.	.	.	

Fig. 4b

È possibile ottenere, su scelta dell'Utente, altre 2 tabelle, l'una contenente i valori di ascissa e ordinata spettrale di tutti i punti dello spettro, l'altra contenente ascissa e ordinata spettrale e ampiezza originaria relative ai punti di massimo relativo, significativi secondo i criteri esposti nei paragrafi precedenti (vedi es. in fig. 4 a, b).

Per quanto concerne l'uscita su tabulato, essa contiene sempre una tabella con i seguenti dati:

- a) numero e valori massimo e minimo della serie dei dati da elaborare;
- b) numero e valore minimo e massimo dei dati della serie dopo la D2;
- c) valore del massimo ritardo e valori massimo e minimo della funzione di autocorrelazione;
- d) frequenza minima, massima e passo di frequenza usati per il calcolo dello spettro di potenza, valore massimo e minimo dell'ordinata spettrale.

BIBLIOGRAFIA

- (1) BENDAT J. S. and PIERSOL A. G., 1966. - *Measurement and Analysis of Random Data*. « John Wiley & Son, Inc. », New York.

- (2) BLACKMAN R. B. and TUKEY J. W., 1958. - *The measurement of Power Spectra*. « Dover Publ. Inc. », New York.
 - (3) KENDALL M. G. and STUART A., 1968. - *The Advanced Theory of Statistics*. « Charles Griffin & Co. Ltd. », London.
 - (4) RANDI P., RONCHI SELVA M. E., 1972. - *Sullo spettro di potenza*. « L'Elaborazione automatica », 1, 2.
 - (5) SOLODOVNIKOV V. V., 1965. - *Dynamique Statistique des Systèmes Lineaires de Commande automatique*. « Dunod », Paris.
 - (6) YAGLOM A. M., 1962. - *An Introduction to the Theory of Stationary Random Functions*. « Prentice-Hall, Inc. Englewood Cliffs », New Jersey.
-