

Filtri multidimensionali e loro applicazioni geofisiche (*)

(Multidimensional filters and geophysical applications)

M. BOZZI ZADRO (**) - M. CAPUTO (***)

Ricevuto il 10 Maggio 1968

SUMMARY. — The ideal filter $\varphi(x_i)$ ($i = 1, \dots, n$) is studied in the space S_n with n dimensions; its transfer function $Q(\omega_i)$ in the space Ω_n be:

$$Q(\omega_i) = \begin{cases} 1 & \text{for } |\omega_i| < \bar{\omega}_i \\ \frac{1}{2} & \text{for } |\omega_i| = \bar{\omega}_i \\ 0 & \text{for } |\omega_i| > \bar{\omega}_i \end{cases},$$

the values of $\bar{\omega}_i$ are assigned.

Then, the filter $\varphi(x_i)$ is

$$\varphi(x_i) = F \cdot TQ(\omega_i).$$

Practically, since it is not possible to have a continuous filter $\varphi(x_i)$ defined for $-\infty < x_i < +\infty$, effects, due to sampling and especially to the cutting of the function $\varphi(x_i)$, are studied. Particularly, with reference to cutting, the function $\varphi(x_i) B(x_i)$ substitutes the function $\varphi(x_i)$, where $B(x_i)$ is « box car » unity for $|x_i| \leq x_i^*$ and zero elsewhere, when the values x_i^* are given.

This means to substitute $Q(\omega_i)$ with $Q^*(\omega_i)$, which presents the well-known Gibbs' phenomenon at the cut off frequencies. This phenomenon is reduced, as it happens in one dimension, by a smoothing in the space Ω_n of the function $Q^*(\omega_i)$, which is therefore replaced by the function

$$Q^{**}(\omega_i) = \prod_{i=1}^n \frac{\bar{\omega}_i}{\omega_{r_i}} \int_{\omega_i - \omega_{r_i}/2N_i}^{\omega_i + \omega_{r_i}/2N_i} Q_i^*(\omega_i) d\omega_i$$

where: ω_{r_i} = Nyquist frequency for ω_i ;
 $2N_i + 1$ = number of filter weights along the coordinate x_i ;
 $Q_i^*(\omega_i)$ = $Q^*(\omega_i)$ of the monodimensional case and the ω frequency.

(*) Questa ricerca è stata eseguita col contributo parziale dei fondi del CNR, contratto n° 115.201.137.

(**) Istituto di Geodesia e Geofisica, Università di Trieste.

(***) Istituto di Fisica e Istituto di Geodesia, Università di Bologna.

It results so that the filter function to be used is given by the formula:

$$\varphi^{**}(K_i \Delta x_i) = \prod_{i=1}^n \varphi_i^{**}(K_i \Delta x_i),$$

where $\varphi_i^{**}(K_i \Delta x_i)$ is the weight function pertinent to the monodimensional case and the variable x_i .

Thereafter the filter, complementary to the preceding one, given by the formula:

$$\delta(x_i) - \varphi^{**}(K_i \Delta x_i),$$

is studied. In fact its Fourier transform results to be:

$$1 - Q^{**}(\omega_i).$$

Later on, the pass-band filter with ω_i' and ω_i'' ($\omega_i' < \omega_i''$) cut off frequencies is studied. Such a filter is given by the formula:

$$\psi(x_i) = \prod_{i=1}^n 2^n \cos(\bar{\omega}_i x_i) \cdot \varphi^{**}(x_i),$$

where $\bar{\omega}_i = \frac{1}{2}(\omega_i' + \omega_i'')$;

in fact, its Fourier transform is:

$$S(\omega_i) = \prod_{i=1}^n \left[\delta(\omega_i - \bar{\omega}_i) + \delta(\omega_i + \bar{\omega}_i) \right] * Q^{**}(\omega_i).$$

The normalisation of such a filter consists in multiplying the values by a proper constant, so that its image function be unitarian in $\omega_i = \bar{\omega}_i$.

The filter, complementary to the preceding one, will be given by the formula: $\delta(x_i) - \psi(x_i)$; in fact its Fourier transform is:

$$1 - S(\omega_i).$$

Afterwards, in space S_2 , is presented the fan-shaped filter, whose transfer function is:

$$G(\omega_1, \omega_2) = D(a) = D(-a),$$

where $a = \omega_2/\omega_1$

and $D(a)$ has the Fourier transform.

The case where $D(a)$ is the « box car » with an unitarian amplitude for $|a| < \bar{a}$ is studied in detail.

The formula of the filter for the discrete case, with a whatever a in respect of the two Nyquist frequencies ω_{r1} and ω_{r2} , is given.

In the last section two analyses of bidimensional distributions are examined.

The former case deals with filtering, by means of the ideal filter (Fig. 1), of a uniform bidimensional distribution of non correlated values, since they have been taken from a sequence of random numbers. In the figures 2 and 3 the transfer function of filter and the spectrum of filtered values are presented. In the latter analysis, with an ideal filter, the low frequencies have been eliminated from gravity anomalies observed in the Po valley, in an area of 60×120 km. Gravity anomalies before and after filtering processes are shown in Figures 5 and 6.

RIASSUNTO. — Nello spazio S_n ad n dimensioni viene studiato il filtro ideale $\varphi(x_i)$ ($i = 1, \dots, n$), tale che la sua funzione di trasferimento $Q(\omega_i)$ nello spazio Ω_n sia:

$$Q(\omega_i) = \begin{cases} 1 & \text{per } |\omega_i| < \bar{\omega}_i \\ 1/2 & \text{per } |\omega_i| = \bar{\omega}_i \\ 0 & \text{per } |\omega_i| > \bar{\omega}_i \end{cases},$$

essendo fissati i valori di $\bar{\omega}_i$.

Il filtro $\varphi(x_i)$ risulta allora essere:

$$\varphi(x_i) = F \cdot TQ(\omega_i).$$

Poiché non è possibile in pratica disporre di un filtro $\varphi(x_i)$ continuo e definito per $-\infty < x_i < +\infty$, vengono studiati gli effetti dovuti alla campionatura e specialmente al troncamento della funzione $\varphi(x_i)$. In particolare, per quanto riguarda il troncamento, si sostituisce alla funzione $\varphi(x_i)$ la funzione $\varphi(x_i) B(x_i)$, essendo $B(x_i)$ la box car unitaria per $|x_i| \leq x_i^*$ e 0 altrove, fissati che siano i valori x_i^* .

Ciò significa sostituire alla $Q(\omega_i)$ voluta, la $Q^*(\omega_i)$ che, alle frequenze di taglio ω_i , presenta il noto fenomeno di Gibbs. Tale fenomeno viene attenuato, analogamente a quanto si fa in una dimensione, con un liscioamento nello spazio Ω_n della funzione $Q^*(\omega_i)$ che viene quindi sostituita dalla funzione:

$$Q^{**}(\omega_i) = \prod_{i=1}^n \frac{N_i}{\omega_{r_i}} \int_{\omega_i - \omega_{r_i}/2N_i}^{\omega_i + \omega_{r_i}/2N_i} Q_i^*(\omega_i) d\omega_i,$$

ove: ω_{r_i} è la frequenza di Nyquist per la ω_i ;

$2N_i + 1$ è il numero dei pesi del filtro lungo la coordinata x_i ;

$Q_i^*(\omega_i)$ è la $Q^*(\omega_i)$ relativa al caso monodimensionale ed alla frequenza ω_i .

Risulta così che la funzione filtro da impiegare è data dalla formula:

$$\varphi^{**}(K_t \Delta x_i) = \prod_{i=1}^n \varphi_i^{**}(K_t \Delta x_i),$$

essendo $\varphi_i^{**}(K_t \Delta x_i)$ la funzione peso relativa al caso monodimensionale ed alla variabile x_i .

Viene quindi studiato il filtro complementare del precedente, dato dalla formula:

$$\delta(x_i) - \varphi^{**}(K_t \Delta x_i).$$

Infatti la sua trasformata di Fourier risulta essere:

$$1 - Q^{**}(\omega_i).$$

Viene ancora studiato il filtro di passa-dominio con frequenze di taglio ω_i' e ω_i'' ($\omega_i' < \omega_i''$).

Tale filtro risulta essere dato dalla formula:

$$\psi(x_i) = \prod_{i=1}^n 2^n \cos(\bar{\omega}_i x_i) \cdot \varphi^{**}(x_i)$$

ove $\bar{\omega}_i = \frac{1}{2}(\omega_i' + \omega_i'')$; infatti la sua trasformata di Fourier è:

$$S(\omega_i) = \prod_{i=1}^n \left[\delta(\omega_i - \bar{\omega}_i) + \delta(\omega_i + \bar{\omega}_i) \right] * Q^{**}(\omega_i).$$

La normalizzazione di tale filtro consiste nel moltiplicare i valori per una opportuna costante in modo tale che la sua funzione immagine sia unitaria in $\omega_i - \bar{\omega}_i$.

Il filtro complementare del precedente sarà dato dalla formula:

$$\delta(x_i) - \psi(x_i);$$

infatti la sua trasformata di Fourier sarà uguale a

$$1 - S(\omega_i).$$

Viene poi presentato il filtro a ventaglio nello spazio S_2 , la cui funzione di trasferimento è:

$$G(\omega_1, \omega_2) = D(\alpha) = D(-\alpha)$$

con $\alpha = \omega_2 / \omega_1$

e con $D(\alpha)$ dotata di trasformata di Fourier.

Viene trattato in particolare il caso in cui $D(\alpha)$ sia la box car di ampiezza unitaria per $|\alpha| < a$. Viene data la formula del filtro per il caso discreto, con $\bar{\alpha}$ qualsiasi rispetto alle due frequenze di Nyquist ω_{r1} e ω_{r2} .

Nell'ultimo paragrafo sono illustrate due analisi di distribuzioni bidimensionali.

In un primo caso si tratta del filtraggio con il filtro ideale (Fig. 1) di una distribuzione uniforme bidimensionale di valori privi di correlazione in quanto presi da una sequenza di numeri a caso. Nelle Figure 2 e 3 sono riportati la funzione di trasferimento del filtro e lo spettro dei valori filtrati.

Nella seconda analisi sono stati eliminati con il filtro ideale le basse frequenze dalle anomalie di gravità rilevate nella pianura padana in un'area di 60×120 km. Le anomalie di gravità prima e dopo il filtraggio sono illustrate nelle Figure 5 e 6.

1. - Consideriamo uno spazio S_n ad n dimensioni, ed in esso un sistema di coordinate cartesiane x_i ($i = 1, \dots, n$), ed una funzione $f(x_i)$ definita in S_n , che soddisfi in S_n le condizioni di Dirichlet, e tale che l'integrale:

$$\int_{S_n} |f(x_i)| dS_n$$

sia convergente.

Consideriamo poi uno spazio Ω_n ad n dimensioni ed in esso n coordinate cartesiane ω_i , ($i = 1, 2, \dots, n$), e sia $F(\omega_i)$ la trasformata di Fourier della funzione $f(x_i)$:

$$F(\omega_i) = \int_{S_n} f(x_i) e^{j(\omega_1 x_1 + \dots + \omega_n x_n)} dS_n . \quad [1.1]$$

Supponiamo di voler filtrare la funzione $f(x_i)$ con un filtro di passa-bassa, e cioè in modo tale che la trasformata di Fourier $\bar{F}(\omega_i)$ della funzione filtrata $\bar{f}(x_i)$ sia

$$\bar{F}(\omega_i) = \begin{cases} 0 & \text{per } |\omega_i| > \bar{\omega}_i \\ F(\omega_i) & \text{per } |\omega_i| < \bar{\omega}_i \\ \frac{1}{2}F(\omega_i) & \text{per } |\omega_i| = \bar{\omega}_i \end{cases}$$

essendo prefissati arbitrariamente gli $\bar{\omega}_i$ positivi.

Per semplicità di esposizione dei procedimenti di questa nota è conveniente definire la $\bar{F}(\omega_i)$ come segue:

$$\bar{F}(\omega_i) = F(\omega_i) Q(\omega_i) \quad [1.2]$$

ove

$$Q(\omega_i) = \begin{cases} 0 & \text{per } |\omega_i| > \bar{\omega}_i \\ 1 & \text{per } |\omega_i| < \bar{\omega}_i \\ \frac{1}{2} & \text{per } |\omega_i| = \bar{\omega}_i . \end{cases}$$

Vediamo ora quali operazioni nello spazio S_n corrispondono all'operazione testè descritta nello spazio Ω_n . Indicando con $\varphi(x_i)$ l'immagine della $Q(\omega_i)$ in S_n :

$$\varphi(x_i) = \frac{1}{(2\pi)^n} \int_{\Omega_n} Q(\omega_i) e^{-j(\omega_1 x_1 + \dots + \omega_n x_n)} d\Omega_n , \quad [1.3]$$

ed applicando il teorema della convoluzione alla [1.2] si trova subito che la funzione $\bar{f}(x_i)$ è data dalla formula:

$$\bar{f}(x_i) = \varphi(x_i) * f(x_i) = \int_{S_n'} \varphi(x_i') f(x_i' - x_i) dS_n' . \quad [1.4]$$

Le variabili x_i' ($i = 1, 2, \dots, n$) sono definite in uno spazio cartesiano S_n' , e l'integrazione precedente si intende estesa a tutto S_n' .

2. - In pratica l'integrazione indicata nella formula [1.4] viene fatta numericamente e perciò è effettuata in un dominio limitato

DS'_n di S'_n , trascurando quindi i valori della funzione $\varphi(x'_i)$ nel complementare di DS'_n .

Ciò equivale a sostituire la funzione $\varphi(x'_i)$ con la funzione:

$$\varphi^*(x'_i) = \varphi(x'_i) B(x'_i),$$

ove $B(x'_i)$ è una funzione uguale ad 1 nei punti interni al dominio DS'_n , uguale ad $\frac{1}{2}$ sulla frontiera, ed uguale a 0 nei punti esterni.

Limitiamoci a considerare il caso, comunemente adottato, in cui il dominio DS'_n sia quello limitato dalle coppie di iperpiani di equazioni $x'_i = \pm x_i^*$, essendo x_i^* un valore di x'_i prefissato opportunamente.

In tal caso la funzione $B(x'_i)$ risulta essere così definita:

$$B(x'_i) = \begin{cases} 1 & \text{per } |x'_i| < |x_i^*| \\ \frac{1}{2} & \text{per } |x'_i| = |x_i^*| \\ 0 & \text{altrove.} \end{cases} \quad [2.1]$$

Questo implica d'altra parte che la formula [1.2] va sostituita con la:

$$F^*(\omega_i) = F^i(\omega_i) Q^*(\omega_i), \quad [2.2]$$

ove:

$$Q^*(\omega_i) = Q(\omega_i) * \int_{S'_n} B(x'_i) e^{j(\omega_1 x_1 + \dots + \omega_n x_n)} dS'_n. \quad [2.3]$$

Sviluppando ora l'integrale a secondo membro della [2.3], e ponendo $\frac{\sin \omega_i x_i^*}{\omega_i x_i^*} = \text{dif} \left(\frac{\omega_i x_i^*}{\pi} \right)$, si ottiene:

$$Q^*(\omega_i) = 2^n Q^*(\omega_i) * \prod_{i=1}^n x_i^* \text{dif} \left(\frac{\omega_i x_i^*}{\pi} \right). \quad [2.3']$$

Perciò risulterà: $F^*(\omega_i) \neq \bar{F}(\omega_i)$.

Per questo motivo cercheremo di modificare opportunamente la funzione $\varphi^*(x_i)$ in modo tale che la corrispondente funzione di trasferimento sia il più possibile prossima alla funzione $Q(\omega_i)$ di partenza, ovvero in modo che anche la $F^*(\omega_i)$ approssimi la $\bar{F}(\omega_i)$ « nel miglior modo possibile ». Il significato di « prossima » e « nel miglior modo possibile » sarà chiarito nei seguenti due paragrafi.

3. - Nelle applicazioni numeriche la funzione $f(x_i)$ è definita in un insieme discreto di punti di un dominio DS_n : è perciò indispensabile

discretizzare con lo stesso intervallo di campionatura Δx_i anche la funzione filtrante $\varphi^*(x_i')$.

Questa discretizzazione notoriamente ha come risultato che la funzione immagine è periodica nelle ω_i con periodo $2\omega_{r_i}$, ove $\omega_{r_i} = \frac{\pi}{\Delta x_i}$ è la frequenza di Nyquist. Infatti, discretizzare la funzione $\varphi^*(x_i')$ significa sostituirla con la funzione:

$$\varphi^*(x_i') \prod_{i=1}^n \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(x_i' - k \Delta x_i').$$

La sua immagine sarà quindi:

$$\begin{aligned} Q^*(\omega_i) * \prod_{i=1}^n \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(\omega_i - 2k \omega_{r_i}) &= \prod_{i=1}^n Q_{i^*}(\omega_i) * \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(\omega_i - 2k \omega_{r_i}) = \\ &= \prod_{i=1}^n \sum_{k=-\infty}^{\infty} Q_{i^*}(\omega_i - 2k \omega_{r_i}) \end{aligned}$$

ove con $Q_{i^*}(\omega_i)$ si indica la specializzazione della $Q^*(\omega_i)$ per il caso unidimensionale relativo alla singola variabile ω_i .

È evidente che la contaminazione fra immagini successive sarà trascurabile nei casi in cui le frequenze di taglio siano sufficientemente più piccole delle corrispondenti frequenze di Nyquist.

Va ancora notato che la discretizzazione agisce allo stesso modo sull'immagine della funzione $f(x_i)$ di partenza: la contaminazione viene evitata con un campionamento opportuno, e cioè con una opportuna scelta delle frequenze di Nyquist.

4. - Per quanto visto nel paragrafo precedente, nei problemi di filtraggio numerico si possono trascurare gli effetti provocati dalla discretizzazione, una volta che si siano scelti opportunamente gli intervalli di campionatura. Non si possono invece trascurare gli effetti provocati dal troncamento della funzione $\varphi(x_i')$, e che si riassumono nella formula [2.3].

Va notato inoltre che, nell'operazione di filtraggio, ai bordi del dominio DS_n si perde un numero di valori che, per la singola variabile x_i è complessivamente uguale a $2N_i$ se $x_i^* = N_i \Delta x_i$.

Da ciò l'interesse ad operare con filtri numerici di pochi valori, e cioè a scegliere valori x_i^* opportunamente piccoli. D'altra parte la $Q^*(\omega_i)$ data dalla [2.3] tende alla $Q(\omega_i)$ al tendere di x_i^* all'infinito, dando invece luogo per piccoli valori di x_i^* , ad oscillazioni rapide soprattutto in prossimità delle frequenze di taglio (fenomeno di Gibbs).

Un metodo, impiegato già nel caso unidimensionale (Hamming, 1962), per attenuare le oscillazioni è quello di « lisciare » la funzione $Q^*(\omega_i)$ con un filtro: per filtro viene usata una « box car » di estensione tale da comprendere una completa oscillazione della $Q^*(\omega_i)$, che avviene in un intervallo di frequenza uguale a ω_{v_i}/N_i .

La funzione $Q^*(\omega_i)$ viene precisamente sostituita dalla:

$$Q^{**}(\omega_i) = \prod_{i=1}^n \frac{N_i}{\omega_{v_i}} \int_{\omega_i - \omega_{v_i}/2N_i}^{\omega_i + \omega_{v_i}/2N_i} Q_i^*(\omega_i) d\omega_i. \quad [4.1]$$

Considerando separatamente gli integrali a secondo membro della [4.1] (corrispondenti al caso unidimensionale), e tenendo conto che:

$$Q_i^*(\omega_i) = \frac{\varphi_0}{2} + \sum_{k=1}^{N_i} \varphi_k \cos \frac{k \pi \omega_i}{\omega_{v_i}} \quad [4.2]$$

ove

$$\varphi_k = \frac{\sin \pi k}{\pi k} \quad ; \quad \varphi_0 = 1,$$

si vede che:

$$Q^{**}(\omega_i) = \prod_{i=1}^n \frac{N_i}{\omega_{v_i}} \int_{\omega_i - \omega_{v_i}/2N_i}^{\omega_i + \omega_{v_i}/2N_i} \left(\frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{N_i} \varphi_k \cos \frac{k \pi \omega_i}{\omega_{v_i}} \right) d\omega_i. \quad [4.3]$$

Dalla relazione [4.3] risulta quindi evidente come deve essere modificata la funzione filtro $\varphi(x_i')$, onde ottenere nello spazio Ω_n la funzione $Q^{**}(\omega_i)$: la nuova funzione peso $\varphi^{**}(x_i')$, nel discreto, sarà data dalla:

$$\varphi^{**}(k_i \Delta x_i') = \prod_{i=1}^n \varphi_i^{**}(k_i \Delta x_i'), \quad [4.4]$$

ove, secondo il formalismo già introdotto, $\varphi_i^{**}(k_i \Delta x_i')$ rappresenta la funzione peso relativa al caso unidimensionale, ed alla variabile x_i' che è data dalla seguente formula:

$$\varphi_i^{**}(k_i \Delta x_i') = \frac{N_i}{(\pi k_i)^2} \sin \bar{\omega}_i k_i \sin \frac{\pi k_i}{N_i} \quad ; \quad k_i \neq 0, \quad \varphi_i^{**}(0) = \frac{\bar{\omega}_i}{\pi} \quad [4.5]$$

ove $\bar{\omega}_i$ è la frequenza di taglio, relativa alla coordinata x_i' .

5. - In questo paragrafo faremo alcune considerazioni sulla costruzione e struttura dei filtri di voluto dominio passante nelle frequenze ω_i .

I pesi del filtro di passa bassa, sono dati secondo quanto già visto nel precedente paragrafo, dalla formula:

$$P_{x'_1 x'_2 \dots x'_n} = P_{x'_1} P_{x'_2} \dots P_{x'_n} \tag{5.1}$$

ove ora per comodità si indica con $P_{x'_1 x'_2 \dots x'_n}$ il valore della funzione $\varphi''(k_i \Delta x'_i)$ e con $P_{x'_i}$ il valore della funzione $\varphi_i^{**}/k_i \Delta x'_i$ dati dalle formule [4.4] e [4.5].

I pesi normalizzati $\bar{P}_{x'_1 x'_2 \dots x'_n}$ si ottengono dalla relazione:

$$\bar{P}_{x'_1 x'_2 \dots x'_n} = \bar{P}_{x'_1} \bar{P}_{x'_2} \dots \bar{P}_{x'_n} \tag{5.2}$$

ove $\bar{P}_{x'_i}$ sono a loro volta pesi normalizzati:

$$\bar{P}_{x'_i} = \frac{P_{x'_i}}{\sum_{-N_i}^{N_i} P_{x'_i}} \tag{5.3}$$

la sommatoria a secondo membro essendo estesa a tutti i $2N_i + 1$ pesi $P_{x'_i}$.

In tal modo la funzione di trasferimento risulta unitaria nell'origine.

Infatti il valore della funzione di trasferimento nell'origine è dato da:

$$\sum \bar{P}_{x'_1 x'_2 \dots x'_n} = \prod_{i=1}^n \sum_{-N_i}^{N_i} \frac{P_{x'_i}}{\sum_{-N_i}^{N_i} P_{x'_i}} = 1 \tag{5.4}$$

ove la sommatoria a primo membro si intende estesa a tutti gli N pesi del filtro con $N = \prod_{i=1}^n (2N_i + 1)$.

Passiamo ora alla costruzione del filtro complementare del precedente, ossia del filtro che nello spazio Ω_n ha per funzione di trasferimento la funzione $1 - Q^{**}(\omega_i)$; la sua trasformata di Fourier è la funzione:

$$\delta(x'_i) - \varphi^{**}(x'_i) \tag{5.5}$$

ove $\delta(x'_i)$ è la δ di Dirac.

I pesi del filtro complementare sono dati dalla formula:

$$O_{P_{x'_1 x'_2 \dots x'_n}} = \delta(x'_i) - \bar{P}_{x'_1 x'_2 \dots x'_n} \tag{5.6}$$

Assumendo i pesi $\bar{P}_{x'_1 x'_2 \dots x'_n}$ normalizzati, ci si assicura che la funzione di trasferimento sia nulla nell'origine. Infatti in questo caso, per la [5.6] e la [5.4] il valore della trasformata di Fourier della funzione peso nell'origine è dato da:

$$\sum C_{P_{x'_1 x'_2 \dots x'_n}} = 1 - \sum \bar{P}_{x'_1 x'_2 \dots x'_n} = 0 \quad [5.7]$$

ove, al solito, le sommatorie si intendono estese a tutti gli N pesi del filtro.

Per la costruzione dei filtri di passa dominio si può procedere col seguente artificio (Zadro, 1963).

Siano $\omega_i' < \omega_i''$ le frequenze di taglio che definiscono il dominio passante. La funzione di trasferimento $S(\omega_i)$ si può considerare come il prodotto convolutivo:

$$S(\omega_i) = \prod_{i=1}^n [\delta(\omega_i - \bar{\omega}_i) + \delta(\omega_i + \bar{\omega}_i)] * Q^{**}(\omega_i) \quad [5.8]$$

ove $\bar{\omega}_i = \frac{1}{2}(\omega_i' + \omega_i'')$, e dove $Q^{**}(\omega_i)$ è la già nota funzione di trasferimento del filtro di passa bassa, con frequenze di taglio date da $\bar{\omega}_i = \frac{1}{2}(\omega_i'' - \omega_i')$.

La funzione peso $\Psi(x'_i)$ del filtro di passa dominio si ottiene ora semplicemente facendo la trasformata di Fourier della [5.3] e ricorrendo al teorema della convoluzione, ovvero:

$$\Psi(x'_i) = \prod_{i=1}^n 2^n \cos \bar{\omega}_i x'_i \varphi^{**}(x'_i) . \quad [5.9]$$

Quindi, nel discreto, i pesi $R_{x'_1 x'_2 \dots x'_n}$, saranno dati da:

$$R_{x'_1 x'_2 \dots x'_n} = \prod_{i=1}^n \frac{1}{\varrho_i} \cos \bar{\omega}_i x'_i P_{x'_i} \quad [5.10]$$

ove

$$\varrho_i = \sum_{-N_i}^{N_i} \cos \bar{\omega}_i x'_i \cdot P_{x'_i}$$

è un fattore che fa sì che la funzione di trasferimento sia unitaria in $\omega_i = \bar{\omega}_i$.

Infatti la funzione di trasferimento in $\omega_i = \bar{\omega}_i$ è data dalla formula:

$$\sum R_{x'_1 x'_2 \dots x'_n} \cos \bar{\omega}_i x'_i = \sum \prod_{i=1}^n \frac{1}{\varrho_i} \cos^2 \bar{\omega}_i x'_i \cdot P_{x'_i} = 1 .$$

Il filtro complementare, ossia il filtro eliminatore di dominio sarà ottenuto facilmente con il procedimento già adottato in precedenza. Sarà cioè sufficiente calcolare la funzione peso come la trasformata di Fourier della funzione $1 - S(\omega_i)$. Ciò conduce ovviamente ai pesi:

$$C_{R_{x'_1 x'_2 \dots x'_n}} = \delta(x_i') - \frac{1}{\rho_i} \cos \bar{\omega}_i x_i' \cdot P_{x'_i} \quad [5.11]$$

Occorre notare che i filtri di passa dominio, oppure eliminatori di dominio, daranno buoni risultati soltanto nel caso in cui le frequenze di taglio siano sufficientemente lontane sia dall'origine che da quelle di Nyquist.

È evidente infine, che per costruire un filtro con funzione di trasferimento unitaria in un dominio dello spazio Ω_n scomponibile in un numero finito di domini delimitati da coppie di iperpiani di equazioni $\omega_i = \omega_i'$, $\omega_i = \omega_i''$, per l'additività della trasformata di Fourier, basterà sommare un ugual numero di filtri, appartenenti ai tipi descritti precedentemente.

6. - Ricordiamo ancora un tipo di filtro di recente introduzione nelle applicazioni geofisiche, e cioè il filtro a ventaglio, per il caso particolare $n = 2$.

Si tratta di un filtro con funzione di trasferimento $G(\omega_1, \omega_2)$:

$$G(\omega_1, \omega_2) = D(a) = D(-a) \quad [6.1]$$

$$a = \omega_2/\omega_1$$

con $D(a)$ dotata di trasformata di Fourier.

Il caso più comune dal punto di vista delle applicazioni è quello in cui $D(a)$ rappresenta la « box car », cioè:

$$D(a) = \begin{cases} 0 & \text{per } |a| > \bar{a} \\ 1 & \text{per } |a| < \bar{a} \\ 1/2 & \text{per } |a| = \bar{a} \end{cases}$$

In tal caso, nel piano (ω_1, ω_2) ci sono due linee di taglio costituite dalle due rette di equazione $\omega_2 = \pm \bar{a}\omega_1$.

J. P. Fail e G. Grau (1963), P. Embree, J. P. Burg e M. M. Backus (1963) hanno trovato in formula chiusa l'espressione della funzione filtrante $g(x_1, x_2)$ associata alla $G(\omega_1, \omega_2)$; posto $x_1 = h \Delta x_1$; $x_2 = k \Delta x_2$, risulta:

$$g(h, k) = C \frac{1}{k^2 - h^2}$$

ove C è una costante.

Tale formula si presenta però di difficile impiego data la singolarità della funzione stessa per $k \pm h = 0$.

Per il caso discreto, ponendo $\omega_{r_1} = \pi/\Delta x_1$; $\omega_{r_2} = \pi/\Delta x_2$; ed ammettendo $\omega_{r_2} \geq \bar{a} \omega_{r_1}$, la funzione peso $g(h, k)$ può essere agevolmente calcolata mediante lo sviluppo in serie di Fourier della funzione $G(\omega_1, \omega_2)$:

$$\begin{aligned}
 g(h, k) &= \frac{1}{\omega_{r_1} \omega_{r_2}} \int_0^{\omega_{r_1}} d\omega_1 \int_0^{a\omega_1} \cos \omega_1 h \Delta x_1 \cos \omega_2 k \Delta x_2 d\omega_2 = \\
 &= \frac{1}{\pi^2 k} \left\{ \frac{\sin^2 \frac{\pi}{2} (h + \bar{a} k \xi)}{h + \bar{a} k \xi} - \frac{\sin^2 \frac{\pi}{2} (h - \bar{a} k \xi)}{h - \bar{a} k \xi} \right\} = \begin{cases} (h \neq 0, \\ k \neq 0) \end{cases} \\
 &= -\frac{\bar{a} \xi}{2} \frac{\sin^2 \frac{\pi}{2} h}{(\pi/2 h)^2} = \begin{cases} (h \neq 0, \\ k = 0) \end{cases} \quad [6.2] \\
 &= \frac{2}{\pi^2 k^2} \frac{\sin^2 \frac{\pi}{2} \bar{a} \xi k}{\bar{a} \xi} = \begin{cases} (h = 0, \\ k \neq 0) \end{cases} \\
 &= -\frac{\bar{a} \xi}{2} = \begin{cases} (h = 0, \\ k = 0) \end{cases}
 \end{aligned}$$

essendo
$$\bar{a} \xi = \frac{\Delta x_2}{\Delta x_1} = \frac{\omega_{r_1}}{\omega_{r_2}}.$$

Per $\omega_{r_2} = \bar{a} \omega_{r_1}$, risulta $\bar{a} \xi = 1$.

Per $\omega_{r_2} < \bar{a} \omega_{r_1}$, si può sostituire alla [6.2] la:

$$\begin{aligned}
 g(h, k) &= \frac{1}{\omega_{r_1} \omega_{r_2}} \left\{ \int_0^{\omega_{r_2}/\bar{a}} d\omega_1 \int_0^{\bar{a}\omega_1} \cos \omega_1 h \Delta x_1 \cos \omega_2 k \Delta x_2 d\omega_2 + \right. \\
 &\quad \left. + \int_{\omega_{r_2}/\bar{a}}^{\omega_{r_1}} d\omega_1 \int_0^{\omega_{r_2}} \cos \omega_1 h \Delta x_1 \cos \omega_2 k \Delta x_2 d\omega_2 \right\}. \quad [6.2']
 \end{aligned}$$

La [6.2'] permette di calcolare il filtro voluto come somma di due filtri: uno a ventaglio, ed uno ideale di passa dominio.

In questo paragrafo non si è tenuto conto del fenomeno di Gibbs. Questo significa che il numero dei pesi necessari per ottenere una buona funzione di trasferimento dovrà essere piuttosto elevato.

7. - Allo scopo di illustrare con degli esempi le possibilità offerte dall'impiego dei filtri in geofisica, si sono eseguite due analisi distinte, per il caso bidimensionale.

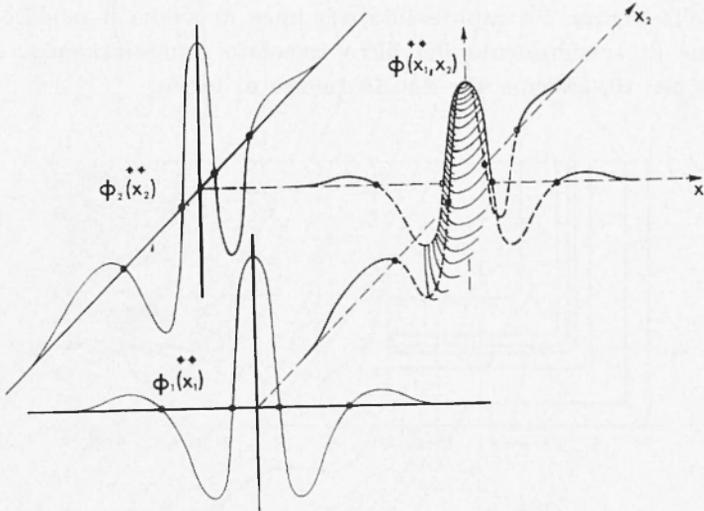


Fig. 1

In un primo caso si è costruita una distribuzione uniforme bidimensionale di 2.000 valori disposti sui nodi di un reticolo a maglia quadrata e cioè con campionatura $\Delta x_1 = \Delta x_2$, in un rettangolo di lati $50 \Delta x_1$ e $40 \Delta x_2$. I 2.000 valori sono stati presi da una sequenza di numeri a caso di otto cifre compresi tra 0 e 1.

Si è costruito il filtro ideale eliminatore delle frequenze $\omega_1 \leq 2\pi/7\Delta x_1$ e delle frequenze $\omega_2 \leq 2\pi/7\Delta x_2$ con 21 pesi lungo ambedue le coordinate.

In questo caso, la funzione peso si è ottenuta, con riferimento alla formula [5.3], dalla:

$$[\delta(x_1) - \bar{P}_{x_1}] [\delta(x_2) - \bar{P}_{x_2}] \tag{7.1}$$

e cioè semplicemente come prodotto delle funzioni peso dei due filtri di passa alta corrispondenti al caso monodimensionale.

La costruzione della funzione peso è illustrata nella Figura 1, ove

$$\Phi_1^{**}(x_1) = \delta(x_1) - \varphi_1^{**}(x_1)$$

$$\Phi_2^{**}(x_2) = \delta(x_2) - \varphi_2^{**}(x_2)$$

$$\Phi^{**}(x_1, x_2) = \Phi_1^{**}(x_1) \cdot \Phi_2^{**}(x_2) .$$

Nella Figura 2 è rappresentato a linee di livello il modulo della funzione di trasferimento del filtro calcolato numericamente, moltiplicato per 10, assieme alle due frequenze di taglio.

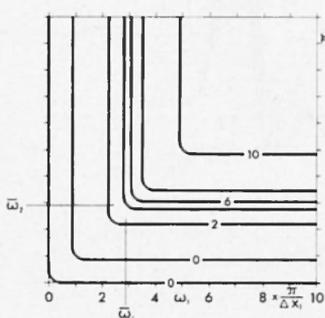


Fig. 2

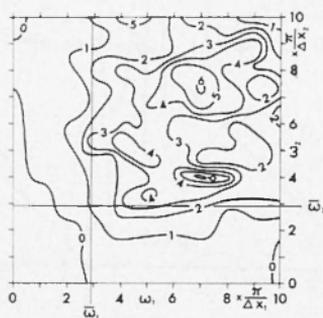


Fig. 3

Per il modo con cui sono stati scelti i dati, cioè privi di correlazione, lo spettro bidimensionale per un numero di campionature sufficientemente ampio, dovrebbe risultare uguale ad una costante, e cioè a $\sigma^2/150$ se σ^2 è lo scarto quadratico medio dei valori considerati. Nel nostro caso è $\sigma^2/150 = 5,6 \cdot 10^{-1}$.

Dopo l'applicazione del filtro, lo spettro dovrebbe essere uguale al quadrato della funzione di trasferimento, moltiplicato per la stessa costante. La verifica di ciò è visibile nella Figura 3 dove è stata rappresentata a linee di livello la radice quadrata dello spettro dei dati filtrati, moltiplicata per 150 (questo fattore è stato fissato per comodità grafiche).

L'efficienza del metodo risulta evidente, specialmente se si tiene conto dell'esiguo numero di valori disponibile per il calcolo dello spettro dopo l'applicazione del filtro, e cioè 30 valori lungo la coordinata x_1 e 20 lungo la x_2 .

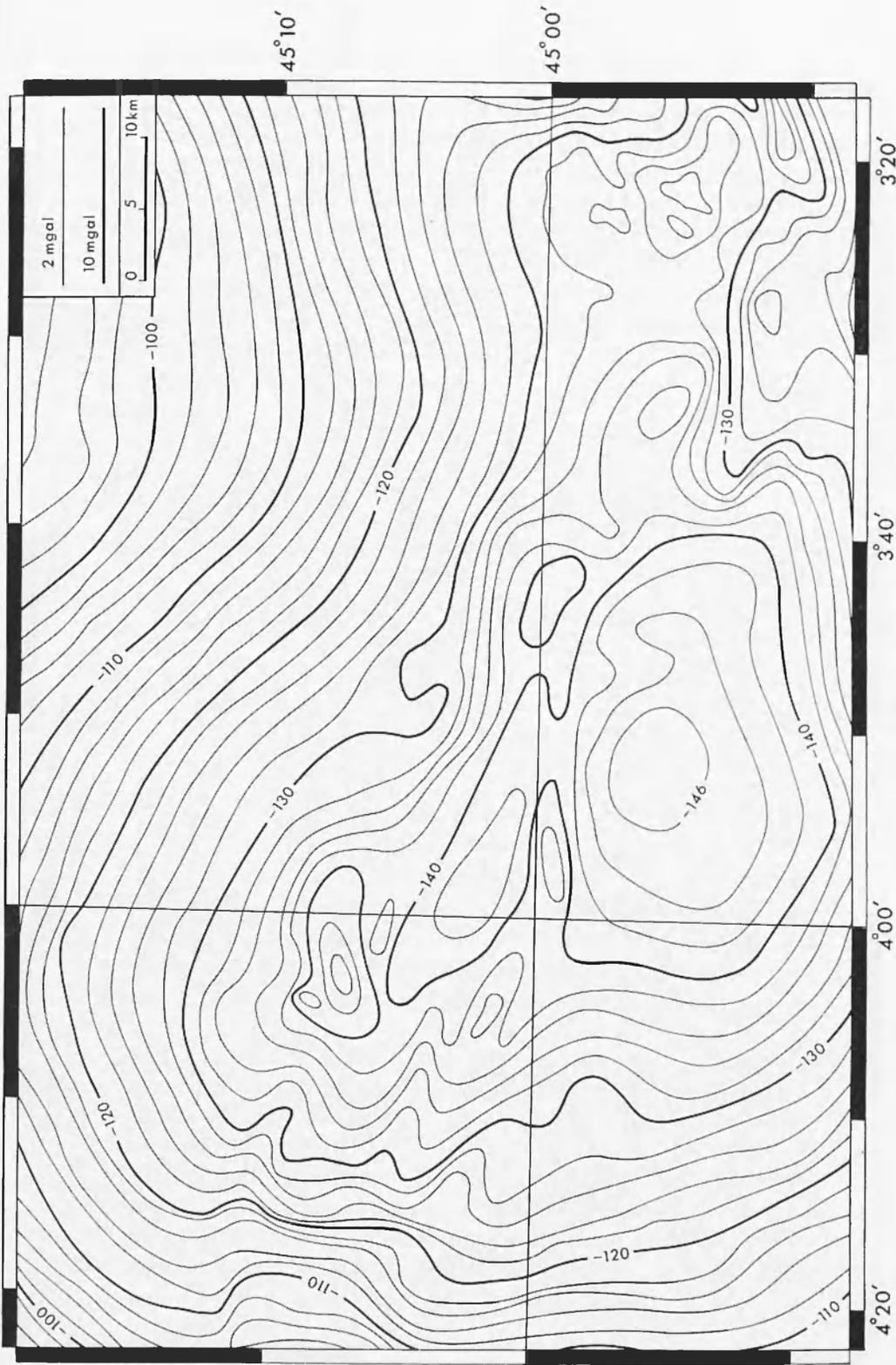


Fig. 4

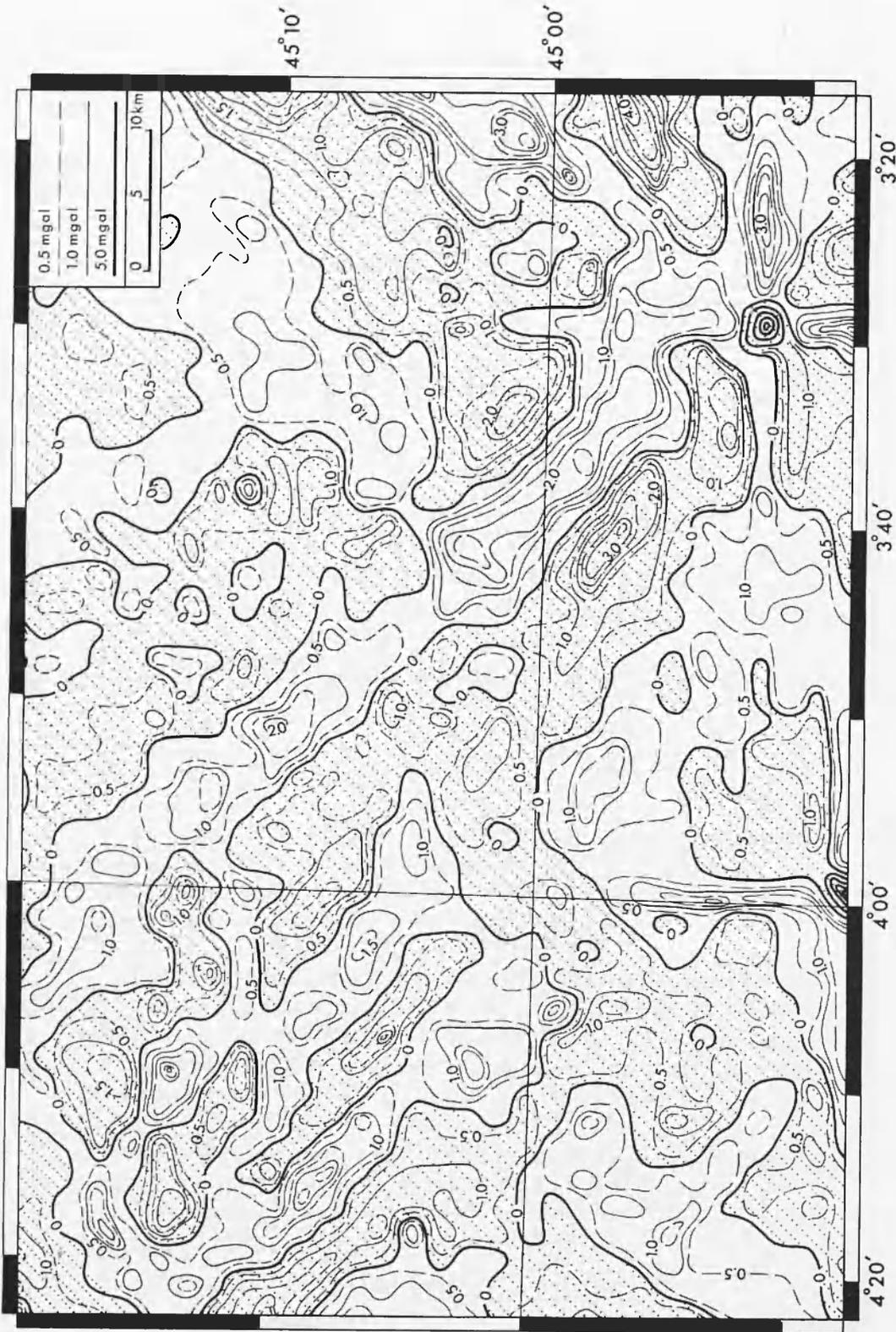


Fig. 5

Come secondo esempio, si sono analizzati i valori di Bouguer della gravità rilevati ogni due chilometri in una vasta area della Pianura Padana di 180 per 240 chilometri (Agip Mineraria - 1957).

Onde togliere le basse frequenze, si è impiegato un filtro di 61 valori lungo ciascuna delle due coordinate, assumendo come frequenze di taglio le frequenze $\omega_1 = \omega_2 = 2\pi/40 \text{ km}^{-1}$.

Nelle Figure 4 e 5 si sono rappresentate le isoanomale prima e dopo il filtraggio. Nella Figura 5 le aree tratteggiate corrispondono a valori negativi delle anomalie di gravità.

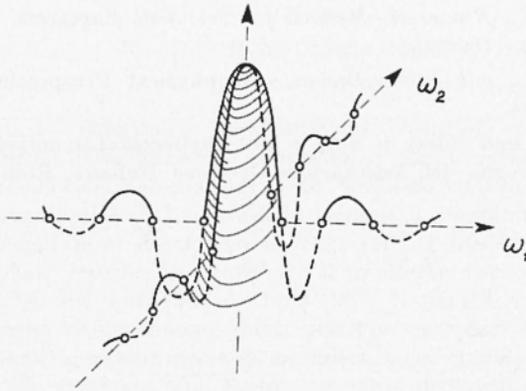


Fig. 6

L'eliminazione delle basse frequenze spesso viene fatta togliendo ai valori osservati la media aritmetica calcolata sui reticolati di opportune dimensioni. Ciò significa filtrare i dati con il filtro complementare di una « box car » unitaria nel reticolo fissato, e zero altrove.

Nello spazio delle frequenze, alla « box car », come noto, corrisponde una funzione di trasferimento (le cui caratteristiche sono illustrate nella Figura 6) data dal prodotto di due funzioni « dif » relative al caso monodimensionale.

Dal confronto di tale funzione di trasferimento con quella del filtro ideale qui esaminato, appare evidente l'opportunità di impiegare di preferenza filtri del tipo di quest'ultimo nell'eliminazione delle basse frequenze delle anomalie di gravità.

BIBLIOGRAFIA

- AGIP Mineraria, *Gravimetria della Pianura Padana*. Atti del Convegno su « I giacimenti gassiferi dell'Europa Occidentale », Milano 1967.
- DARBY E. K. and DAVIES E. B., *The Analysis and Design of two-dimensional Filters for two-dimensional Data*. « Geophysical Prospecting », XV, 3, (Sept. 1967).
- EMBREE P., BURG J. P. and BACKUS M. M., *Wide Band Velocity Filtering. The Pie Slice Process*. « Geophysics », XXVIII, 6, (Dec. 1963).
- FAIL I. P., GRAU G., *Les filtres en éventail*. « Geophysical Prospecting », XI, 2, (June 1963).
- HAMMING R. W., *Numerical Methods for Scientists Engineers*. McGraw Hill, New York, (1962).
- WIGGINS R. A., *ω - k Filter Design*. « Geophysical Prospecting », XIV, 4, Dec. (1966).
- ZADRO M., *Su una classe di filtri e loro applicazioni in geofisica*. « Atti » del XIII Convegno dell'Associazione Geofisica Italiana, Roma, (1963).
-