

## L'abbassamento dell'EGO-isopieziche

A. BELLUIGI (\*)

Ricevuto il 22 Giugno 1963

RIASSUNTO. — Nel '57 demmo una teoria tridimensionale del fenomeno elettrogeosmotico « EGO stazionario », in terreno omogeneo, saturo d'acqua. Successivamente svilupparammo teorie transitorie mono e bidimensionali: « EGO trans ».

Abbiamo ripreso, con qualche variante, qui, tale teoria tridimensionale, ai fini di calcolare e conseguire poi, nel miglior modo possibile, l'abbassamento delle superfici di depressione delle falde idriche drenate elettrosmoticamente, con pompaggio catodico, (in genere dell'acqua tellurica).

Tale slivellamento idrico, rispetto al normale del terreno umido, è richiesto in più casi: nei terreni di fondazione per posa, su giaciture il più possibilmente anidre, negli imbasamenti soggetti a vicende idrogeologiche, (e quindi comportanti dissesti statici delle strutture sovrincombenti, specie in opere vetuste, monumentali), in opere varie, silos interrati, camminamenti, scavi, tunnels, carreggiate, trincee, (senza pericoli di distacchi, smottamenti di fiancate, fluitazioni di limi).

È ben noto che con i normali pompaggi in pozzi e fori di sonda, (Well-point compresi), specie in argilloidi o in terreni pulvurenti a finissima granulometria, dispendiosi oltre misura, non si ottengono che parziali, incerti risultati.

Il trattamento EGO interviene a questo punto, in maniera decisiva e risolutiva.

Quali allora le modalità d'impiego di dispositivi elettrodici e relativi condizionamenti elettrici atti a raggiungere le finalità d'abbassamento egosopiezico?

È stato possibile poter dimostrare da parte nostra, in questa Memoria, che le profondità d'elettroregressione delle tavole d'acqua nel sottosuolo, sono funzioni, oltre che dei coefficienti di filtrazione idrica ed elettrica dei mezzi impregnati d'acqua, della tensione elettrica applicata, di modalità d'erogazione, oltre che dei dispositivi polari, spaziatore e consistenze elettrodiche.

---

(\*) Prof. A. BELLUIGI - Perugia Prepo - (Italia) — Ordinario nelle Università italiane - Johannesburg Elm Street 15, Houghton - Sud Africa.

L'espressioni analitiche qui ricavate, danno la possibilità di ricostruire non solo le « elettrobatimetrie » d'abbassamento di falda, ma di valutare le quantità d'acqua estraibile, (acqua libera interstiziale, e in parte acqua legata), correlazionabile, alle stesse depressioni egoisopieziche.

Si ha spesso l'abitudine, a questo punto, di porre i pur legittimi « problemi di costo », ma in genere, occorre notare, questo vien fatto in forma vaga se non erronea. Né potremmo ora entrare in un cosiffatto problema, salvo però affermare categoricamente che gli « elettroprocessi », condotti a regola d'arte, (altrimenti possono essere del tutto netagivi), non temono concorrenze economiche di nessun genere.

La soluzione generale del problema postoci, (finora non data a quanto ci consta), ha portato alla risoluzione di una quantità d'altri connessi, e a carattere strettamente applicativo.

Valgano alcune esemplificazioni d'ovvio interesse, alcune delle quali del tutto nuove, occasionate da richieste da parte di Enti interessati.

1. - In vista d'elettroessiccazioni di « Opere monumentali fatiscenti », soggette ad umidità di massa e di superficie, si è studiato un elettrodispositivo da preferirsi in tali circostanze, (catodo circolare filiforme con anodo assiale), dando le soluzioni per le idropressioni.

2. - Lo stesso per bipolarità eteronoma, ad elettrodi cilindro-verticali, infissi nel terreno, adattabili in una molteplicità di casi, in ambiti limitati di terreno.

3. - Per la posa di una catena di ampi serbatoi di benzina, interrati in terreno umido e melmoso, (lungo le coste sud brasiliane), da bonificare e consolidare, agli effetti d'un sicuro sostentamento di notevoli carichi concentrati, si è escogitato un tipo di polielettrodi disposti in circonferenze concentriche. Polarità verticali omonome cortocircuitate, disposte in maniera simmetrica, lungo due cerchi, con anodi e catodi in ugual numero, o nel rapporto 2 : 1.

L'indagine è stata particolarmente laboriosa, ma a conclusione soddisfacente. Lo stesso potrebbe valere per silos interrati per missili, cavità da rendere asciutte e atte alla conservazione di materiale deperibile.

4. - Altro sistema polare da noi introdotto è un anodo orizzontale esteso, in mezzaria a più catodi laterali allineati parallelamente alla direzione dell'anodo.

Quest'esame fu occasionato a proposito di un importante problema, diverso dai precedenti e da quelli comunemente affrontati con l'EGO: la disidratazione, (altrimenti impossibile a conseguirsi), d'imponenti masse di limo (nella Sacca degli Scardovari, foce del Po), riaffioranti dopo il ritiro delle acque d'inondazione, od altro consimile.

Si tratta di materiale limo-argilloso, ad elevatissimo contenuto d'acqua e minima permeabilità che si dovrebbe riesumare con escavatori e bulldozer, per riportarlo agli argini demoliti, senza dover ricorrere ai costosi trasporti di terreno asciutto prelevabile altrove, a notevoli distanze. Non ci si può affidare, è ovvio, al lentissimo prosciugamento naturale, l'essiccazione per

insolazione o per drenaggio gravifico, come pur si è tentato. Si è pensato di ricorrere ai dreni di sabbia, ma date le difficoltà esecutive, e i costi, pare che quest'idea sia stata abbandonata.

Così pure non si dovrebbe più insistere, per la difesa arginale del Po, (come di altri importanti corsi d'acqua), a causa del progressivo disfacimento degli argini, franamento di scarpate, erosioni, esportazioni basali, correndo ai ripari con gabbioni, buzzoni, scogliere, paratie di preziosa fattura contenute pertanto in insignificanti volumi protettivi.

Giulio De Marchi, nel « Convegno sulla difesa del Suolo e le sistemazioni fluviali e montane, del 1952 (C.N.R.), così si esprime:

« I tragici eventi del Polesine hanno provocato un triste risveglio. La vastità dell'evento e la gravità dei danni recati, mettono inevitabilmente in discussione la tattica difensiva tradizionale, che non ha saputo e non ha potuto impedire il disastro ».

Più in là: « E d'altra parte un fatto accertato che le piene del Po sono andate progressivamente aumentando nel corso degli ultimi secoli, ed è pure certo che esse aumenteranno in avvenire ».

RESUME. — Nous avons calculé ici l'abaissement des tables d'eau dans les sols avec la méthode électrogeo-osmotique (EGO). Il y a, ici, tout un matériel analytique, (formules, etc.), qu'on peut utiliser dans les applications, reconstruction des électrobathymétries des niveaux d'eau, possibilité d'évaluer les quantités de liquide, extraible etc.

Nous avons examiné plusieurs dispositifs: électrodiodes, cathode circulaire et anode axiale; électrodes cylindriques; électrodes sur cercles concentriques; celles monoanodiques et bicathodiques, etc.

SUMMARY — The author calculates the decrease of the water surface in the ground by electrogeosmotical (EGO) method. The paper reports a set of analytical material (formulas etc.), which may be applied for reconstruction of the electrobatymetry of water levels, evaluation of amounts of water which can be dug out, etc.

Many devices have been examined, such as electrodiodes, cathode-circular ones with axial anode; cylindrical electrodes; single-anode and bi-cathode cells, etc.

§ 1. — Abbiamo dato una estesa teoria del fenomeno elettrogeosmotico (EGO) in terreno omogeneo, saturo d'acqua, in regime stazionario (e no), supponendo nel 1° caso che l'acqua tellurica si trovi su tutti gli anodi e catodi a prefissate pressioni  $H_A$ ,  $H_K$ . [1]

Scomparendo acqua agli anodi, la teoria schematizza condizioni di regime in cui agli anodi viene continuamente rifornita acqua dall'esterno. In pratica però, in regime stazionario, si è di fronte ad un flusso agli

anodi nullo, mentre la pressione idrica polare non è data dall'esterno essa si autostabilisce e può risultare diversa da anodo ad anodo. Svilupperemo qui ancora la teoria nell'ipotesi di un terreno omogeneo, con idropressione  $H_0$  all'infinito, una pressione estrattiva  $H_K$  comune a tutti i catodi agenti, un flusso nullo su ciascun anodo, (polielettrodi), conservando le costanti del terreno  $K, K_e, \rho$ , di permeabilità idrica, elettrica, di resistività elettrica. Mentre gli  $n_A$  anodi si portano al potenziale elettrico  $E_A$ , gli  $n_K$  catodi si porteranno al potenziale comune  $E_K$  (rispetto all'infinito).

Per un remispazio infinito, limitato orizzontalmente da una superficie, agli elettrodi reali bisognerà aggiungere, per le valutazioni dei campi, quelli fittizi, riflessi o immagini elettriche rispetto alla superficie del suolo.

Con gli indici latini  $i, j, \dots$  s'indicano le grandezze relative agli anodi, con indici greci  $\mu, \nu, \dots$  quelle relative ai catodi; mentre le  $\sum_i A, \sum_\mu K$ , s'intendono somme estese a tutti gli anodi e catodi sugli indici  $i, \mu$ .

Passiamo intanto al calcolo delle correnti e del campo elettrico già effettuato in [1], ma in forma leggermente diversa, per sviluppi applicativi particolari, come si vedrà in questo Studio.

#### CAMPI GEO-ELETTRICI E CORRENTI TELLURICHE ARTIFICIALI.

Sia:  $V(x, y, z)$  il potenziale elettrico in un punto generico,  $E = E_A - E_K$ , la differenza di potenziale (d.d.p.) agli elettrodi o tensione;  $J_i, J_\mu$ , le correnti parziali (singole) agli anodi e catodi per cui la corrente totale:

$$J = \sum_i J_i = \sum_\mu J_\mu \quad ; \quad J_i, J_\mu, \text{ date da:}$$

$$J_i = -\frac{1}{\rho} \int_{S_i} \frac{\partial V}{\partial n} dS_i, \quad J_\mu = \frac{1}{\rho} \int_{S_\mu} \frac{\partial V}{\partial n} dS_\mu \quad 1[1]$$

con  $S_i, S_\mu$  superfici dell' $i$ -esimo anodo e del  $\mu$ -esimo catodo,  $n$  normale (esterna) del relativo elettrodo.

La funzione  $V$  armonica, deve annullarsi all'infinito, assumere l'entità  $E_A, E_K$ , sugli anodi e catodi, soddisfare inoltre alle condizioni:

$$\sum_i \int \frac{\partial V}{\partial n} dS_i + \sum_\mu \int \frac{\partial V}{\partial n} dS_\mu = 0 \quad 1[2]$$

che per le 1[1], mostrano l'uguaglianza tra correnti catodiche e anodiche.

Si tratta di un noto, classico problema d'elettrostatica che si risolve facilmente.

I potenziali corrispondenti ad una carica unitaria sull' $i$ -esimo anodo e sul  $\mu$ -esimo catodo, con cariche nulle sugli altri conduttori, s'esprimino con:  $\phi_i, \phi_\mu(x, y, z)$ . Per il teorema di Gauss si ha ( $i \neq j, \mu \neq \nu$ ):

$$\left\{ \begin{array}{l} \int_{S_i} \frac{\partial \phi_i}{\partial n} dS_i = -4\pi, \quad \int_{S_\mu} \frac{\partial \phi_\mu}{\partial n} dS_\mu = -4\pi \\ \int_{S_i} \frac{\partial \phi_i}{\partial n} dS_i = \int_{S_\mu} \frac{\partial \phi_\mu}{\partial n} dS_\mu = \int_{S_j} \frac{\partial \phi_j}{\partial n} dS_j = \int_{S_\nu} \frac{\partial \phi_\nu}{\partial n} dS_\nu \end{array} \right. \quad 1[3]$$

I potenziali generati dall' $i$ -esima carica unitaria sull' $i$ -esimo conduttore siano:  $C_{ij}, C_{i\mu}, C_{\mu\nu}$ , tali che:

$$C_{ij} = C_{ji}, \quad C_{i\mu} = C_{\mu i}, \quad C_{\mu\nu} = C_{\nu\mu}$$

Questi coefficienti geometrici  $C_{ij} \dots$  ecc., studiati in (1), denotano « energie mutue », con dimensioni l'inverso di una lunghezza, mentre gli inversi di  $C_{ii}$  rappresentano, se i poli sono sufficientemente distanziati l'un l'altro, capacità elettrostatiche degli  $i$ -esimi conduttori. Ciò detto possiamo scrivere senz'altro la soluzione del problema:

$$V = (\sum_i s_i \phi_i - \sum_\mu s_\mu \phi_\mu) \quad 1[4]$$

Le nuove grandezze  $s_i, s_\mu$ , (da non confondere con  $S_i, S_\mu$ ), vengono determinate in base alle condizioni a cui devono soddisfare, e detto:

$$\alpha_A = E_A/E, \quad \alpha_K = E_K/E,$$

si perviene, per le determinazioni di  $s_i, s_\mu, \alpha_K, \alpha_A$ , al sistema:

$$\left\{ \begin{array}{l} \sum_j C_{ij} s_j - \sum_\nu C_{i\nu} s_\nu = \alpha_A \\ - \sum_j C_{\mu j} s_j + \sum_\nu C_{\mu\nu} s_\nu = \alpha_K \\ \alpha_A + \alpha_K = 1; \quad \sum_i s_i = \sum_\mu s_\mu, \end{array} \right. \quad (A)$$

di  $(n_A + n_K + 2)$  equazioni con altrettante incognite.

Il 1° gruppo di (A) dà le condizioni a che sull' $i$ -esimo anodo il potenziale sia uguale ad  $E_A$ , il 2° l'analoghe per i catodi, la penultima equazione deriva dalla definizione delle  $\alpha$ , l'ultimo gruppo dà le condizioni 1[2], tenuto conto delle 1[3] e 1[4].

Mentre le  $\alpha$  sono grandezze adimensionali,  $s_i, s_\mu$  comportano le dimensioni di una lunghezza (capacità elettrostatica in u.e.s.), rappresen-

tano le cariche sui singoli elettrodi (col segno cambiato sui catodi), quando tra il sistema degli anodi e quello dei catodi si stabilisce una d.d.p. uguale all'unità. La grandezza  $s$ , (di particolare importanza come si vedrà), definita dalla:

$$s = \frac{\sum_i s_i}{i} + \sum_{\mu} s_{\mu} \quad 1[5]$$

è la « capacità elettrostatica » del sistema considerato quale condensatore.

Il sistema (A) è fondamentale per la soluzione del problema. Dalle  $\alpha$  discendono i potenziali:

$$E_A = E a_A, \quad E_K = -E a_K \quad 1[6]$$

e mediante le  $s$ , le correnti, in virtù delle 1[1], 1[3] e 1[4]:

$$J_i = \frac{4\pi}{\rho} E \cdot s_i, \quad J_{\mu} = \frac{4\pi}{\rho} E \cdot s_{\mu}, \quad J = \frac{4\pi}{\rho} E \cdot s \quad 1[7]$$

Si dovrà dividere i valori di 1[7] per 2 considerando il suolo con superficie orizzontale.

Il coefficiente  $\rho/4\pi s$ , ( $\rho/2\pi s$  in superficie) denota la « resistenza elettrica » del sistema.

#### PRESSIONE E FLUSSI GEO-IDRICI.

Sia  $H(x, y, z)$  la pressione geidrostatica nel punto generico  $(x, y, z)$   $h(x, y, z) = H_0 - H(x, y, z)$  il dislivello di pressione rispetto a quella nel suolo, distante o all'infinito.

$h_K = H_j - H_K$  l'abbassamento della pressione idrica catodica,  $h_i = H_j - H_i$  l'analogo abbassamento idrico all'iesimo anodo,  $Q_{\mu}$  il flusso d'acqua all'iesimo catodo, mentre  $Q = \sum_{\mu} Q_{\mu}$  il flusso totale, dove è noto,  $Q_{\mu}$  è dato da:

$$Q_{\mu} = - \int_{S_{\mu}} \left( K \frac{\partial h}{\partial n} - K_e \frac{\partial V}{\partial n} \right) d S_{\mu}. \quad 1[8]$$

La depressione idrica  $h$ , di conseguenza anche  $(h - K_0/KV)$ , devono essere anch'esse funzioni armoniche e annullarsi all'infinito. Quest'ultima deve soddisfare a che i flussi anodici s'annullino, e cioè:

$$\int_{S_i} \left( \frac{\partial h}{\partial n} - \frac{K_e}{K} \frac{\partial V}{\partial n} \right) d S_i = 0 \quad 1[9]$$

assumere sui catodi i valori:

$$h_K - \frac{K_e}{K} E_K = h_K + \frac{K_e}{K} E \alpha_K \quad 1[10]$$

Il problema anche qui si risolve in maniera analoga a quella del potenziale. Una funzione armonica che soddisfi la 1[9], e si annulla all'  $\infty$  è data dalla:

$$h - \frac{K_e}{K} V = \sum_{\mu} X_{\mu} \phi_{\mu} \quad 1[11]$$

Per soddisfare la 1[10], le  $X_{\mu}$  si determinano dal sistema:

$$\sum_{\nu} C_{\mu\nu} X_{\nu} = h_K + \frac{K_e}{K} E \alpha_K \quad 1[12]$$

A fine di dare alla soluzione una forma analoga a quella relativa al potenziale, si pone:

$$X_{\mu} = t_{\nu} (h_K + \frac{K_e}{K} E \alpha_K) \quad 1[13]$$

dove per le  $t_{\nu}$  vale il sistema di  $n_K$  equazione in  $n_K$  incognita:

$$\sum_{\nu} C_{\mu\nu} t_{\nu} = 1 \quad [B]$$

Anche le  $t_{\nu}$  (dimensionalmente inversi di lunghezza), ammettono una semplice interpretazione fisica: sono cariche che si stabiliscono sui catodi quando il sistema di questi ultimi viene portato al potenziale uguale all'unità, lasciando isolati gli anodi. Calcolate le  $t_{\nu}$ , mediante il 2° sistema fondamentale [B], che dipende anch'esso solo dalle caratteristiche geometriche, (nel caso in cui le distanze anodi-catodi sono grandi rispetto alle loro dimensioni nella direzione delle distanze, esse sono praticamente indipendenti dalla disposizione degli anodi), si può mediante le 1[4], 1[11], 1[13] determinare la depressione ( $h$ ), che risulta pertanto:

$$h = \begin{cases} \frac{K_e}{K} E \sum_i s_i \phi_i + \sum_{\mu} [h_K t_{\mu} - \frac{K_e}{K} E (s_{\mu} - \alpha_K t_{\mu})] \phi_{\mu} = \\ = h_K \sum_{\mu} t_{\mu} \phi_{\mu} + \frac{K_e}{K} E [\sum_{\mu} s_i \phi_i - \sum_K (s_{\mu} - \alpha_K t_{\mu}) \phi_{\mu}] \end{cases} \quad 1[14]$$

Per esplicitare gli abbassamenti ( $h_i$ ) agli anodi, (dove la  $h$  assume i valori più alti), introduciamo le grandezze adimensionali ( $\beta_i$ ), definite mediante:

$$\beta_i = \sum_{\mu} C_{i\mu} t_{\mu}, \quad 0 < \beta_i < 1 \quad [C]$$

potenziali degli anodi isolati, quando i catodi sono portati ai potenziali uno, per cui ( $0 < \beta_i < 1$ ).

Tenendo conto delle  $[A]$ ,  $[B]$ ,  $[C]$ , segue dalla 1[14]:

$$h_i = \beta_i h_K + \frac{K_e}{K} E (a_A + \beta_i a_K) \quad 1[15]$$

Come si vede se le  $\beta_i$  differiscono tra di loro, anche le  $h_i$  differiranno tra di loro. Siccome  $h_i$  aumenta con  $\beta_i$ , se  $h_K > 0$ , converrà avvicinare gli anodi possibilmente ai catodi, in quanto ciò fa esaltare le  $\beta_i$ , mentre qualora si pongono gli anodi molto lontani  $\beta_i = 0$ , e le  $h_i$ , indipendenti da  $h_K$ , si riducono a:

$$h_i = \frac{K_e}{K} E a_A = \frac{K_e}{K} E_A \quad 1[15']$$

(per ampia spaziatura di poli eteronomi)

Rimane il calcolo dei flussi  $Q_\mu$  espressi dalle 1[8], che in virtù delle 1[3], 1[11], 1[13] si scrivono:

$$Q_\mu = 4 \pi (K h_K + K_e a_K E) t_\mu \quad 1[16]$$

Per anodi distanziati, le  $Q_K$  dipendono dalla loro disposizione essenzialmente attraverso il coefficiente  $a_K$ , e non attraverso  $t_\mu$ , coefficiente funzione invece solo dalla distribuzione dei catodi.

Se finalmente indichiamo con  $T$  la  $\sum t_\mu$ :

$$T = \sum t_\mu, \quad 1[17]$$

capacità del « sistema dei catodi », si ha per il flusso totale la espressione:

$$Q = 4 \pi (K h_K + K_e a_K E) T \quad 1[18]$$

#### DISPOSITIVO BIFILARE A MINIMO EMUNGIMENTO E FORTEMENTE DEPRESSIVO

Circa il significato delle 1[15] e 1[18] si può osservare che in stato di regime l'acqua viene emunta da zone lontane (prive perciò d'interesse), converrà realizzare un dispositivo polare per cui  $Q$  sia piuttosto piccolo, con  $h_i$  possibilmente alte, un dispositivo che con piccolo emungimento comporti nelle vicinanze un o stato di regime di prosciugamento, provocando nello stesso tempo accentuati abbassamenti piezometrici. Questo si realizza ponendo i catodi esterni agli anodi, il che fa diminuire  $a_K$ , e crescere ( $a_A = 1 - a_K$ ).

La convenienza d'aumentare  $\beta_i$  (avvicinare il più possibile anodi e catodi), dipenderà allora esclusivamente dalle relative grandezze ( $h_K$ ,

$\frac{K_e}{K} E$ ). Predominando  $h_K$ , e cioè l'effetto Darcy, o risultando  $h_K$  dello stesso ordine di  $(K_e E/K)$ , ne discende una notevole convenienza d'incrementare  $\beta_i$ , ossia avvicinare gli elettrodi eteronomi. Contrariamente, quando l'effetto elettrico predomina, permarrà sempre una certa convenienza di realizzare la bifilarità, ma in misura inferiore.

Si evidenziano caratteristiche d'un dispositivo noto col nome di « bifilare elettrodico » già oggetto, da parte nostra, di precedenti chiarimenti (2) e sviluppi.

§ 2. - Applicheremo quanto dedotto nel § 1. all'EGO stazionaria di una semplice « coppia bipolare eteronoma ».

Basta porre a questo scopo nelle espressioni generali dedotte: ( $\mu = 1, i = 2$ ). Ricordando che con gli indici  $K$  e  $A$  si denotano le grandezze che si riferiscono al catodo e all'anodo, porremo:

$$\begin{aligned} \phi &= \phi_K, & \phi_2 &= \phi_A, & C_{11} &= C_K, & C_{22} &= C_A, & C_{12} &= C \\ s_1 &= s_2 = s, & \beta_i &= \beta \end{aligned}$$

Anzitutto la soluzione del sistema [B] dà:

$$t = 1/C_K, \quad 2[1]$$

(capacità del catodo), da cui discende:

$$\beta = C/C_K. \quad 2[2]$$

Il sistema [A] diventa semplicemente:

$$(C_K - C) s = a_K, \quad (C_A - C) s = a_A, \quad a_A + a_{K=1} \quad [A']$$

che, risolto, dà:

$$\begin{cases} s = 1 / (C_A + C_K - 2 C) \\ a_K = (C_K - C) / (C_A + C_K - 2 C) \\ a_A = (C_A - C) / (C_A + C_K - 2 C) \end{cases} \quad 2[3]$$

Finalmente per le altre due grandezze; ( $s - t a_K$ ), ( $a_A + \beta a_K$ ), che compaiono nelle formule relative, si ha:

$$\begin{aligned} s - t a_K &= C/C_K (C_A + C_K - 2 C) = \beta s \\ a_A + \beta a_K &= (C_A C_K - C^2)/C_K (C_A + C_K - 2 C) = \gamma \leq 1 \end{aligned} \quad 2[4]$$

La tensione e la corrente, in superficie, diventano pertanto:

$$V = s E (\phi_A - \phi_K) \quad 2[5]$$

$$J = \frac{2\pi}{\rho} s E, \text{ (già diviso per 2)} \quad 2[6]$$

*Coppia polare eteronoma*

« L'abbassamento generico d'idropressione » sarà:

$$h = t h_K \phi_K + \frac{K_e}{K} E s (\phi_A - \beta \phi_K) \quad 2[7]$$

« L'abbassamento di pressione all'anodo »:

$$h_A = \beta h_K + \frac{K_e}{K} E \gamma, \quad 2[8]$$

formule generali queste per una « singola generica coppia polare eteronoma », posta sul terreno, in superficie.

Prima di proseguire rileviamo una conseguenza della 2[8], che a prima vista può sembrare paradossale. Il prosciugamento all'anodo raggiunge il massimo quando  $\gamma = 1$ , e cioè quando  $C_A$ , restando finite  $C_K, C$ , tende all'infinito. Questo significa che sembrerebbe conveniente ridurre al massimo la capacità anodica, impiegando cioè un cavo molto sottile.

Bisogna però tener presente che anzitutto in questo caso  $s$  diventa molto piccola, di conseguenza la corrente molto debole e il tempo necessario per raggiungere lo stato d'equilibrio piuttosto lungo. D'altronde quello che interessa non è solo prosciugare l'immediata adiacenza dell'anodo.

In un ambito limitato non decide la 2[8], ma solo la 2[7]. Ora sia  $\phi_A$  che  $\phi_K$ , per cavi filiformi, sono praticamente indipendenti dai loro diametri, che entrano a far parte della 2[7] solo attraverso  $t, s, \beta$ , (con  $t$ , che come sappiamo, rappresenta la capacità anodica,  $s$  la capacità mutua). Per ottenere quindi « forti prosciugamenti » in tutta la zona, conviene aumentare  $t$  e  $s$ , quindi i diametri polari.

Se si opera in condizioni in cui  $h_K$  è più grande di  $K_e/K E$ , (predomina l'effetto idraulico), è in primo luogo importante avere catodi di grande diametro, altrimenti sono tutti e due gli spessori che influiscono in egual misura. In questo 2° caso il prosciugamento è proporzionale all'intensità di corrente.

Quanto detto dimostra che non si deve generalizzare conclusioni della 2[8], la quale riguarda solo il prosciugamento in una zona limitatissima intorno all'anodo.

A proposito della 2[7] vogliamo ancora aggiungere che  $\phi_A$ , come detto nel § 1., rappresenta il potenziale d'una carica unitaria distribuita sull'anodo,  $\phi_K$  il potenziale d'una analoga carica distribuita sul catodo, quindi  $\phi_A$  predomina nella zona anodica,  $\phi_K$  in quella catodica.

Nella zona anodica, ammesso che  $h_K$ , e  $K_e/KE$ , siano dello stesso ordine di grandezza, predomina l'effetto Helmholtz, nella catodica quello Darcy. Le situazioni cambiano se  $h_K$ ,  $K_e/KE$  sono di diverso ordine di grandezza. Se  $h_K \gg K_e/KE$ , l'effetto Darcy prevale quasi ovunque, e la struttura dell'anodo ha poca influenza. Nel caso contrario prevale l'effetto elettrico, e la struttura del catodo non è del tutto indifferente. Infatti essa si fa sentire principalmente attraverso il coefficiente  $s$ , ma anche considerando il fenomeno ad intensità costante, (il che annulla l'effetto di  $s$  essendo  $J$  proporzionale ad  $s$ ), la struttura del catodo si risente in quella zona in cui  $\beta\phi_K$  è confrontabile con  $\phi_A$ .

Ciò implica che se si opera a « intensità costante » conviene allontanare il catodo della zona di prosciugamento, ammesso naturalmente che ( $h_K \ll K_e/KE$ ).

#### CATODO SUPERFICIALE CIRCOLARE, ANODO ASSIALE.

Si abbia un catodo metallico filiforme, (raggio  $d_K$ ), circolare, di raggio  $R$ , collocato sulla superficie orizzontale del suolo, mentre l'anodo sia un cavo verticale, (raggio  $d_A$ ), di lunghezza, attraversante con una estremità il centro del cerchio (v. Fig. 1).

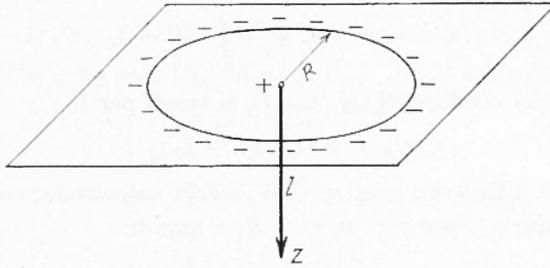


Fig. 1

Il riferimento sia un sistema di coordinate cilindriche con asse l'anodo,  $z$  la profondità,  $r$  la distanza dall'asse di un generico punto.

Siccome il calcolo esatto è estremamente difficile, si accontenteremo di un'approssimazione che presuppone gli elettrodi sufficientemente distanziati, tali da non disturbarsi a vicenda.

Lo studio di questo dispositivo è stato occasionato da problemi inerenti a prosciugamenti localizzati. Il criterio di impiegare « catodi raccorciati » rispetto agli anodi, e perfettamente legittimo (3), l'elettrodo negativo non solo si trova in condizioni agevoli d'aspirazione per l'afflusso idrico, ma ha potere vero e proprio aspirante, da sollevare il fluido (*elettrosmosi di superficie*).

Date le varie ipotesi su cui è basata tutta la teoria, quest'approssimazione è del tutto sufficiente: si riterrà cioè che  $\phi_A$  e  $\phi_K$  coincidono con i potenziali, in assenza degli elettrodi rimanenti, il che comporta errori solo sull'immediate vicinanze polari.

Il potenziale  $\phi_A$  di un cavo filiforme, lunghezza ( $2l$ ) (aggiunta l'immagine speculare), parallelo all'asse  $z$  con centro nell'origine, è dato dalla formula:

$$\phi_A = \frac{1}{2l} \lg \frac{\sqrt{(z+l)^2 + r^2} + (z+l)}{\sqrt{(z-l)^2 + r^2} + (z-l)}$$

Il potenziale del cerchio conduttore di carica unitaria deriva dalla teoria del potenziale, per cui:

$$\phi_K = \frac{1}{2\pi R} \int_0^{2\pi} (R^2 + z^2 + r^2 - 2Rr \cos \varphi)^{-1/2} R d\varphi, \quad 2[10]$$

ovvero:

$$\phi_K = \frac{2}{\pi} [(R+r)^2 + z^2]^{-1/2} \cdot K [2\sqrt{Rr/(R+r)^2 + z^2}], \quad 2[11]$$

ove:  $K(x)$  è il noto integrale ellittico di 1 specie estesamente tabellato:

$$K(x) = \int_0^{\pi/2} d\varphi / \sqrt{1 - x^2 \sin^2 \varphi} = \int_0^{\pi/2} dt / \sqrt{(1-t^2)(1-t^2x^2)}. \quad 2[12]$$

Passando ai coefficienti  $C_K$ ,  $C_A$ ,  $C$ , si trova per  $C_A$ :

$$C_A = l^{-1} \lg (4l/e d_A), \quad 2[13]$$

( $e$  = costante d'Eulero), mentre  $C$  si calcola sul catodo, come il valore cioè che assume  $\phi_A$  per  $z = 0$ ,  $r = R$ , e quindi:

$$C = \frac{1}{2l} \lg (\sqrt{l^2 + R^2} + l) / (\sqrt{l^2 + R^2} - l) = \frac{1}{l} \lg [(\sqrt{l^2 + R^2} + l)/R]. \quad 2[14]$$

Finalmente  $C_K$  si calcola come il valore che assume  $\phi_K$  sulla superficie del catodo. (Se l'argomento di  $K$  è molto vicino all'unità, si può usare l'approssimazione nota dalla teoria delle funzioni ellittiche:

$$K(x) \approx \lg 4 / \sqrt{1-x^2}, \quad x = 2\sqrt{Rr}/[(R+r)^2 + z^2] \quad 2[15]$$

argomento in questione, per cui:

$$1 - x^2 = [(R - r)^2 + z^2] / [(R + r)^2 + z^2].$$

Avendosi sul catodo:

$$(R - r)^2 + z^2 = d_K^2, \quad rR, \quad z = 0,$$

(piccolo spessore), si ha:  $1 - x^2 = d_K^2 / 4K^2$ , e quindi per la  $\phi_K$ , dalle 2[11] e 2[15] si trae:

$$C_K = \frac{1}{\pi R} \lg \frac{8R}{d_K}. \quad 2[16]$$

Mediante le 2[13], 2[15], 2[1], 2[4], si calcolano gli altri coefficienti. Gli spessori, come si vede, entrano solo nelle  $C_A$ ,  $C_K$ . Noti questi, la 2[7], per mezzo delle 2[9], 2[11], permette di valutare la diminuzione di pressione in ogni punto, e tracciare le conseguenti linee di livello:  $h_K = \text{cost}$ . Particolarmente semplici videntano le formule per ( $r = 0, z > l$ ), cioè per ambiti sotto l'anodo: infatti per  $z = 0$  si ha semplicemente:

$$\phi_A = \frac{1}{\gamma} [(z + l)/(z - l)], \quad 2[9']$$

$$\phi_K = 1/\sqrt{R^2 + z^2} \quad 2[11']$$

da cui, mediante la 2[7], si deduce la depressione «  $h$  » a diverse profondità  $z$  subanodiche, come da:

$$h = h_K / \sqrt{R^2 + z^2} + \frac{K_e}{K} E_s \left( \frac{1}{l} \frac{z + l}{z - l} - \frac{\beta}{\sqrt{R^2 + z^2}} \right), \quad 2[17]$$

con:

$$s = 1/(C_H + C_K - 2C), \quad \beta = C/C_K, \quad C_A = l^{-1} \lg(4l/e d_A),$$

$$C_K = \frac{1}{\pi R} \lg \frac{8R}{d_K}$$

$$C = l^{-1} \lg(\sqrt{l^2 + R^2} + l) / R, \quad h = \text{cost}. \quad 2[18]$$

### § 3. - BIPOLARITÀ AD ELETTRODI CILINDRICI VERTICALI.

Siano ora anodo e catodo costituiti da elettrodi singoli eteronomi verticali come in Fig. 2.

Il sistema d'assi di riferimento avrà il piano  $xy$  coincidente con la superficie orizzontale del terreno,  $z$  rivolto verso il basso, il catodo,

lunghezza  $l_K$ , raggio  $r_K$ , ( $l_K, r_K$ ) coincidente con l'asse  $z$ , mentre l'anodo ( $l_A, r_A$ ) parallelo al catodo ha le tracce ( $a, 0$ ) sul piano  $xy$ .

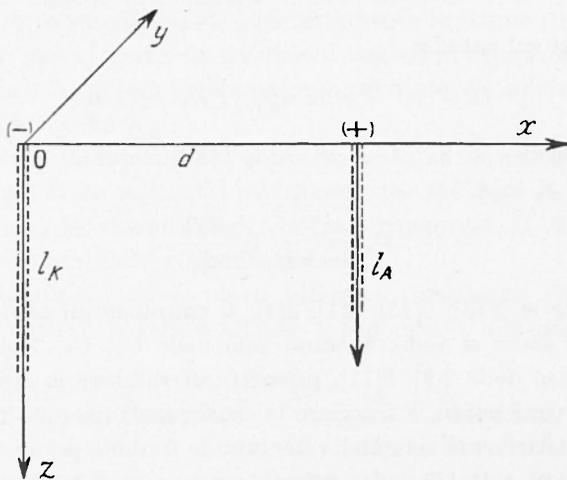


Fig. 2

Per i vari coefficienti nel caso d'elettrodi singoli, valgono le espressioni:

$$\left\{ \begin{array}{l} s = 1/(C_A + C_K - 2C), \\ \alpha_K = (C_K - C_s) s, \\ \beta = C/C_K, \end{array} \right. \quad \left\{ \begin{array}{l} t = 1/C_K \\ \alpha_A = (C_A - C_s) s \\ \gamma = (C_A C_K - C^2) t s, \end{array} \right. \quad 3[1]$$

Con:

$$C_K = V_K^{-1} \lg 4 l_K / e r_K, \quad C_A = V_A^{-1} \lg 4 l_A / e r_A \quad 3[2]$$

mentre la  $C$  s'esprime mediante la nota funzione  $\psi(x)$  (1):

$$\psi(x) = \lg(\sqrt{1 + 1/x^2} + 1/x) - (\sqrt{1 + x^2} - x) \quad 3[3]$$

assumendo la forma:

$$C = \frac{1}{2 l_A l_K} \{ l_A + l_K \} \psi(d/l_A + l_K) - (l_A - l_K) \psi(d/l_A - l_K) \} \quad 3[4]$$

che, per elettrodi di uguale lunghezza  $l_A = l_K = l$ , si semplifica nella:

$$C = l^{-1} \psi(d/2l) \quad 3[4']$$

Le 3[1], 3[2], 3[4], risolvono completamente il problema dei coefficienti, per cui noti quest'ultimi si deducono «corrente», «flusso idrico

totale », nonchè la « pressione all'anodo »:

$$J = 2\pi s E/\rho, \quad Q = 2\pi t(K h_K + K_e a_K E), \quad h_A = \beta h_K + \gamma \frac{K_e}{K} E \quad 3[5]$$

Finalmente per ottenere la distribuzione del potenziale  $V$  e dell'abbassamento di pressione  $h_K$ , sono necessarie le  $\phi_K$ ,  $\phi_A$ , che rappresentano potenziali d'elettrodi filiformi verticali, noti dalla teoria generale:

$$\left\{ \begin{array}{l} \phi_K = \frac{1}{2l_K} \lg \frac{\sqrt{(l_K + z)^2 + x^2 + y^2} + l_K + z}{\sqrt{(l_K - z)^2 + x^2 + y^2} - l_K + z} \\ \phi_A = \frac{1}{2l_A} \lg \frac{\sqrt{(l_A + z)^2 + (x-d)^2 + y^2} + l_A + z}{\sqrt{(l_A - z)^2 + (x-d)^2 + y^2} - l_A + z} \end{array} \right. \quad 3[6]$$

Mediante le 3[6] dunque si ottiene, in un punto generico:

$$\left\{ \begin{array}{l} V(x, y, z) = s E (\phi_A - \phi_K) \\ h(x, y, z) = t h_K \phi_K + s \frac{K_e}{K} E (\phi_A - \beta \phi_K) \end{array} \right. \quad 3[7]$$

In superficie ( $z = 0$ ), le 3[6] si semplificano leggermente, e diventano:

$$\left\{ \begin{array}{l} \phi_K = \frac{1}{l_K} \left[ (\lg \sqrt{l_K^2 + x^2 + y^2} + l_K) - \frac{1}{2} \log(x^2 + y^2) \right] \\ \phi_A = \frac{1}{l_A} \left[ (\lg \sqrt{l_A^2 + (x-d)^2 + y^2} + l_A) - \frac{1}{2} \lg\{(x-d)^2 + y^2\} \right] \end{array} \right. \quad 3[6']$$

#### § 4. - DISPOSITIVI PLURIPOLARI SU CIRCONFERENZE CONCENTRICHE.

La teoria del § 1. viene applicata, in questo paragrafo, a tre casi in cui la soluzione dei sistemi [A] e [B] si presenta in maniera particolarmente semplice: catodi ed anodi composti da tubi verticali, uguali per ogni tipo d'elettrodo, disposti in maniera simmetrica lungo due cerchi; anodi a catodi saranno o in ugual numero, o nel rapporto 2 : 1.

Sia le formule base per le varie grandezze, che quelle riguardanti  $C_{iK}$  sono state da noi date: (1).

Per renderle più agevoli, definiamo un certo tipo di  $\Sigma$  standard, introducendo per esse appositi simboli. Successivamente esprimiamo il potenziale di un sistema di fili verticali uguali, disposti lungo i vertici d'un poligono regolare, come anche alcune somme di  $C_{iK}$  relative a tale sistema, mediante le  $\Sigma$  considerate. Poi passeremo al calcolo delle varie espressioni relative alla teoria da noi sviluppata quando soddisfatte

certe condizioni di simmetria nei sistema d'elettrodi, e finalmente s'applicherenno i risultati così ottenuti al nostro problema specifico.

Procediamo dalla definizione delle  $\Sigma$ .

Sia  $\theta_n$  la grandezza angolare:  $\theta_n = 2\pi/n$ ,  $n < 1$ ; definiamo anzitutto con:

$$f_n(\varrho, \varphi, \zeta) = n^{-1} \sum_{i=0}^{n-1} (\lg \sqrt{\zeta^2 + \varrho^2 - 2\varrho \cos(\varphi - i\theta_n)} + \zeta). \quad 4[1]$$

in cui non è essenziale che la  $\Sigma$  venga estesa da 0 a  $n - 1$ , bastando estenderla da  $K$  a  $K + n - 1$ .

Posto: ( $K = -1$ ,  $K = -n + 1$ ), e confrontando l'espressioni così ottenute, dopo aver commutato l'indice  $i$  in  $j + 1$ , e in  $-j$ , rispettivamente in 4[1], s'ottengono le relazioni:

$$f_n(\varrho, \varphi + \theta_n, \zeta) = f_n(\varrho, \varphi, \zeta), \quad f_n(\varrho, -\varphi, \zeta) = f_n(\varrho, \varphi, \zeta).$$

In altre parole nel calcolo della  $f_n$  basta limitarsi ai  $\varphi$ :

$$0 \leq \varphi \leq \theta_n/2.$$

Per  $\varrho = 1$ ,  $\varphi = 0$ , la 4[1] diventa  $\infty$ , se  $\zeta \leq 0$ , a causa del termine  $i = 0$ . Definiamo in questo caso con  $\bar{f}_n(\zeta)$  la funzione che s'ottiene dalla 4[1] tralasciando il 1° termine:

$$\bar{f}_n(\zeta) = n^{-1} \sum_{s=1}^{n-1} \lg(\sqrt{\zeta^2 + 4 \operatorname{sen}^2 i \theta_n/2} + \zeta), \quad 4[3]$$

che si può anche esprimere come:

$$\bar{f}_n(\zeta) = \lim_{\varrho \rightarrow 1} [f_n(\varrho, 0, \zeta) - \frac{1}{n} \lg(\sqrt{\zeta^2 + (\varrho - 1)^2} + \zeta)]. \quad 4[4]$$

In seguito non useremo le  $f_n$ ,  $\bar{f}_n$ , ma ciò che deriva da esse, sottraendovi i valori  $f_n(\varrho, \varphi, 0)$ ,  $\bar{f}_n(0)$ , ottenendosi così più simmetria.

Per  $z = 0$  deduciamo  $f_n$  dalla 4[1]:

$$\begin{aligned} f_n(\varrho, \varphi, 0) &= \frac{1}{2n} \sum_{k=0}^{n-1} \lg(\varrho^2 - 2\varrho \cos K\theta_n + 1) = \\ &= \frac{1}{n} \lg \prod_{k=0}^{n-1} | \varrho e^{i\varphi} - e^{ik\theta_n} |, \end{aligned}$$

e dalla nota relazione algebrica:

$$\prod_{k=0}^{n-1} (x - e^{ik\theta_n}) = x^n - 1,$$

si ha:

$$f_n(\varrho, \varphi, 0) = \frac{1}{2n} \lg(\varrho^{2n} - 2\varrho^n \cos n\varphi + 1). \quad 4[5]$$

La  $\bar{f}_n(0)$  consegue dalle 4[4] e 4[5]:

$$\bar{f}_n(0) = n^{-1} \lim_{\varrho \rightarrow 1} \lg(\varrho^n - 1)/(\varrho - 1),$$

e applicando il teorema de l'Hospital:

$$\bar{f}_n(0) = n^{-1} \lg n. \quad 4[6]$$

Definiamo le somme standard:

$$F_n(\varrho, \varphi, \zeta) = f_n(\varrho, \varphi, \zeta) - f_n(\varrho, \varphi, 0); \quad \bar{F}_n(\zeta) = \bar{f}_n(\zeta) - \bar{f}_n(0), \quad 4[7]$$

o esplicitamente:

$$F_n(\varrho, \varphi, \zeta) = n^{-1} \left[ \sum_{i=0}^{n-1} (\lg \sqrt{\zeta^2 + \varrho^2 - 2\varrho \cos(\varphi - 2\theta_n) + i} + \zeta) - \frac{1}{2} \lg(\varrho^{2n} - 2\varrho^n \cos n\varphi + 1) \right]. \quad 4[8]$$

$$\bar{F}_n(\zeta) = n^{-1} \left[ \sum_{i=1}^{n-1} (\lg \sqrt{\zeta^2 + 4 \operatorname{sen}^2 i\theta_n/2 + \zeta}) - \lg n \right] \quad 4[8']$$

La ragione della preferenza della  $F_n$  rispetto alla  $f_n$ , sta nel fatto che in virtù delle relazioni:

$$f_n(\varrho, \varphi, \zeta) + f_n(\zeta, \varphi, -\zeta) = 2f_n(\varrho, \varphi, 0), \quad f_n(\zeta) + \bar{f}_n(-\zeta) = 2\bar{f}_n(0)$$

(che risultano immediatamente dalle 4[1] e 4[4]), le  $F_n$  e  $\bar{F}_n$  diventano funzioni dispari di  $\zeta$ .

Si ha cioè:

$$F_n(\varrho, \varphi, -\zeta) = -F_n(\varrho, \varphi, \zeta), \quad \bar{F}_n(-\zeta) = -\bar{F}_n(\zeta). \quad 4[9]$$

Le 4[6] limitano il calcolo a valori  $\zeta < 0$ . S'osservi inoltre che  $F_n$  soddisfa anche le 4[2].

Inoltre per  $\varphi = 0$ , nelle  $\Sigma$ , i termini sono a coppie uguali, quindi il numero dei termini praticamente si dimezza.

La  $F_n$  gode ancora di un'altra proprietà: infatti dalla 4[8] si ha:

$$F_n(\varrho, \varphi, \zeta) = F_n(1/\varrho, \varphi, \zeta/\varrho), \quad 4[10]$$

che permette di ridurre il calcolo della  $F_n$  ai valori  $\varrho \leq 1$ , ( $0 < \varrho \geq 1$ ).

La 4[10] suggerisce l'introduzione di un altro tipo di funzione, definendo con  $G_n(\varrho_1 \varrho_2 \varphi)$ , per  $\varrho_1, \varrho_2 \geq 0$ , la:

$$G_n(\varrho_1 \varrho_2 \varphi) = F_n(\varrho_1/\varrho_2, \varphi, 1/\varrho_2) = F(\varrho_2/\varrho_1, \varphi, 1/\varrho_1), \quad 4[11]$$

e in analogia:

$$\bar{G}_n(\varrho) = \bar{F}_n(1/\varrho). \quad 4[11']$$

La  $G_n$  oltre le 4[2] soddisfa la relazione di simmetria:

$$G_n(\varrho_1 \varrho_2 \varphi) = G_n(\varrho_2 \varrho_1 \varphi). \quad 4[10']$$

Mentre per avere i potenziali risultava più comoda la 4[8], per ottenere i coefficienti, la formula 4[11] pone più in evidenza la simmetria.

Molto semplice si presenta la  $F_n$  per  $\varrho = 0$ , e indicandola con  $F_n^0$  si ha semplicemente:

$$F_n^0(\zeta) = \log(\sqrt{\zeta^2 + 1} + \zeta) \quad 4[8'']$$

Per il calcolo dei coefficienti abbiamo bisogno di un'altra somma standard, che porremo mediante la:

$$H_n(\varrho_1 \varrho_2 \varphi) = \sum_{i=0}^{n-1} [\sqrt{\varrho_1^2 - 2\varrho_1 \varrho_2 \cos(\varphi - i\theta_n) + \varrho_2^2 + 1} - \sqrt{\varrho_1^2 - 2\varrho_1 \varrho_2 \cos(\varphi - i\theta_n) + \varrho_2^2}], \quad 4[12]$$

che gode anche delle proprietà 4[2] e 4[10].

Per  $\varrho_1 = \varrho_2$  si può calcolare la 2ª somma. Limitandosi a: ( $0 < \varphi < \theta_n$ ), (data la periodicità) si ha per quest'ultima:

$$2\varrho \left( \operatorname{sen} \frac{\varphi}{2} + \sum_{k=1}^{n-1} \operatorname{sen}(K\theta_n - \varphi)/2 \right) = 2\varrho \operatorname{sen} \frac{\varphi}{2} + \frac{\varrho}{i} e^{-i\varphi/2} \cdot \sum_{k=1}^{n-1} e^{ik\theta_n/2} - \frac{\varrho}{i} e^{i\varphi/2} \sum_{k=1}^{n-1} e^{-ik\theta_n/2}.$$

Ora s'osservi che essendo ( $\theta_n/2 = \pi/n$ ), si ha dalle note formule per la somma d'una serie geometrica:

$$\frac{1}{i} \sum_{k=1}^{n-1} e^{ik\theta_n/2} = -\frac{1}{i} \sum_{k=1}^{n-1} e^{-ik\theta_n/2} = \operatorname{ctg} \theta_n/4,$$

e quindi la suddetta somma diventa:

$$2\varrho \left( \operatorname{sen} \frac{\varphi}{2} + \operatorname{ctg} \frac{\theta_n}{4} \cos \frac{\varphi}{2} \right) = \frac{2\varrho}{\operatorname{sen} \theta_n/4} \cos \frac{1}{2} \left( \varphi - \frac{\theta_n}{2} \right).$$

Se si vuole ora togliere la limitazione ( $0 \leq \varphi \leq \theta_n$ ), occorre sostituire la  $\varphi$  con:

$$\bar{\varphi} = \varphi - [\varphi/\theta_n] \theta_n, \quad 4[13]$$

dove  $[x]$  da la parte intera di  $x$ , cioè il più grande numero intero minore o uguale ad  $x$ .

Esprimendo con  $H_n^*(\varrho, \varphi)$  il valore di  $H$  per  $\varrho_1 = \varrho_2 = \varrho$ , si ha:

$$H_n^*(\varrho, \varphi) = H_n(\varrho, \varrho, \varphi) = \sum_{i=0}^{n-1} \sqrt{2\varrho^2 [1 - \cos(\varphi - i\theta_n)] + 1} - \frac{2\varrho}{\text{sen } \theta_n/4} \cos \frac{1}{2} \left( \frac{\varphi}{\theta_n} - \frac{\theta_n}{2} \right). \quad 4[12']$$

Finalmente esprima  $K$  la differenza ( $G - H$ ), poniamo cioè:

$$K_n(\varrho_1 \varrho_2 \varphi) = G_n(\varrho_1 \varrho_2 \varphi) - H_n(\varrho_1 \varrho_2 \varphi) = F_n(\varrho_1/\varrho_2, \varphi, 1/\varrho_2) - H_n(\varrho_1 \varrho_2 \varphi) \quad 4[14]$$

$$K_n^*(\varrho, \varphi) = K_n(\zeta \varrho \varphi) = F_n(1, \zeta, 1/\varrho) - H_n^*(\zeta, \varrho) \quad 4[14']$$

$$\bar{K}_n(\varrho) = \bar{G}_n(\varrho) - H_n^*(\zeta, 0) + 1 = \bar{F}_n(1/\varrho) - H_n^*(\varrho, 0) + 1. \quad 4[14'']$$

Il  $(+1)$  nell'ultima formula proviene dall'aver tolto nella  $\Sigma$  per  $H_n$  il termine con  $i = 0$ .

Abbiamo già riportato varie espressioni che si riportano a due tipi standard di somme  $R_n$  e  $H_n$ .

Tutte, in quanto funzioni di  $\varphi$ , soddisfano le relazioni 4[2], e in quanto funzioni di  $\varrho_1$  e  $\varrho_2$ , la 4[10'].

Per il calcolo effettivo aggiungiamo 2 osservazioni di cui è bene tener conto:

1) come è già stato detto per  $\varphi = 0$  nelle varie somme compaiono termini uguali, e precisamente quelli con  $i$  e  $(n - i)$ , in questo caso per  $n$  pari tutti i termini risultano accoppiati, meno due ( $i = 0$ ,  $i = n/2$ ), per  $n$  dispari tutti meno uno ( $i = 0$ ).

2) Non conviene, nelle somme logaritmiche 4[8], 4[8'] determinare i singoli log per poi sommarli, ma eseguire il prodotto degli argomenti, e poi ricavarne il logaritmo.

Inoltre si vede anche che la  $F_n$  e analogamente le  $H_n$ ,  $H_n^*$ ,  $K_n$ ,  $K_n^*$  ( $\bar{F}_n$  esclusa) soddisfano la:

$$F_{2n} = \frac{1}{2} [F_n(\varrho, \varphi, \zeta) + F_n(\varrho, \varphi + \theta_{2n}, \zeta)], \quad \theta_{2n} = \theta_n/2. \quad 4[15]$$

Analoghe espressioni si possono ottenere per  $F_{3n}$ , ecc.

Passiamo ora ad applicare quanto dedotto al calcolo di certe grandezze legate ad un « sistema di cavi metallici polari verticali paralleli », in un sistema di coordinate cilindriche  $(r, \varphi, z)$ , con  $r$  distanza radiale dall'asse,  $z$  distanza (col segno) da un piano perpendicolare all'asse, (che in seguito verrà scelto come superficie terrestre), di un punto generico. Si abbia un sistema di fili di lunghezza  $2l$ , paralleli all'asse, i cui centri si trovano nel piano  $z = 0$ , sui vertici d'un poligono regolare a  $n$  lati, col centro nell'origine.

Le coordinate del centro dell' $i$ -esimo filo saranno date da  $(R, i\theta_n, 0)$ , se  $R$  è la distanza dall'asse dei singoli fili, e per la posizione del primo ( $i = 0$ ) poniamo  $\varphi = 0$ .

Vediamo il potenziale  $\phi_n(r, \varphi, z)$  in un punto generico del suolo quando ogni filo porta una carica  $1/n$ . Indicando con  $\varphi_i$  il potenziale relativo all' $i$ -esimo filo con carica unitaria, mentre gli altri non portano carica si ha:

$$\phi_n = n^{-1} \sum_{i=0}^{n-1} \varphi_i \quad 4[16]$$

Riteniamo, come si fa in generale, che la distribuzione della carica su un singolo conduttore non viene molto alterata dalla presenza degli altri, ipotesi generalmente soddisfatta, a meno che i conduttori di lunghezza molto varia si trovino vicini. Se però si tiene presente che anche le formule riguardanti un singolo elettrodo sono esatte per forma d'elissoidi di rotazione e non cilindriche, si vede che questa ipotesi non porta in pratica nessun errore d'ordine di grandezza superiore a quello già commesso per un singolo filo.

Le superfici ( $\varphi_i = \text{cost.}$ ) invece che elissoidi potranno essere qualche altro tipo di figura di rotazione; per fili sufficientemente lunghi e sottili simili a cilindri, nelle immediate vicinanze del filo, e non troppo prossimi all'estremità.

La teoria si applica esattamente a quest'ultime figure; essa tien conto degli effetti globali (attraverso i coefficienti  $C_{iK}$ ) dei fili uno sull'altro, e il campo così risultante sarà corretto, ad eccezione delle immediate vicinanze dei poli o delle loro estremità. Questo significa infine che per  $\varphi_i$ ,  $C_{iK}$ , possiamo usare le note formule.

Qualche dubbio rimane per le  $C_{ii}$ , (inversi delle capacità dei singoli fili), che possono leggermente variare rispetto ai loro valori « imperturbati ».

Però, come si vedrà appresso, esse compaiono sempre sommate alle altre  $C_{iK}$ , il che diminuisce un eventuale errore percentuale nei risultati,

essendo quest'ultimi sufficientemente attendibili. Ciò premesso ritorniamo alle 4[16]. Come è noto la  $\varphi_i$  ha la forma:

$$\varphi_i = \frac{1}{2l} \lg [\sqrt{(l+z)^2 + r_i^2} + (l+z)] / [\sqrt{(l-z)^2 + r_1^2} + (z-l)], \quad 4[17]$$

con:

$$r_i^2 = r^2 - 2Rr \cos(\varphi - i\theta_n) + R^2$$

Sostituendo la 4[17] nella 4[16], e confrontandola con la 4[1]:

$$\phi_n = \frac{1}{2l} [f_n(r/R, \varphi, (z+l/R) - f_n(r/R, \varphi, (z-l)/R)] \quad 4[18]$$

Dalle 4[18] e 4[17] si ha definitivamente:

$$\phi_n(r, \varphi, z) = \frac{1}{2l} \left[ F_n \left( \frac{r}{R}, \varphi, \frac{z+l}{R} - F_n \frac{r}{R}, \varphi, \frac{z-l}{R} \right) \right] \quad 4[19]$$

Introduciamo la:

$$\bar{C} = \frac{1}{n} \sum C_{oi} \quad 4[20]$$

$\sum$  dei coefficienti mutui d'un conduttore rispetto agli altri.

Nel passato (1) abbiamo derivato per due cavi paralleli di lunghezza  $2l$ , distanza  $d$ , situati alla stessa altezza:

$$C = l^{-1} \psi(d/2l) \quad 4[21]$$

con:

$$\psi(x) = \lg(\sqrt{1+x^2} + 1) / x - (\sqrt{1+x^2} - x) \quad 4[22]$$

$$\psi(x) \simeq \lg 2/xl, \quad x \ll 1; \quad \psi(x) \simeq 1/2x, \quad x \gg 1 \quad 4[22']$$

Con ciò la 4[20] diventa:

$$\bar{C} = l_n^{-1} \sum_{i=1}^{n-1} \psi(d_i/2l), \quad (d_i = 2R \sin i\theta_n/2) \quad 4[23]$$

Sostituendo la 4[22], e confrontando con le definizioni del § 2., si ottiene per la somma dei termini logaritmici:

$$l^{-1} [\bar{f}_n(2l/R) - \bar{f}_n(0)] = \frac{1}{2l} \bar{F}_n(2l/R) = \frac{1}{2l} \bar{G}_n(R/2l)$$

per quella degli altri, (la meno del segno):

$$l^{-1} [H_n(R/2l, 0) - 1]$$

Ricordando la definizione di  $\bar{K}_n$  si ha quindi, dopo la sottrazione:

$$\bar{C} = l^{-1} \bar{K}_n (R/2l) \quad 4[24]$$

Finalmente consideriamo un ulteriore conduttore parallelo di lunghezza  $2l'$ , centro nel punto  $(R^1, \psi, 0)$ , sia  $C$  la somma dei coefficienti mutui  $C_{iK}$  di questo conduttore rispetto al nostro sistema, tutto diviso per  $n$ .

Il coefficiente mutuo di una coppia di conduttori paralleli di lunghezza  $l, l'$ , distanza  $d$ , e con centri allo stesso livello, è stato dedotto in una precedente Nota (1):

$$C = \frac{1}{2ll'} [(l+l') \psi (d/(l+l')) - |l-l'| \psi (d/|l-l'|)] \quad 4[25]$$

Dalla 4[25] s'ottiene per la  $C$ :

$$C = \frac{1}{2ll'_n} [(l+l') \sum_{i=0}^{n-1} \psi (d_i/(l+l')) - |l-l'| \sum_{i=0}^{n-1} \psi (d_i/|l-l'|)] \quad 4[26]$$

con

$$d_i^2 = R^2 - 2Rl' \cos(\psi - i\theta_n) + l'^2$$

Procedendo come in precedenza, si perviene a:

$$C = \frac{1}{2ll'} \left[ (l+l') K_n \left( \frac{R}{l+l'}, \frac{R'}{l+l'}, \psi \right) - |l-l'| K_n \left( \frac{R}{|l-l'|}, \frac{R'}{|l-l'|}, \psi \right) \right]. \quad 4[27]$$

Per  $l = l'$  scompare il 2° termine, e la precedente diventa semplicemente:

$$C = \frac{1}{l} K_n (R/2l, R'/2l, \psi). \quad 4[27']$$

Per  $R = R'$ , le 4[27], 4[27'] si semplificano:

$$C = \frac{1}{2ll'} \left[ (l+l') K_n^* \left( \frac{l}{l+l'}, \psi \right) - |l-l'| K_n^* \left( \frac{R}{|l+l'|}, \psi \right) \right], \text{ per } R = R', \psi \neq 0 \quad 4[28]$$

$$C = \frac{1}{l} K_n^* (R/2l, \psi), \text{ per } l = l', \psi \neq 0. \quad 4[28']$$

Disponiamo così di tutti gli elementi necessari per i calcoli successivi, mediante le sommatorie standard del § 1.

Passiamo ora dalle formule della teoria generale ad una forma adatta alle situazioni che considereremo.

Si abbia un sistema di  $n_A$  anodi, e di  $n_K$  catodi, uguali tra di loro.

Ogni elettrodo si trovi nella stessa posizione rispetto agli altri, il che vuol dire che mediante movimenti e riflessioni si può portare ogni polo al posto di ciascun altro omonimo, e il sistema rimane invariato.

In queste condizioni tutti gli anodi, e anche i rispettivi catodi saranno percorsi dalla stessa corrente, presentando le stesse pressioni ecc. I casi in cui queste condizioni sono soddisfatte non sono molti (come quelli considerati in seguito), però spesso le condizioni saranno sufficientemente approssimate in dispositivi pratici.

Indipendentemente dai valori  $i$ ,  $\mu$ , si ha per  $s$ ,  $t$ :

$$s_i = s_A = s/n_A, \quad s_\mu = s_K = s/n_K, \quad t_\mu = T/n_K, \quad \beta_\mu = \beta \quad 4[29]$$

Indichiamo con  $C_A$ ,  $C_K$ ,  $C$  le grandezze:

$$\left\{ \begin{array}{l} C_A = \frac{1}{n_A^2} \sum_i^A \sum_\mu^A C_{iK}, \\ C_K = \frac{1}{n_K^2} \sum_\mu^K \sum_\nu^K C_{\mu\nu} \\ C = \frac{1}{n_A n_K} \sum_i^A \sum_\mu^K C_{i\mu} \end{array} \right. \quad 4[30]$$

( $C_A$ ,  $C_K$ ,  $C$ ) rappresentano i valori medi dei vari coefficienti di semplice significato fisico:  $C_A$  potenziale dell'anodo con carica globale unitaria, e carica nulla al catodo, così  $C_K$ ;  $C$  invece potenziale catodico (anodico) determinato da una carica unitaria sull'anodo (catodo), con catodo (anodo) scarico. Cosicché ( $C_A$ ,  $C_K$ ,  $C$ ), sono i coefficienti riferiti al catodo e all'anodo come unità complessive. Queste spiega perché le formule del seguito sono identiche (salvo scambio  $s$  con  $S$ ,  $t$  con  $T$ ) a quelle date in precedenza.

Data la simmetria del sistema si ha:

$$\left\{ \begin{array}{l} \sum_K^A C_{iK} = n_A C_A, \quad \sum_K^A C_{\mu K} = n_A C \\ \sum_\nu^K C_{i\nu} = n_K C, \quad \sum_\nu^K C_{\mu\nu} = n_K C_K \end{array} \right. \quad 4[31]$$

indipendentemente da  $i$  ed  $\mu$ .

Dalle 4[29] e 4[31] deriva che i sistemi [A] e [B] assumono la forma:

$$(C_A - C)S = a_A, \quad (C_K - C)S = a_K, \quad a_K + a_A = 1 \quad [A']$$

$$C_K T = 1 \quad [B']$$

da cui:

$$T = 1/C_K \quad 4[32]$$

mentre la risoluzione delle  $[A']$  dà:

$$S = 1/(C_A + C_K - 2C), \quad \alpha_A = \frac{C_A - C}{C_A + C_K - 2C}, \quad \alpha_K = \frac{C_K - C}{C_A + C_K - 2C} \quad 4[33]$$

Per la grandezza  $\beta$  discende:

$$\beta = C/C_K \quad 4[34]$$

Inoltre:

$$s - \alpha_K T = \beta S. \quad 4[35]$$

Scriviamo ancora:

$$\phi_A = \frac{1}{n_A} \sum_i \phi_i, \quad \phi_K = \frac{1}{n_K} \sum_\mu \phi_\mu \quad 4[36]$$

$(\phi_A, \phi_K)$ , potenziali generati da cariche globali unitarie sull'anodo e sul catodo. Si ottiene allora per il potenziale  $V$ :

$$V = ES(\phi_A - \phi_K) \quad 4[37]$$

e per l'abbassamento  $h$  del livello idrotellurico:

$$h = h_K T \phi_K + E \frac{K_e}{K} S(\phi_A - \beta \phi_K). \quad 4[38]$$

L'abbassamento idrico all'anodo è dato, come nel caso generale, dalla:

$$h_A = \beta h_K + \frac{K_e}{K} E (\alpha_A + \beta \alpha_K). \quad 4[39]$$

Il problema si riduce a determinare i coefficienti  $C_A, C_K, C$  nonché le funzioni  $\phi_A, \phi_K$ .

Le varie osservazioni fatte a principio valgono anche qui, salvo tener presente che ora  $C_A, C_K, C$ , si riferiscono a grandezze globali.

Ciò provoca anzitutto che con l'infittire il numero di elettrodi l'effetto del diametro o spessore diminuisce, dato che in  $C_A$  solo un termine  $C_u$  dipende da quest'ultimo. In più da 4[38] discende che conviene diminuire  $C_A/C_K$ , (a tensione costante purchè  $C_A + C_K$  è costante), o ad intensità costante se predomina l'effetto elettromotico, (il che significa un aumento della capacità elettrostatica anodica).

La più importante differenza consiste però in un altro particolare: precedentemente per diminuire l'effetto del termine negativo della 4[38], l'unica possibilità era allontanare il catodo e avvicinare l'anodo alla zona interessata. L'allontanamento del catodo aveva un effetto però negativo sia sul termine in  $h_K$  (effetto Darcy), sia sul diminuire di  $s$  (aumento della resistenza), impiccolendosi così spesso anche l'effetto Helmholtz.

Con molti elettrodi si può però aumentare notevolmente  $s$ , quando gli elettrodi di nome opposto sono vicini, e dello stesso ordine di grandezza di  $C_A$ ,  $C_K$ , il che non avviene per una singola coppia. Il forte incremento della conduttanza provocato dagli elettrodi di nome opposto può, oltre rendere il processo più veloce, avere anche effetti favorevoli sull'abbassamento  $h$ .

Naturalmente debbono rimanere sempre vigenti le due condizioni: collocare i catodi esterni agli anodi, tentare d'aumentare la capacità elettrostatica del sistema anodico (diminuire  $C_A$ ).

Incrementando le dimensioni degli anodi, si aumenta sia  $s$  (diminuisce la resistenza) e impiccolisce  $\bar{\rho}$ , cioè l'effetto del termine nocivo nella 4[38].

Per quel che riguarda la corrente, essa è costantemente data da:

$$J = \frac{2\pi}{\varrho} s E. \quad 4[40]$$

Consideriamo infine « tre situazioni particolari » di un sistema elettrodo che soddisfa esattamente le condizioni di cui al § 3.

Per poter applicare le formule li esplicitate basta che ci limitiamo a valutare ( $C_A$ ,  $C_K$ ,  $C$ ) ed esplicitare  $\phi_A$ ,  $\phi_K$ .

A questo scopo ci serviranno le formule derivate nel § 2. mediante l'espressione del § 1.

Si scelga come piano  $z = 0$  la superficie del suolo con l'asse  $z$  rivolto in basso, in un sistema di coordinate cilindriche  $r$ ,  $\varphi$ ,  $z$ . Gli elettrodi siano composti di cavi filiformi verticali infissi nel terreno affioranti con un'estremità alla superficie del suolo.

Tutti i catodi di lunghezza  $l_K$ , diametro  $2d_K$  siano a distanza  $R_K$  dall'asse  $z$ , mentre ( $l_A$ ,  $d_A$ ,  $R_A$ ), abbiano l'analogo significato per gli anodi. Porremo:

$$\delta_K = \lg 4 l_K / e d_K, \quad \delta_A = \lg 4 l_A / e d_A \quad 4[41]$$

che rappresentano i coefficienti  $C_{\mu\mu}$ ,  $C_{ii}$ , a meno di un fattore ( $1/l_K$ ,  $1/l_A$ ) rispettivamente.

Si ricordi che per ottenere ( $\phi$ ,  $C$ ) bisogna aggiungere la parte immagine degli elettrodi, cioè la loro lunghezza viene considerata ( $2l_A$ ,  $2l_K$ ).

Circa il numero e la disposizione degli elettrodi considereremo 3 casi:

A)  $n_A = n_K = n$ , sia gli anodi che i catodi sono collegati ai vertici di un poligono regolare a  $n$  lati, sfasati d'un angolo  $\psi$  uno rispetto all'altro. Le coordinate dell'estremità dei catodi siano ( $R_K$ ,  $i\theta_n$ , 0),

$i = 0, \dots, n - 1$ , quelle degli anodi  $(R_A, \psi + i\theta_n, 0)$ ,  $i = 0, \dots, n - 1$ , con  $0 \leq \psi \leq \theta_n$ .

B):  $n_A = 2n$ ,  $n_K = n$ , i catodi sono disposti come sopra, mentre agli anodi s'aggiunge un 2° sistema sfasato di  $(-\psi)$  rispetto al sistema dei catodi.

Le coordinate dell'estremità sono ora date da:

$$(R_K, i\theta_n, 0), i = 0, \dots, n - 1, \text{ per i catodi, } (R_A, \pm\psi + i\theta_n, 0), \\ i = 0, \dots, n - 1, \text{ con } 0 < \psi < \theta_n/2, \text{ per gli anodi.}$$

$$\text{C): } n_A = n, \quad n_K = 2n$$

La disposizione è quella che si ottiene dalla precedente, scambiando tra di loro i ruoli di catodi e anodi.

Le coordinate dell'estremità sono allora date per i catodi da:

$$(R_K, \pm\psi + i\theta_n, 0), i = 0, \dots, n - 1, \text{ con } 0 < \psi < \theta_n,$$

per gli anodi da:

$$(R_A, i\theta_n, 0).$$

Passiamo anzitutto ad esprimere le  $(\phi_A$  e  $\phi_K)$  determinate mediante la 2[19] e dalla definizione 3[42].

Si perviene nei tre casi a:

A)

$$\left\{ \begin{array}{l} \phi_K = \frac{1}{2l_K} \left[ F_n \left( \frac{r}{R_K}, \varphi, \frac{z+l_K}{R_K} \right) - F_n \left( \frac{r}{R_K}, \varphi, \frac{z-l_K}{R_K} \right) \right] \\ \phi_A = \frac{1}{2l_A} \left[ F_n \left( \frac{r}{R_A}, \varphi - \psi, \frac{z+l_A}{R_A} \right) - F_n \left( \frac{r}{R_A}, \varphi - \psi, \frac{z-l_A}{R_A} \right) \right] \end{array} \right. \quad [43]_a$$

B)

$$\left\{ \begin{array}{l} \phi_K = \frac{1}{2l_K} \left[ F_n \left( \frac{r}{R_K}, \varphi, \frac{z+l_K}{R_K} \right) - F_n \left( \frac{r}{R_K}, \varphi, \frac{z-l_K}{R_K} \right) \right] \\ \phi_A = \frac{1}{4l_A} \left[ F_n \left( \frac{r}{R_A}, \varphi - \psi, \frac{z+l_A}{R_A} \right) + F_n \left( \frac{r}{R_A}, \varphi + \psi, \frac{z+l_A}{R_A} \right) - \right. \\ \left. - F_n \left( \frac{r}{R_A}, \varphi - \psi, \frac{z-l_A}{R_A} \right) - F_n \left( \frac{r}{R_A}, \varphi + \psi, \frac{z-l_A}{R_A} \right) \right] \end{array} \right. \quad [43]_b$$

C)

$$\left\{ \begin{array}{l} \phi_K = \frac{1}{4l_K} \left[ F_n \left( \frac{r}{R_K}, \varphi - \psi, \frac{z+l_K}{R_K} \right) - F_n \left( \frac{r}{R_K}, \varphi + \psi, \frac{z+l_K}{R_K} \right) - \right. \\ \left. - F_n \left( \frac{r}{R_K}, \varphi - \psi, \frac{z-l_K}{R_K} \right) - F_n \left( \frac{r}{R_K}, \varphi + \psi, \frac{z-l_K}{R_K} \right) \right] \\ \phi_A = \frac{1}{2l_A} \left[ F_n \left( \frac{r}{R_A}, \varphi, \frac{z+l_A}{R_A} \right) - F_n \left( \frac{r}{R_A}, \varphi, \frac{z-l_A}{R_A} \right) \right] \end{array} \right. \quad [43]_c$$

Le  $\phi_A$  di B) e  $\phi_K$  di C) si semplificano per:

$$\psi = \frac{1}{2} \theta_{2n} = \theta_{4n} \left( = \frac{\pi}{2n} \right).$$

Infatti, in virtù della 4[15] si ha:

$$\phi_A = \frac{1}{2l_A} \left[ F_{2n} \left( \frac{r}{R_A}, \varphi - \theta_{4n}, \frac{z+l_A}{R_A} \right) - F_{2n} \left( \frac{r}{R_A}, \varphi - \theta_{4n}, \frac{z-l_A}{R_A} \right) \right] \quad 4[43'] \text{ B)}$$

$$\phi_K = \frac{1}{2l_K} \left[ F_{2n} \left( \frac{r}{R_K}, \varphi - \theta_{4n}, \frac{z+l_K}{R_K} \right) - F_{2n} \left( \frac{r}{R_K}, \varphi - \theta_{4n}, \frac{z-l_K}{R_K} \right) \right] \quad 4[43'] \text{ C)}$$

In superficie ( $z = 0$ ), per la 4[9], i termini col segno negativo danno lo stesso contributo di quelli col segno positivo, e quindi le formule precedenti si riducono al primo e ai primi due termini moltiplicati per due.

Per  $r = 0$ , cioè sull'asse centrale in virtù della 4[8''], le  $\phi$  diventano indipendenti da  $n$ , e si ha in generale:

$$\left\{ \begin{array}{l} \phi_A^0 = \frac{1}{2l_A} \lg \frac{\sqrt{(z+l_A)^2 + R_A^2} + z + l_A}{\sqrt{(z-l_A)^2 + R_A^2} + z - l_A} \\ \phi_K^0 = \frac{1}{2l_K} \lg \frac{\sqrt{(z+l_K)^2 + R_K^2} + z + l_K}{\sqrt{(z-l_K)^2 + R_K^2} + z - l_K} \end{array} \right. \quad [44]$$

Nell'origine, cioè ( $\phi_A$  e  $\phi_K$ ), si valutano come il potenziale di un singolo catodo e d'un singolo anodo di lunghezza  $l_K, l_A$ , a distanze rispettive  $R_K, R_A$ .

La principale differenza (per  $r = 0$ ) tra questo caso e quello di una coppia, sta nei coefficienti che passiamo ora ad esprimere.

Il calcolo delle ( $C_A, C_K, C$ ), si basa sulle 4[31], e sulle formule del § 2.

Precisamente per quel che riguarda le ( $C_A, C_K$ ) sulla 4[24] per A), e sulle 4[24] e 4[28'] per B) e C), tenendo conto dei valori

$$C_{\mu} = \delta_A/l_A, \quad C_{\mu\mu} = \delta_K/l_K$$

per quel che riguarda invece la C) sulle 4[27]. Si perviene a:

$$\left\{ \begin{array}{l} C_K = \frac{1}{l_K} \left[ \frac{\delta_K}{n} + \bar{K}_n \left( \frac{R_K}{2l_K} \right) \right] \\ C_A = \frac{1}{l_A} \left[ \frac{\delta_A}{n} + \bar{K}_n \left( \frac{R_A}{2l_A} \right) \right] \end{array} \right. \quad 4[45] \text{ A)}$$

B)

$$\left\{ \begin{array}{l} C_K = \frac{1}{l_K} \left[ \frac{\delta_K}{n} + \bar{K}_n \left( \frac{R_K}{2l_K} \right) \right] \\ C_A = \frac{1}{2l_A} \left[ \frac{\delta_A}{n} + \bar{K}_n \left( \frac{E_A}{2l_A} \right) + K_n^* \left( \frac{R_K}{2l_K}, 2\psi \right) \right] \end{array} \right. \quad 4[45] \text{ B}$$

C)

$$\left\{ \begin{array}{l} C_K = \frac{1}{2l_K} \left[ \frac{\delta_K}{n} + \bar{K}_n \left( \frac{R_K}{2l_K} \right) + K_n^* \left( \frac{R_K}{2l_K}, 2\psi \right) \right] \\ C_A = \frac{1}{l_A} \left[ \frac{\delta_A}{n} + \bar{K}_n \left( \frac{R_A}{2l_A} \right) \right] \end{array} \right. \quad 4[45] \text{ C}$$

mentre C) è comune a tutti e 3 i casi:

$$C = \frac{1}{2l_A l_K} \left[ (l_A + l_K) K_n \left( \frac{R_K}{l_A + l_K}, \frac{R_A}{l_A + l_K}, \psi \right) - |l_A - l_K| K_n \left( \frac{R_K}{|l_A - l_K|}, \frac{R_A}{|l_A - l_K|}, \psi \right) \right] \quad 4[46]$$

che per ( $l_A - l_K = l$ ), si semplifica:

$$C = \frac{1}{l} \bar{K}_n \left( \frac{R_K}{2l}, \frac{R_A}{2l}, \psi \right) \quad 4[40']$$

Nel già menzionato caso di ( $2\varphi = \theta_{2n}$ ), che risponde alla condizione in cui si ha il sistema più numeroso di poli (disposti in vertici di un poligono di  $2n$  lati) si possono semplificare le 4[45], per B) e C) che diventano:

Caso B.

$$C_A = \frac{1}{l_A} \left[ \frac{\delta_A}{2n} + \bar{K}_{2n} \left( \frac{R_A}{2l_A} \right) \right] \quad 4[45'] \text{ B}$$

Caso C.

$$C_K = \frac{1}{l_K} \left[ \frac{\delta_K}{2n} + \bar{K}_{2n} \left( \frac{R_K}{2l_K} \right) \right] \quad 4[45'] \text{ C}$$

Con ciò si possono ricavare tutte le grandezze richieste nel paragrafo precedente.

Dalla struttura delle formule non è possibile prevedere facilmente l'influenza combinata dei vari fattori, (il che richiederebbe computi numerici), perciò ci accontenteremo di qualche osservazione.

Crescendo  $n$  l'influenza degli spessori decresce come si vede dalla presenza dei fattori  $1/n$  nei termini contenuti  $\delta_A$ ,  $\delta_K$ , tale influenza si mostrerà trascurabile se le  $\bar{K}_n$  diverranno preponderanti. Le  $\psi$  che in

[B] e [C] rendono  $C_A$ ,  $C_K$ , più bassi, sono i valori  $\psi = 1/2 \theta_{2n}$ ,  $(\pi/2n)$ , che corrispondono al caso speciale, mentre  $C$ , per  $n$  sufficientemente alto, e  $R_A$  e  $R_K$  non troppo vicini, dipendono poco da  $\psi$ .

Ora allorché è preponderante la componente idraulica siamo principalmente interessati d'aumentare  $T$ , cioè diminuire  $C_K$ , mentre se è preponderante l'elettrica abbiamo convenienza d'aumentare  $s$ , e diminuire il rapporto  $C_A/C_K$ .

Nel primo caso la struttura degli anodi interessa poco, l'interesse è concentrato sui catodi, i quali più numerosi sono, meglio è.

Comunque risulta conveniente, in [B] e [C] scegliere il caso speciale menzionato (non solo perché si semplificano i calcoli). Qualora prevalga l'effetto elettrico, la questione diventa più complessa.

Limitandoci a considerare la zona centrale ( $r \sim 0$ ), con anodi all'interno, ( $R_A < R_K$ ), occorre accordare parecchie esigenze: 1) rendere  $s$  possibilmente grande, 2)  $C_A/C_K$  piccolo, 3) eventualmente anche  $\phi_K$  piccola.

Ora per  $n$  sufficientemente grande le varie grandezze non dipendono molto da  $n$ . L'esigenza 2) si può soddisfare rendendo  $l_A$  grande rispetto  $l_K$  che a certe profondità favorisce anche [B], ma non la 1). In questa si ha interesse d'aumentare  $C$ , per cui è più favorevole avere  $l_A = l_K$ , annullando così il termine negativo.

Per favorire la 1) conviene rendere più vicini possibile  $R_A$  e  $R_K$ , però con ciò s'aumenta  $\phi_K$  (con  $R_A$  fisso).

Pare però dall'analogia col « doppio strato » che qui l'aumento di  $s$  dovrebbe compensare quello di  $\phi_K$ , e se si considera che innalzare  $s$  significa anche accelerare il processo aumentando l'intensità, parrebbe favorevole porre  $R_K$ ,  $R_A$  vicini.

Per quanto riguarda il rapporto  $l_A/l_K$ , occorrerebbero alcuni calcoli per decidere se diminuendo  $l_K$  (impiego di catodi) poco profondi, la conseguente diminuzione di  $s$  è sufficientemente compensata da altri fattori, non ultimo quello economico. Necessario d'altra parte è, per conseguire effetti di profondità, disporre anodi profondi, quindi  $l_A$  è condizionata dall'esigenza di raggiungere certe profondità.

Lo stesso ragionamento parrebbe dare la preferenza tra gli schemi B e C al primo, mentre con la preponderanza dell'effetto Darcy, il secondo è senz'altro da preferirsi. Però anche qui la velocità del processo dipende, almeno all'inizio da  $s$ , essendo all'inizio dell'elettroprosciugamento sempre preponderante la componente elettrica.

Quindi  $s$  sembra costituire se non l'unica, una delle più importanti grandezze di cui tener conto: v. 4[33].

§ 5. - EGO IN UN TERRENO INDEFINITO A SEZIONE RETTANGOLARE.

Si abbia una porzione di terreno (Fig. 3) indefinita nel senso  $z$ , delimitata dai piani:  $x = \pm a/2$ ,  $y = 0$ ,  $y = b$ .

In questo terreno prismatico si applichi un sistema di elettrodi, di cui uno orizzontale: lungo  $z$ , l'altro, eteronoma, una coppia di piastre discoste, cortocircuitate tra loro, formanti i due lati  $x = \pm a/2$  del parallelepipedo.

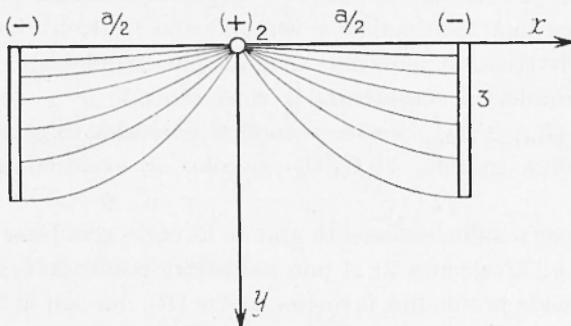


Fig. 3

Il dispositivo reoforo superficiale simmetrico rispetto ad una coppia d'elettrodo verticale eteronoma è stato da noi escogitato in occasione di un progetto di prosciugamento (Scardovari) di massa limosa emersa dopo un'inondazione.

È un tipo nuovo polare ad alto rendimento in quanto basta stendere l'anodo per una lunghezza che si desidera, senza opera costosa d'installazione con pozzi.

Tutte le grandezze fisiche (corrente, portata, flusso totale), si ri-terranno in seguito riferite all'unità di lunghezza, in direzione di  $z$ . In questo modo la teoria si potrà applicare approssimativamente a porzioni finite parallelepipedo (blocchi di limi), salvo poi moltiplicare, occorrendo, le grandezze relative intensive per gli spessori.

Ci si riferirà nei calcoli successivi, alla figura che si ottiene dalla precedente, completando il rettangonolo mediante la sua immagine riflessa sul piano  $y = 0$ , in maniera appunto da condurre i calcoli nel rettangolo delimitato dalla retta  $x = \pm a/2$ ,  $y = \pm b$ .

Il problema, indipendente da  $z$ , verrà trattato in modo completo, dapprima stazionario e poi no.

Il cavo reoforo orizzontale potrà fungere ovviamente sia come catodo che come anodo. Senonchè, agli effetti valutativi, con anodo superficiale, praticamente appena interrato, non s'incontrano grandi difficoltà analitiche, con cavo orizzontale catodico invece sì.

La stazionarietà comporta la ricerca di un'unica funzione armonica, che denoteremo con  $\varphi$ , soddisfacente alle seguenti condizioni:

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} = 0; \quad 5[1]$$

al contorno:

$$\frac{\partial \varphi}{\partial y} = 0, \text{ per } y = \pm b \quad 5[2a]$$

$$\varphi = 0, \text{ per } x = \pm \frac{a}{2}, \quad 5[2b]$$

e all'origine una singolarità:

$$\varphi = \lg r. \quad 5[3]$$

Una simile funzione è determinabile partendo dalla teoria delle funzioni ellittiche, ma si può seguire una strada più elementare, derivando direttamente per  $\varphi$  due espressioni.

Posto:  $z = x + iy$ , s'osservi che la funzione:

$$\varphi_a = -\lg \left| 2 \operatorname{sh} \frac{z\pi}{2b} \right| = -\frac{1}{2} \lg 2 \left( \operatorname{ch} \frac{\pi x}{b} - \cos \frac{\pi y}{b} \right) \quad 5[4]$$

soddisfa la 5[1], (essendo parte reale d'una funzione analitica), la 5[2a] e la 5[3].

Essa inoltre si può sviluppare in serie, avendosi per  $x < 0$ :

$$\varphi_a = -R_e [\lg e^{\pi z/2b} + \lg (1 - e^{\pi z/2b})] = -\frac{\pi x}{2b} + R_e \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} e^{-n\pi z/2b}$$

o considerando anche la parità della funzione  $\varphi_a$ :

$$\varphi_a = -\frac{\pi}{2b} |x| + \sum \frac{1}{n} e^{-n\pi |x|/b} \cos \frac{n\pi}{b} y \quad 5[5]$$

Sviluppando la  $(\varphi - \varphi_a)$  in serie di  $\cos n\pi/b y$ , s'avrà:

$$\varphi - \varphi_a = \frac{1}{2} \psi_0 + \sum \psi_n \cos \frac{n\pi}{b} y \quad 5[6]$$

avendosi:

$$\psi_n = \frac{1}{2b} \int_{-b}^{+b} (\varphi - \varphi_a) \cos n\pi y/b \quad 5[6']$$

Essendo anche la  $\varphi - \varphi_a$  funzione armonica, che soddisfa la 5[1] e 5[2], risulta che le  $\psi_n$  debbono soddisfare l'equazione:

$$\frac{d^2 \psi_n}{d x^2} - n^2 \frac{\pi^2}{b^2} \psi_n = 0 \quad 5[7]$$

essere continue insieme con le derivate prime, (essendo la singolarità già inclusa nella  $(\varphi_a)$ , e, in virtù della 5[3] soddisfare le condizioni ai limiti:

$$\psi_0\left(\pm \frac{a}{2}\right) = \pi a/2b, \quad \psi_n\left(\pm \frac{a}{2}\right) = -\frac{1}{n} e^{-n\pi a/2b}, \quad n \geq 1 \quad 5[7']$$

La soluzione del sistema 5[7], 5[7'] è data dalle:

$$\psi_0 = \frac{\pi a}{2b}, \quad \psi_n = -\frac{2}{n} \frac{1}{e^{n\pi b/a} + 1} \operatorname{ch} n \pi x/b \quad 5[8]$$

Mediante le 5[8] si deduce per la  $\varphi$ :

$$\varphi = \varphi_a + \frac{\pi a}{4b} - 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \frac{1}{e^{n\pi a/b} + 1} \operatorname{ch} n \pi x/b \cos n \pi y/b, \quad \varphi_a \quad 5[9]$$

essendo data dalla 5[4]. Sostituendo la 5[5] per  $\varphi_n a$  ella 5[9] si ricava:

$$\varphi = \frac{\pi}{2b} \left(\frac{a}{2} - |x|\right) + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \frac{1}{\operatorname{ch} n \pi a/2b} \operatorname{sh} \frac{n \pi}{b} \left(\frac{a}{2} - |x|\right) \cos \frac{n \pi}{b} y \quad 5[9']$$

Per ragioni di convenienza è da preferirsi la 5[9], salvo per valori di  $x$  vicini ai bordi  $(\pm a/2)$ .

Un'altra determinazione per  $\varphi$  si può ottenere partendo da:

$$\varphi_\beta = \log \left| \operatorname{ctg} \frac{\pi z}{2a} \right| = \frac{1}{2} \log \frac{\operatorname{ch} \frac{\pi y}{a} + \cos \frac{\pi x}{a}}{\operatorname{ch} \frac{\pi y}{a} - \cos \frac{\pi x}{a}} \quad 5[10]$$

funzione che soddisfa la 5[1], 5[2] e 5[3].

Per questa  $\varphi_\beta$  si ricava uno sviluppo analogo, poiché per  $(y > 0)$  discende:

$$\varphi_\beta = R_e \frac{1 + e^{i\pi z/a}}{1 - e^{i\pi z/a}} = 2 R_e \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2n+1} e^{i(2n+1)\pi z/a}$$

o:

$$\varphi_\beta = 2 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2n+1} e^{-(2n+1)\frac{\pi}{a}|y|} \cos (2n+1) \pi \frac{x}{a} \quad 5[11]$$

Sviluppando  $\varphi - \varphi_\beta$  in serie di  $\cos (2n + 1) \pi x/a$ , e procedendo in maniera simile, si perviene a due relazioni analoghe alle 5[9], 5[9'], date dalle:

$$\varphi = \varphi_\beta + 4 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)} \frac{1}{e^{2(2n+1)\pi b/a} - 1} \operatorname{ch} (2n+1) \pi \frac{y}{a} \cos (2n+1) \pi \frac{x}{a}, \quad 5[12]$$

con  $\varphi_\alpha$  data dalla 5[10], o, alternativamente:

$$\varphi = 2 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2n+1} \cdot \frac{1}{\operatorname{sh} (2n+1) \pi \frac{a}{b}} \operatorname{ch} (2n+1) \frac{\pi}{a} (b - |y|) \cos (2n+1) \frac{\pi}{a} x. \quad 5[12']$$

Anche qui la 5[12] è da preferirsi alla 5[12'], eccezion fatta per la prossimità dei bordi ( $y = \pm b$ ).

Le 5[9], 5[9'], 5[12], 5[12'] sono tutte convergenti, adatte per il calcolo numerico della funzione  $\varphi$ , dedotta in più modi. Da tener conto infatti che:

- 1) in zone lontane dai bordi convergono meglio le 5[9] e 5[12],
- 2) presso i bordi ( $x = \pm a/2$ ) convergono meglio le 5[12] e 5[12']; presso ( $y = \pm b$ ) le 5[12], 5[9],
- 3) se  $a$  è grande rispetto a  $b$ , sono più convenienti le 5[9], 5[9'],
- 4) se  $b$  è grande rispetto ad  $a$ , le 5[12], 5[12'].

Calcoliamo ancora la  $\varphi$  nell'immediate vicinanze dell'origine. Posto  $r = \sqrt{x^2 + y^2}$ ,  $f(r)$  il valore (approssimato) di  $\varphi$ , a meno di grandezze che tendono a zero con  $r \rightarrow 0$ , si trae dalla 5[9], 5[12]:

$$f(r) = \log \frac{b}{\pi r} + \frac{\pi a}{4b} - 1 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \frac{1}{(e^{n\pi a/b} + 1)} \quad 5[13]$$

$$f(r) = \log \frac{2a}{\pi r} + 4 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2n+1} \cdot \frac{1}{(e^{2(2n+1)\pi b/a} - 1)} \quad 5[13']$$

La convenienza di scelta tra le 5[13] e 5[13'] è di nuovo condizionata dal rapporto ( $b/a$ ), secondo quanto s'è detto in 3).

#### STAZIONARIETÀ DEL TRIPOLLO SIMMETRICO.

Possiamo a questo punto passare al problema stazionario. Se  $V$  è il potenziale,  $E$  il campo,  $I$  l'intensità di corrente,  $\rho$  la resistività, normalizzeremo il campo ponendo  $V = 0$  al catodo e quindi  $V = E$  all'anodo.

L'elettrodo orizzontale cilindrico abbia un raggio molto piccolo rispetto alle dimensioni  $a$  e  $b$ , in maniera che per  $r = d$  si possa la  $\varphi$  identificare con  $f(r)$ , determinata dalle 5[13], 5[13'].

Il potenziale  $V$  deve soddisfare la 5[1] e 5[2b], presentare una singolarità logaritmica all'origine. D'aggiungere:

$$V = 0, \text{ (per } x = \pm \frac{a}{2}, \quad V = E, \text{ (per } r = d)$$

quando il reoforo orizzontale funziona come anodo:

$$V = E, \text{ (per } x = \pm \frac{a}{2}, \quad V = 0, \text{ (per } r = 0)$$

se il reoforo funziona come catodo.

Confrontando queste condizioni con la 5[2a], e ricordando che per  $r = d$ , si ha  $\varphi = f(d)$ , si perviene per:

$$V = \frac{E}{f(d)} \varphi(x, y) \quad \text{(reoforo anodico)} \quad 5[14]$$

$$V = E \left[ 1 - \frac{1}{f(d)} \varphi(x, y) \right] \quad \text{(reoforo catodico)} \quad 5[14']$$

L'intensità della corrente si trae, per la teoria del potenziale, moltiplicando per  $(\pi/\rho)$  il coefficiente del logaritmo. Il comparire di  $\pi$  invece di  $2\pi$  è legato al solito alla circostanza che la metà della corrente è fittizia, perché riguarda l'immagine riflessa sulla superficie. Si ha quindi:

$$J = \pi E \rho f(d) \quad 5[15]$$

con resistenza per unità di lunghezza, in direzione dell'asse  $z$  data da:

$$\rho f(d) / \pi$$

#### EGO STAZIONARIO NEL DISPOSITIVO POLARE MISTO-SIMMETRICO.

Sia  $H_o$  la pressione iniziale,  $H(x, y)$  quella di regime nella stazionarietà, in un punto generico,  $H_K$  la pressione catodica (supposta costante),  $h, h_K$ , i prosciugamenti:  $H_o - H, H_o - H_K$ ;  $K, K_e$ , le costanti di filtrazione del terreno, idrica ed elettroidrica.

Il calcolo di  $h$  in regime è estremamente semplice, se è nota la distribuzione di  $V$ . Infatti in assenza di terreno all'esterno degli elettrodi, la condizione d'assenza di flusso d'acqua dà semplicemente:

$$h - \frac{K_e}{K} V = \text{cost.} \quad 5[16]$$

e considerando che sul catodo  $h = h_K$ , e per convenzione  $V = 0$ , la 5[16] si trasforma nella:

$$h = h_K + \frac{K_e}{K} V, \quad 5[16']$$

formula spesso incontrata.

In virtù delle 5[14] e 5[14'], la 5[16'] diventa:

$$h = h_K + \frac{K_e}{K} \frac{E}{j(a)} \varphi(x, y) \quad 5[17]$$

(con orizzontale anodico)

$$h = h_K + \frac{K_e}{K} E [1 - \varphi(x, y)/f(d)] \quad 5[17']$$

(con orizzontale catodico).

In tutte e due le situazioni il grado di prosciugamento varia dal minimo  $h_K$  al catodo, al massimo  $h_A$  all'anodo, secondo:

$$h_A = h_K + \frac{K_e}{K} E \quad 5[18]$$

Da notare che nel 2° caso, essendo gli anodi più estesi, la zona di massimo prosciugamento sarà più estesa, quindi in genere conviene, in un terreno da disidratare, restringere possibilmente la zona del massimo gradiente del campo alle vicinanze del catodo (se naturalmente considerazioni d'altro genere non contribuiscono ad invalidare la teoria d'Helmholtz), in maniera d'estendere possibilmente la zona anodica, in cui il potenziale è uguale e non molto diverso dall'anodico.

#### EGO NON-STAZIONARIO NEL DISPOSITIVO MISTO SIMMETRICO.

Passiamo a derivare le formule relative all'andamento nel tempo del processo di prosciugamento, nell'ipotesi che il reoforo filiforme orizzontale funzioni da anodo. Ora  $H$  e  $h$  diventano funzioni del tempo, e per  $t = 0$  assumono i valori  $H_0$  e 0.

La valutazione di  $h$  si riduce a determinare nel campo:

$$-\frac{a}{2} \leq x \leq \frac{a}{2}, \quad -b \leq y \leq b, \quad 0 \leq t < \infty,$$

una funzione continua insieme con le derivate, a meno d'una singolarità logaritmica all'origine, che soddisfa l'equazione differenziale:

$$\frac{\partial^2 h}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 h}{\partial y^2} = C \frac{\partial h}{\partial t}, \quad 5[19]$$

la condizione iniziale:

$$h = 0, \quad (t = 0), \quad 5[20]$$

quelle ai limiti:

$$\frac{\partial h}{\partial y} = 0, \quad h = \pm b; \quad 5[21_a]$$

$$h = h_K, \quad x = \pm a/2 \quad 5[21_\beta]$$

Inoltre non dovendoci essere flusso idrico all'anodo, la funzione:

$$h - \frac{K_e}{K} \frac{E}{f(d)} \varphi, \quad \left( h - \frac{K_e}{K} V \right)$$

dev'essere regolare all'origine, o, in altre parole, la  $h$  deve avere una singolarità logaritmica, che in virtù della 5[3], dev'essere del tipo:

$$h \simeq -h_c \lg r, \quad r = 0 \quad 5[22]$$

$$h_c = \frac{K}{K_e} \frac{E}{f(d)} \quad 5[23]$$

Prima di procedere dobbiamo dimostrare un lemma. Si abbia una funzione regolare  $F(x, y)$ , che in qualche rettangolo:

$$-a \leq x \leq a, \quad -\beta \leq y \leq \beta$$

salvo l'origine, dove ha la forma:

$$F(x, y) \simeq A \lg r + f(x, y),$$

( $A$  costante), ( $f, \frac{\partial f}{\partial x}$  integrabili), posto

$$g(x) = \int_{-\beta}^{+\beta} \psi(y) F(x, y) dy$$

con  $\psi(y)$  continua,  $g(x)$  risulta una funzione continua insieme con la sua derivata, salvo per  $x = 0$ , dove quest'ultima presenta un salto dato da:

$$g'(+0) - g'(-0) = 2\pi A \psi(0)$$

Le proprietà di continuità, eccezion fatta per l'ultima relazione, sono conseguenze di noti teoremi d'analisi.

Per dimostrare questa relazione procederemo senza insistere troppo su particolari tecnici.

Si ha:

$$g'(\varepsilon) - g'(-\varepsilon) = \int_{-\beta}^{\beta} \psi(y) \left[ \frac{\partial F}{\partial x_{x=\varepsilon}} - \frac{\partial F}{\partial x_{x=-\varepsilon}} \right] dy =$$

$$2A \int_{-\beta}^{+\beta} \psi(y) \frac{\varepsilon}{y^2 - \varepsilon^2} dy + 0(\varepsilon) = 2A \int_{-\beta/\varepsilon}^{+\beta/\varepsilon} \psi(\varepsilon z) \frac{dz}{1+z^2} + 0(\varepsilon),$$

essendo  $0(\varepsilon)$  una grandezza che tende a 0 per  $\varepsilon \rightarrow 0$ .

Con un noto procedimento d'analisi si dimostra che il 1° termine tende a:

$$2A \psi(0) \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dz}{1+z^2},$$

con  $\varepsilon \rightarrow 0$ , cioè  $a : 2\pi A \psi(0)$  il che dimostra il lemma.

Per una funzione  $F$  pari di  $x$ , questa relazione diventa semplicemente

$$g'(0) = g'(-0) = \pi A \psi(0). \quad 5[24]$$

Tornando al nostro problema ci limiteremo ai valori positivi di  $x$ , essendo  $h$  funzione pari di  $x$ .

Sviluppiamo  $h$  in serie di  $(\cos n\pi y/b)$ , poniamo cioè:

$$h = \frac{1}{2} h_0 + \sum_{n=1}^{\infty} h_n \cos n\pi y/b \quad 5[25]$$

con:

$$h_n = \frac{1}{b} \int_{-b}^{+b} h \cos n\pi y/b \cdot dy. \quad 5[26]$$

Moltiplicando la 5[19] per  $\cos n\pi y/b$ , integrando tra  $-b$ ,  $+b$ , tenendo conto della 5[21a], si perviene per  $h_n$  all'equazione differenziale:

$$\frac{\partial^2 h_n}{\partial x^2} - n^2 \pi^2 h_n/b^2 = C \frac{\partial h_n}{\partial t} \quad 5[27]$$

a cui s'aggiungono la condizione iniziale [20] che dà:

$$h_n = 0, \text{ per } t = 0, \quad 5[28]$$

quella sul catodo [21β] che dà:

$$h_0 = 2h_K, \quad h_n = 0, \quad n \geq 1, \quad (\text{per } x = a/2), \quad 5[29]$$

la condizione per  $x = 0$  che si ottiene dalla 5[22] applicando il nostro lemma, con  $F = h$  cioè:  $A = -h_c$ ,  $\psi = b^{-1} \cos n\pi y/b$ , che da:

$$\frac{\partial h_x}{\partial x} = -\pi h_c/b, \quad \text{per } x = 0. \quad 5[30]$$

Per trovare  $h_n$  applichiamo la trasformata  $L$  di Laplace: dalla  $L$  della 5[27], utilizzando la 5[28], discende per  $h_n$  l'equazione differenziale ordinaria:

$$\frac{d^2 \bar{h}_n}{a x^2} - (cs + n^2 \pi^2/b^2) \bar{h}_n = 0 \quad 5[31]$$

a cui s'aggiungono le condizioni ai limiti ottenute dalle trasformazioni delle 5[29], 5[30] date dalle:

$$\bar{h}_0 = \frac{2}{s} h_K, \quad \bar{h}_n = 0, \quad \geq n \ 1, \quad \text{per } x = a/2 \quad 5[32]$$

$$\frac{d \bar{h}_n}{dx} = -\frac{\pi}{b s} h_c, \quad \text{per } x = 0. \quad 5[33]$$

Il sistema 5[31], 5[33] si risolve immediatamente. Posto per brevità:

$$\sigma^2 = cs + n^2 \pi^2/b^2,$$

si ha:

$$\bar{h}_n = \frac{\pi h_c}{b} \frac{1}{s} \frac{\text{sh } \sigma_n \left( \frac{a}{2} - x \right)}{\sigma_n \text{ch } \sigma_n \frac{a}{2}}, \quad \text{per } n \geq 1 \quad 5[34]$$

$$\bar{h}_0 = \frac{\pi h_c}{b} \frac{1}{s} \frac{\text{sh } \sigma_0 \left( \frac{a}{2} - x \right)}{\sigma_0 \text{ch } \sigma_0 \frac{a}{2}} + 2 \text{sh}_K \frac{1}{s} \frac{\text{ch } \sigma_0 x}{\text{ch } \sigma_0 a/2}. \quad 5[35]$$

Si determinano ora le antitrasformate (a.t.) col solito metodo dei residui. I poli delle trasformate, che sono tutti semplici, sono dati oltre che da  $s = 0$ , dai valori:

$$\sigma_{nm} = (2m + 1) \frac{\pi}{a} i, \quad \text{oppure } s_{nm} = -\lambda_{nm}/abc,$$

avendosi posto:

$$\lambda_{nm} = \pi^2 abc \left[ \frac{n^2}{b^2} + \frac{(2n + 1)^2}{a^2} \right], \quad (\text{numero puro}) \quad 5[36]$$

Porremo inoltre:

$$\theta = t/a b c \quad 5[37]$$

essendo  $\tau = a b c$  tempo caratteristico.

Il polo  $s = 0$  dà il suo contributo:

$$h_c \operatorname{sh} \frac{n \pi}{b} \left( \frac{a}{2} - x \right) / \operatorname{ch} \frac{n \pi}{2} \frac{a}{b}, \quad \text{per } n \geq 1,$$

mentre per  $n = 0$ , da:

$$\pi h_c \left( \frac{a}{2} - x \right) / b + 2 h_K$$

Sommando i contributi dati da questo polo, sostituiti nella 5[25], si ottiene in virtù della 5[9']:

$$h_K + h_c \varphi,$$

che rappresenta la parte stazionaria coincidente colla 5[17].

In quanto ai residui provenienti dai poli  $s_{nm}$ , che si calcolano col teorema dell'Hospital, s'ottiene come residuo per  $n \geq 1$ :

$$- \frac{4 \pi h_c}{\lambda_{nm}} \cos (2 m + 1) \pi \frac{x}{a} e^{-\lambda_{nm} \theta}$$

a cui s'aggiungue per  $n = 0$  un termine in  $h_K$  dato da:

$$- \frac{8 h_K}{\pi (2 m + 1)} (-1)^m \cos (2 m + 1) \pi \frac{x}{a} e^{-\lambda_{0m} \theta}$$

Sostituendo quest'espressione nella 5[25], e posto inoltre:

$$\vartheta = \pi^2 \frac{b}{a} \theta = \pi^2 t / a^2 \quad 5[38]$$

si ha:

$$\begin{aligned} h = h_K \left[ 1 - \frac{4}{\pi} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m}{2 m + 1} \cos (2 m + 1) \pi \frac{x}{a} e^{-(2 m + 1)^2 \vartheta} \right] + \\ + h_c \left[ \varphi - 2 \pi h_c \sum_{m=0, n=0}^{\infty} \cos n \pi \frac{y}{b} \frac{\varepsilon_n}{\lambda_{nm}} \cos (2 m + 1) \pi \frac{x}{a} e^{-\lambda_{nm} \theta} \right], \quad 5[39] \\ \varepsilon_0 = 1, \quad \varepsilon_n = 2, \quad n \geq 1. \end{aligned}$$

Il 1° termine della 5[39] è il puro effetto idrogeologico, il 2° è quello idroelettrico. Le serie sono a buona convergenza, occorre però nella doppia sommatoria ordinare le  $\lambda_{nm}$  in ordine crescente.

Si noti inoltre che per  $t = 0$  il termine in  $h_K$  presenta una discontinuità ai bordi  $x = \pm a/2$ , che proviene dall'aver imposto  $h_K \neq 0$ ,

( $H_K \neq H_c$ ), il che si rifletterà nel noto effetto d'una portata iniziale teoricamente infinita.

L'influenza dei termini contenenti  $t$  si fa man mano sentire col crescere di  $t$ : essa scompare quando la durata del processo  $t$  diviene grande rispetto a  $\tau = cab$ . Essa scompare, rigorosamente, quando  $t$  diviene grande rispetto al maggiore dei 2 tempi elettrolici  $ca^2$ ,  $cab$ , ove questi abbiano un ordine di grandezza notevolmente diverso tra di loro.

Portata  $q_K$  e flusso totale  $Q_K$ . (per unità di lunghezza in direzione di  $z$ ).

La prima è data da:

$$q_K = K \int_{-b}^{+b} \left( \frac{\partial h}{\partial x} \right)_{x=a/2} dy + \rho K_e J \quad 5[40]$$

che, in virtù delle 5[15] e 5[25] diventa:

$$q_K = K \left[ b \left( \frac{\partial h_c}{\partial x} \right)_{a/2} + \pi h_c \right] \quad 5[41]$$

mentre  $Q_K$  deriva da:

$$Q_K = \int_0^t q_K dt \quad 5[42]$$

Passando alle trasformate, si ha in virtù della 5[35]:

$$\bar{q}_K = \pi K h_c \frac{1}{s} \left( 1 - \frac{1}{\operatorname{ch} \frac{a}{2} \sqrt{cs}} \right) + 2bK \sqrt{c} h_K \frac{1}{\sqrt{s}} \operatorname{th} \frac{a\sqrt{c}}{2} \sqrt{s} \quad 5[43]$$

$$\bar{Q}_K = \pi K h_c \frac{1}{s^2} \left( 1 - \frac{1}{\operatorname{ch} \frac{a}{2} \sqrt{cs}} \right) + 2bK \sqrt{c} h_K \frac{1}{\sqrt{c^3}} \operatorname{th} \frac{a\sqrt{c}}{2} \sqrt{s} \quad 5[44]$$

È più semplice passare attraverso le trasformate che non fare il calcolo mediante le 5[39].

I poli sono dati da:  $s = 0$

$$s_m (= s_{om}) = -\frac{1}{c} (2m+1)^2 \frac{\pi^2}{a^2}, \quad \text{per la sola } \bar{Q}_K.$$

Passando ai residui col metodo dell'Hospital si ha per antitrasformazione ( $a \cdot t$ ) della 5[43]:

$$q_K = 4K h_c \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m}{2m+1} e^{-(2m+1)^2 \vartheta} + \frac{b}{a} K h_K \sum_{m=0}^{\infty} e^{-(2m+1)^2 \vartheta} \quad 5[45]$$

$$Q_K = c a^2 K h_c \left[ \frac{\pi}{8} - \frac{4}{\pi^2} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m}{(2m+1)^3} e^{-(2m+1)^2 \xi} \right] + \\ + c a b K h_K \left[ 1 - \frac{8}{\pi^2} \sum_{m=0}^{\infty} (2m+1)^{-2} e^{-(2m+1)^2 \vartheta} \right]. \quad 5[46]$$

La quantità totale d'acqua che può venire estratta, per  $\vartheta \rightarrow \infty$  è data da:

$$Q_K(\infty) = \frac{\pi}{8} c a^2 K h_c + c a b K h_K. \quad 5[47]$$

In tutte e 3 le formule sovraricavate, il 1° termine, proporzionale a  $h_c$ , cioè a  $J$ , si riferisce all'effetto elettrico, mentre il 2°, proporzionale a  $h_K$  all'effetto idraulico, quest'ultimo naturalmente presente solo se la pressione estrattiva  $H_K$  è più bassa dell'iniziale  $H_o$ , ( $h_K > 0$ ).

I termini tra parentesi della 5[46] e le  $\sum$  delle 5[45] dipendono solo da  $\vartheta$  e rappresentando serie rapidamente convergenti, potrebbero essere tabellati una volta per sempre.

Se indichiamo con  $\bar{\tau} = a^2 c / \pi^2$ , (tempo caratteristico per quel che riguarda il flusso d'acqua), si vede subito che per tempi d'ordine  $\bar{\tau}$ , agisce unicamente solo il 1° termine delle  $\sum$ . Se il tempo raggiunge qualche multiplo di  $\bar{\tau}$ , il flusso è praticamente esaurito.

Il tempo caratteristico  $\bar{\tau}$  non dipendendo dalla profondità  $b$ , ciò vuol dire che per  $b \gg a$  in cui, come risulta dalla 5[39], hanno ancor luogo variazioni di pressione per un tempo  $\tau = cab$ , queste variazioni riguardano un riassetamento all'interno del terreno, (compattazioni e simili che si risentono anche con modesti emungimenti catodici (4)).

L'andamento iniziale è nettamente diverso per le due componenti EGO, (idraulica ed elettrica): nella prima la portata iniziale è infinita, causata dal salto brusco di pressione da  $H_o$  a  $H_K$ , (il flusso totale rimane però limitato presentando il già studiato andamento parabolico), nella seconda la portata parte da un valore costante ( $\rho K_e J$ ), e il flusso idrico iniziale presenta un andamento lineare.

Molto più significativo è il comportamento dei moltiplicatori in parentesi nelle 5[46], o, che è praticamente lo stesso, quello dell'acqua totale estraibile dalla 5[47]: qui i contributi dati dai due termini dipendono dai parametri in maniera essenziale diversa.

Per quel che riguarda il termine dipendente dalla componente idraulica il contributo è proporzionale a  $(abh_K)$ , il che è intuitivo: poichè quest'effetto comporta una pressione volumetrica, di conseguenza la quantità d'acqua estratta è proporzionale al volume da cui viene emunta.

Utilizzando il puro effetto idraulico (cioè potendo pompare l'acqua ad una pressione bassa), converrà sempre disporre di elettrodi profondi, e per accelerare il processo diminuire  $\bar{\tau}$  cioè  $a$ .

Diversamente si comporta il termine che rappresenta la componente elettrica: l'acqua estraibile è proporzionale ad  $a^2 J$ , il che significa che ad intensità elettrica costante, tale quantità d'acqua non dipende da  $b$ . In altre parole ad amperaggio costante s'estrae un certo quantitativo idrico indipendentemente dalla profondità: appare quindi superfluo applicare catodi profondi.

Sul terreno si opera però spesso a « tensione costante ».

L'intensità di corrente stessa dipende da  $b$  attraverso  $f(d)$ , in quanto come risulta dalla 5[15], la resistenza è proporzionale a  $f(d)$ . In virtù delle 5[13], 5[13'], si ha:

$$f(d) = \lg \frac{2a}{\pi d} + g(b/a), \quad 5[48]$$

con

$$\begin{aligned} g(x) &= \frac{\pi}{4x} + \frac{x}{2} - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \cdot \frac{1}{1 + e^{n\pi/x}} = \\ &= 4 \sum_{n=0}^{\infty} (2n+1)^{-1} \frac{1}{-1 + e^{2(2n+1)\pi x}}. \end{aligned} \quad 5[49]$$

Siccome  $2a/\pi d$  è piuttosto grande, la  $g$  risulta trascurabile già per  $a = 1$ , ( $b = a$ ). Per conoscere per quali valori di  $b/a$  ha ancora pratica influenza il termine  $g$  occorrerebbe tabellare  $g(x)$ . In ogni caso si vede che, per tensione costante, se  $(b/a)$  oltrepassa un certo limite, l'intensità di corrente e quindi l'acqua estratta non aumentano più, e appare superfluo approfondire nel terreno ulteriormente i catodi. D'altra parte quest'operazione diverrebbe efficiente se contemporaneamente si spaziassero i poli, essendo il flusso idrico proporzionale ad  $a^2$  (mantenendo naturalmente la tensione costante).

Questo risultato diventa comprensibile appena si ricorda che il prosciugamento ha luogo solo in una zona intorno all'anodo. Portare la lunghezza catodica  $b$  oltre un certo limite è allora superfluo, non interferendo sulla zona anodica. Allontanando però contemporaneamente i catodi s'allarga l'ambito anodico soggetto al prosciugamento.

Fissati  $b$  ed  $E$  conviene quindi spaziare  $a$  fino a rendere trascurabile  $g(x)$ , ammesso naturalmente che tutta la zona (e non una parte) interessa per l'essiccamento.

In tutti i casi però la disidratazione non potrà incidere molto in profondità, e si può calcolare tale profondità d'abbassamento di tavola d'acqua in funzione della posizione, mercè la  $\delta$ [17] della teoria stazionaria qui data.

## BIBLIOGRAFIA

- (<sup>1</sup>) A. BELLUIGI, *Teoria generale dell'Elettrogeosmosi Tridimensionale*, I, II, III, Milano, « Geofisica Pura e Applicata », **37** (1957) 90-112; **39** (1958/I) 65-71, 72-95.
  - (<sup>2</sup>) A. BELLUIGI, *Dispositivi elettrodici preferenziali nell'elettroprosciugamento di suoli umidi*. *Giornale del Genio Civile*, **9**, Roma, Settembre 1959. — *Bifilarità elettrodiche aperte e chiuse nei processi EGO*, « *Annali di Geofisica* », **VIII**, 1, Roma (1960).
  - (<sup>3</sup>) A. BELLUIGI, *Pressioni elettrogeosmotiche in situazioni diverse d'idroprelievo catodico*, « *Boll. di Geofisica teorica ed Applicata* », **2**, Trieste (1959).
  - (<sup>4</sup>) A. BELLUIGI, *Autoconsolidamenti elettroeinettici dei suoli*, « *Industria Italiana del Cemento* », Roma Luglio-Agosto 1959.
-