

Ulteriori considerazioni sulla correzione topografica nei rilievi gravimetrici geominerari

M. BERNABINI (*)

Ricevuto il 30 Settembre 1963

RIASSUNTO. — Si prende in esame l'errore residuo dovuto al considerare limitati da un piano orizzontale i compartimenti cilindrici di alcune configurazioni per le correzioni topografiche di rilievi gravimetrici.

Dopo una prima analisi delle variazioni degli errori residui in un compartimento, in funzione della quota media, pendenza media ed orientazione della pendenza della superficie topografica compresa nel compartimento, si considerano gli errori residui complessivi di una zona o complesso di zone e si verifica, mediante una analisi operata su alcune stazioni di un rilievo, che essi sono legati alla distribuzione statistica delle pendenze.

Si suggeriscono alcuni metodi speditivi per valutare in primissima approssimazione l'entità dell'errore residuo e per eliminarlo di alcuni casi.

SUMMARY. — In the present paper we are dealing with residual error occurring when considering surfaces of cylindrical compartment in gravimetric topographic correction, horizontal.

It is shown how residual error variations in a compartment depend on the average level, average slope and slope orientation of topographic surface in the compartment.

The residual error of a zone or an ensemble of zones may be positive or negative according to statistical distribution of slope orientations. As an example, the results of a gravimetric survey are related.

Rapid methods to value the residual error and to eliminate it in some cases are suggested.

PREMESSA.

In una precedente nota (1) si era posta in risalto l'accresciuta importanza di un affinamento dei metodi in uso per effettuare la correzione topografica soprattutto nel caso di rilievi geominerari.

(*) Istituto di Geofisica Mineraria — Facoltà d'Ingegneria — Università degli Studi — Roma.

Uno dei problemi, nella adozione del metodo di correzione più rispondente per ogni rilievo, è quello della scelta della schematizzazione geometrica da impiegare. I criteri di scelta sono ovviamente la semplicità e la rapidità del metodo e l'approssimazione che esso permette. Ciò porta a dover valutare, volta per volta, l'entità degli errori che le schematizzazioni introducono.

I metodi di correzione oggi più largamente impiegati, schematizzano il terreno assimilandolo a compartimenti cilindrici limitati superiormente da porzioni di piano aventi quota uguale a quella media della superficie topografica, che ciascuno di essi racchiude. Tale « spianamento » della superficie topografica è sicuramente rispondente nel caso di rilievi in aree pianeggianti quali quelle che si riscontrano nei grandi bacini di sedimentazione o in zone penepianate (scudo canadese, scudo baltico, ecc.). Esso può fornire ancora risultati sufficientemente approssimati su altopiani spezzati in grandi blocchi da faglie (tipo altopiani africani, americani, ecc.); in questi casi dovranno essere corretti, ricorrendo ad espressioni particolari, solo i compartimenti che ricadono a cavallo di linee di dislocazione.

Esistono però molte altre aree nelle quali tale schematizzazione non è sicuramente la più soddisfacente in quanto la superficie topografica dei compartimenti non è approssimabile a porzioni di piano orizzontale.

In tali casi una valutazione degli errori che tali schematizzazioni introducono non è facile né immediata, data soprattutto la grande variabilità di forme ed andamenti che la superficie terrestre presenta. D'altra parte la valutazione dell'errore è, come si è detto, necessaria per una scelta della schematizzazione più idonea a ciascun caso.

Il problema in questione è stato già affrontato da vari autori. Tra questi si ricorda L. Solaini (9), che pone a base di una sua proposta schematizzazione una valutazione dell'ordine di grandezza di errori derivanti da particolari ipotesi di andamento della superficie topografica.

P. Lejay (7) e successivamente M. Cunietti (3) hanno impostato nelle linee generali il problema, cui Cunietti stesso ha dato una risoluzione con particolare riferimento alle correzioni per le zone più lontane della suddivisione di Hayford.

Nella presente nota si vuole portare un contributo allo studio del problema della valutazione degli errori che si commettono quando si sostituisce, agli effetti della correzione, una superficie orizzontale ad una superficie inclinata di ugual quota media, nel caso di compartimenti cilindrici prossimi alla stazione (distanze minori di 5 km).

Si considereranno in particolare i casi in cui una schematizzazione più approssimata alla realtà sia piuttosto quella di superfici inclinate monoclinali (*).

Una tale situazione si verifica anche in molte zone d'Italia, ad es. in quelle in cui per effetti tettonici la superficie topografica risulta costituita da porzioni di superfici inclinate più o meno piane (ad es. nell'Appennino umbro-marchigiano). La schematizzazione indicata può essere rispondente anche in zone in cui l'erosione, agendo su terreni di scarsa consistenza, ha generato vallate più o meno ampie, molto spesso con forme a V a versanti all'incirca piani.

Come si vedrà in seguito, anche molti altri casi di superfici non monoclinali sono riducibili, agli effetti delle correzioni, a superfici monoclinali.

Per valutare l'errore che si commette nei casi citati con le correzioni usuali (errore che verrà indicato come *errore residuo*), è opportuno premettere alcune considerazioni sulle variazioni degli errori residui stessi con i valori della pendenza e con le orientazioni (**), delle pendenze stesse, relativi alla superficie topografica racchiusa in un compartimento, ed al variare delle quote medie.

Successivamente si riporteranno i risultati di una indagine statistica sulle distribuzioni delle pendenze e sugli errori residui in una zona della Toscana e si trarranno, a conclusione, alcune considerazioni sul modo di valutare e ridurre, se necessario, gli errori residui.

2. - ANALISI DEGLI ERRORI RESIDUI.

Si è premesso che si sarebbero presi in considerazione compartimenti con superficie topografica monoclinale.

Per avere una prima idea sulle variazioni degli errori residui, è sufficiente, seguendo l'indirizzo già adottato da P. Lejay (7) e da M. Cunietti (8), considerare compartimenti limitati da superfici le cui pendenze siano orientate in ogni punto o parallelamente o normalmente alla congiungente il centro del compartimento con il punto di stazione. Le

(*) Si considera sempre la porzione di superficie topografica ricadente in un compartimento.

(**) Per « orientazione della pendenza » si intende qui la orientazione, rispetto alla stazione di misura, della direzione della massima pendenza prevalente della superficie topografica.

orientazioni intermedie daranno effetti compresi tra quelli dovuti alle due schematizzazioni proposte.

Si suppone cioè che la superficie topografica possa essere rappresentabile: 1) con una porzione di cono con asse verticale passante per il punto di stazione; 2) con una porzione di elicoide retto a passo costante anche esso con asse verticale passante per il punto di stazione.

Consideriamo un sistema di coordinate cilindriche R, α, z , con il centro nel punto di stazione e l'asse z verticale; nella prima schematizzazione le quote variano linearmente con il raggio R , nella seconda con l'anomalia α .

Indichiamo con R_1, R_2 ed R_m il raggio minimo, massimo e medio (*) del comportamento in esame limitato tra le anomalie α_1 ed α_2 (Fig. 1), con H la quota generica relativa a quella del punto di stazione, con K la costante di gravitazione universale e con σ la densità.

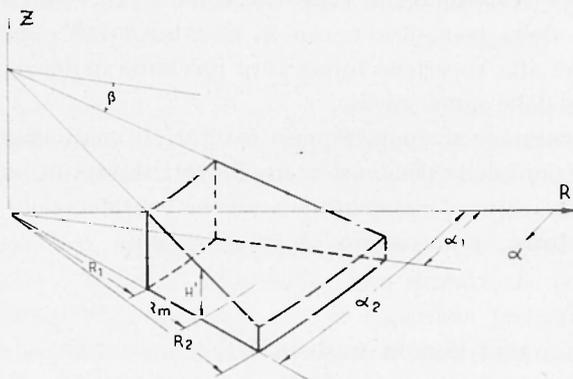


Fig. 1 - Schema di compartimento con variazione lineare delle quote con il raggio.

Nel primo caso (quote varianti linearmente con il raggio) indicando con H' la quota relativa corrispondente al raggio medio R_m , si può porre

$$H = H' + \operatorname{tg} \beta (R - R_m)$$

in cui $\operatorname{tg} \beta$ è la pendenza della superficie lungo il raggio.

(*) Inteso come media aritmetica dei raggi estremi: $(R_1 + R_2)/2$.

L'attrazione di tale compartimento sarà: (Vedi anche L. Solaini (9))

$$\begin{aligned}
 g &= K \sigma \int_{\alpha_1}^{\alpha_2} \int_{R_1}^{R_2} \int_0^{H' + \text{tg } \beta (R - R_m)} \frac{z R}{(z^2 + R^2)^{3/2}} d\alpha dz dR = \\
 &= -K \sigma (\alpha_2 - \alpha_1) \left\{ \frac{\sqrt{p^2 R_2^2 + \text{tg } \beta q R_2 + q^2}}{p^2} - \right. \\
 &\quad - \frac{\text{tg } \beta q}{p^3} \ln [2 p \sqrt{p^2 R_2^2 + 2 \text{tg } \beta q R_2 + q^2} + 2 R_2 p^2 + 2 \text{tg } \beta q] - \\
 &\quad - \frac{\sqrt{p^2 R_1^2 + 2 \text{tg } \beta q R_1 + q^2}}{p^2} + \frac{\text{tg } \beta q}{p^3} \ln [2 p \sqrt{p^2 R_1^2 + 2 \text{tg } \beta q R_1 + q^2} + \\
 &\quad \left. + 2 R_1 p^2 + 2 \text{tg } \beta q] - (R_2 - R_1) \right\} \quad [1]
 \end{aligned}$$

in cui

$$p = \sqrt{1 + \text{tg}^2 \beta} \quad \text{e} \quad q = H' - \text{tg } \beta R_m .$$

Nel secondo caso (quote varianti linearmente con la anomalia), indicando con α_m e con H'' rispettivamente l'azimut medio e la quota re-

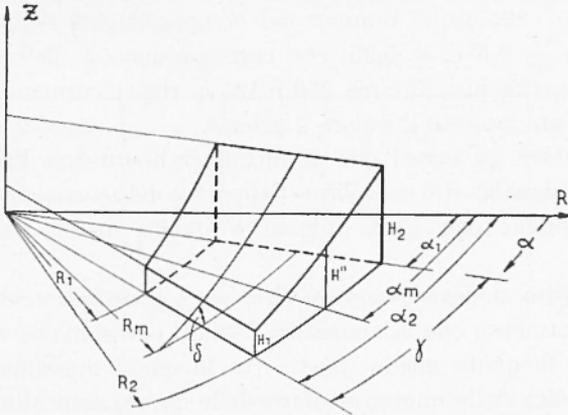


Fig. 2 - Schema di compartimento con variazione lineare delle quote con l'anomalia.

lativa ad esso, con $\text{tg } \delta$ la pendenza della superficie topografica sulla circonferenza media di raggio R_m (Fig. 2), si può porre:

$$H = \text{tg } \delta R_m \alpha$$

da cui si ricava che

$$\alpha_m = H'' / \text{tg } \delta R_m .$$

L'attrazione di tale comportamento sarà:

$$\begin{aligned}
 g = & \int_{a_1}^{a_2} \int_0^{\operatorname{tg} \delta R_m a} \int_{R_1}^{R_2} \frac{z R}{(z^2 + R^2)^{3/2}} da dz dR = \frac{1}{2} K \sigma \gamma \left[2 (R_2 - R_1) + \right. \\
 & + \frac{1}{2} (\sqrt{H_2^2 + R_1^2} + \sqrt{H_1^2 + R_1^2}) + \frac{H''}{D} (\sqrt{H_2^2 + R_1^2} - \sqrt{H_1^2 + R_1^2}) + \\
 & + \frac{R_1^2}{D} \ln \frac{H_2 + \sqrt{H_2^2 + R_1^2}}{H_1 + \sqrt{H_1^2 + R_1^2}} - \frac{1}{2} (\sqrt{H_2^2 + R_2^2} + \sqrt{H_1^2 + R_2^2} - \\
 & \left. - \frac{H''}{D} (\sqrt{H_2^2 + R_2^2} - \sqrt{H_1^2 + R_2^2}) - \frac{R_2^2}{D} \ln \frac{H_2 + \sqrt{H_2^2 + R_2^2}}{H_1 + \sqrt{H_1^2 + R_2^2}} \right] \quad [2]
 \end{aligned}$$

in cui $\gamma = a_2 - a_1$ è l'ampiezza angolare del compartimento, H_2 ed H_1 le quote relative massima e minima (date da $H'' \pm R_m \operatorname{tg} \delta \cdot \gamma/2$) e D il dislivello $H_2 - H_1$.

I valori forniti dalle espressioni [1] e [2] sono stati calcolati, al variare delle quote H' ed H'' rispettivamente, per un compartimento della zona F' della configurazione di Hammer (5) (raggio minimo $R_1 = 390$ m; raggio massimo $R_2 = 895$ m; il numero dei compartimenti della zona è 8), per pendenze $\pm 0,5$ e $\pm 0,25$, che corrispondono a dislivelli massimi entro il compartimento, di circa 250 e 125 m rispettivamente (*). Per la densità σ è stato assunto il valore 2 gr/cm³.

Per valutare gli errori che si introdurrebbero con l'adozione del metodo tradizionale, si è calcolato l'apporto del corrispondente compartimento piano con quote uguali a quella media del compartimento.

In proposito si deve osservare che, per i compartimenti con quota variabile linearmente con la anomalia, i valori che convenzionalmente si adottano per le quote medie (media tra le quote massima e minima, media aritmetica delle quote, mediana delle quote) coincidono tutte con il valore H'' sopra indicato. Per i compartimenti con quote variabili linearmente con il raggio, invece, le tre medie non sono coincidenti e pertanto ciascuna di esse porta a risultati diversi. In questo caso gli errori sono stati calcolati facendo riferimento al compartimento oriz-

(*) È da notare che nel compartimento considerato sussiste la relazione $R_m \cdot \gamma \simeq R_2 - R_1$ e pertanto i dislivelli risultano circa gli stessi nei due casi.

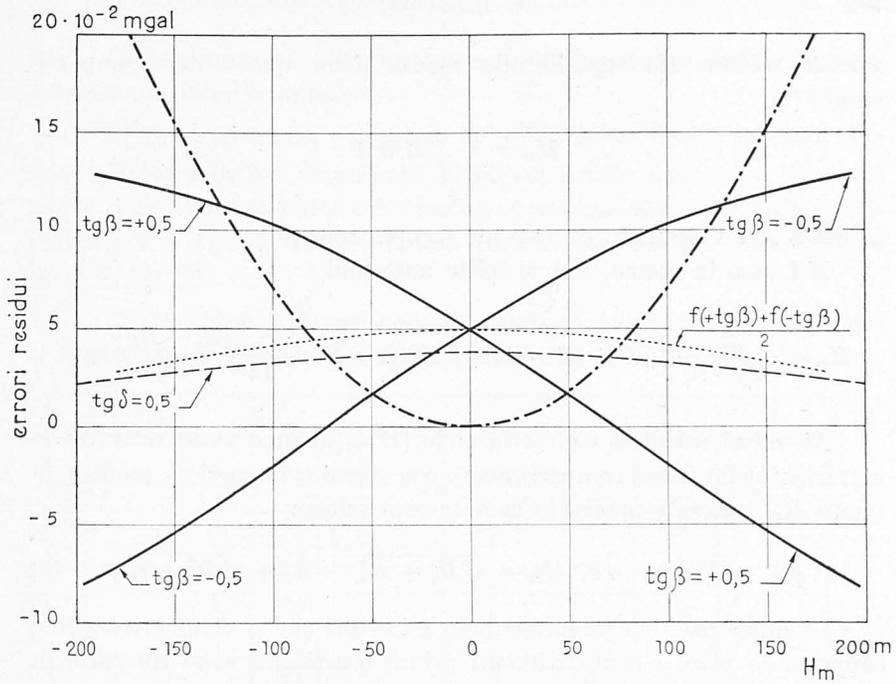


Fig. 3a - Errori residui per un compartimento della zona F di Hammer per pendenze 0,5.

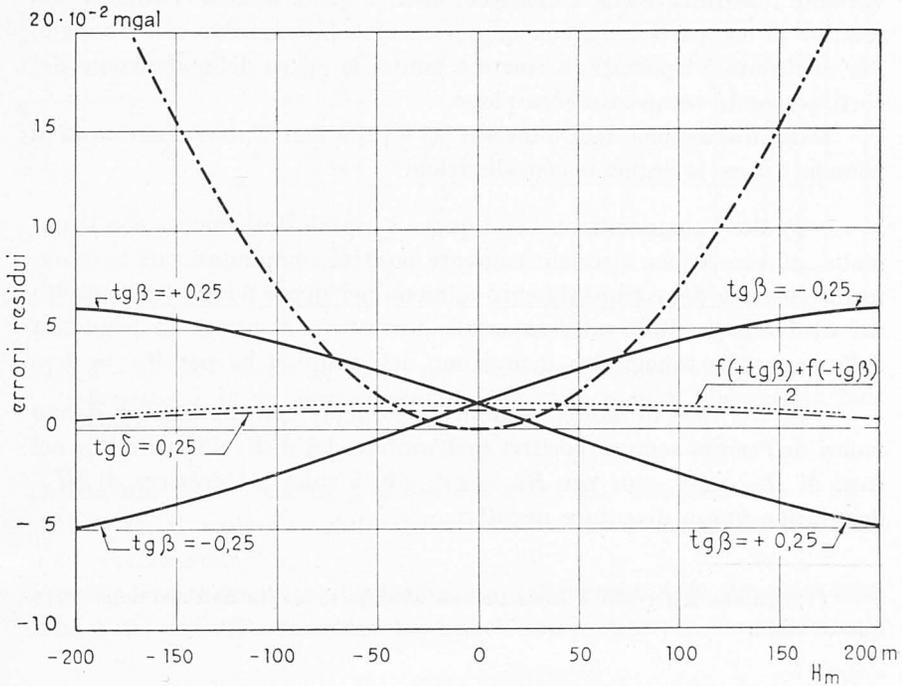


Fig. 3b - Errori residui per un compartimento della zona F di Hammer per pendenze 0,25.

zontale avente H_m uguale alla media delle quote del compartimento (*)

$$H_m = \frac{1}{A} \int_A H dA$$

in cui dA è l'elemento di area del compartimento.

Nel caso in esame, con le solite notazioni,

$$H_m = \frac{2}{R_2^2 - R_1^2} \int_{R_1}^{R_2} [H' + (R - R_m \operatorname{tg} \beta)] R dR = H' + \frac{1}{12} \frac{(R_2 - R_1)^2}{R_m} \operatorname{tg} \beta$$

Ai valori calcolati con le formule [1] e [2] sono state sottratte le attrazioni dello stesso compartimento con superficie superiore piana e di quota H_m , ricavate mediante la nota espressione:

$$g_{H_m} - K \sigma (a_2 - a_1) (R_2 - \sqrt{R_2^2 + H_m^2} - R_1 + \sqrt{R_1^2 + H_m^2}) \quad [3]$$

Le differenze, che rappresentano gli errori che si commetterebbero supponendo piani i compartimenti prima considerati sono riportate in Figura 3, separatamente per le pendenze 0,25 e 0,50.

Le due curve a tratti sono relative ai compartimenti con quote variabili linearmente con l'anomalia, mentre quelle a linea continua sono relative ai compartimenti con quote variabili linearmente con il raggio. Per confronto è riportata, a tratto e punto, la curva delle attrazioni del corrispondente compartimento piano.

Dalla discussione delle funzioni [1] e [2] e dei relativi diagrammi si possono trarre le seguenti considerazioni:

1) Per i compartimenti con quote variabili linearmente con l'anomalia, gli errori sono sistematicamente positivi, comunque vari la quota media relativa del compartimento (almeno per quote relative nell'ambito dei dislivelli possibili sulla superficie terrestre). A parità di pendenza della superficie topografica il massimo dell'errore si ha per $H_m = 0$.

2) Nel caso di quote variabili linearmente con il raggio, si hanno valori dell'errore sempre positivi (nell'ambito dei dislivelli possibili), nel caso di $H_m \cdot \operatorname{tg} \beta < 0$; per $H_m \cdot \operatorname{tg} \beta > 0$, i valori al crescere di $|H_m|$ decrescono fino a diventare negativi.

(*) Questa del resto è la tendenza attuale derivata dall'uso delle carte quadrettate.

3) Al decrescere delle pendenze, i valori assoluti degli errori diminuiscono notevolmente.

4) Per una stessa pendenza $|\text{tg } \beta|$, la curva media indicata con linea punteggiata nei diagrammi di Figura 1 delle due curve calcolate per $\text{tg } \beta$ positivo e negativo è con buona approssimazione simile alla curva valida per il caso di quote variabili linearmente con l'anomalia quando $\text{tg } \delta = |\text{tg } \beta|$.

5) Gli errori derivanti dalla schematizzazione classica possono essere notevoli ed in alcuni casi non tollerabili. Ad es. nel caso del com-

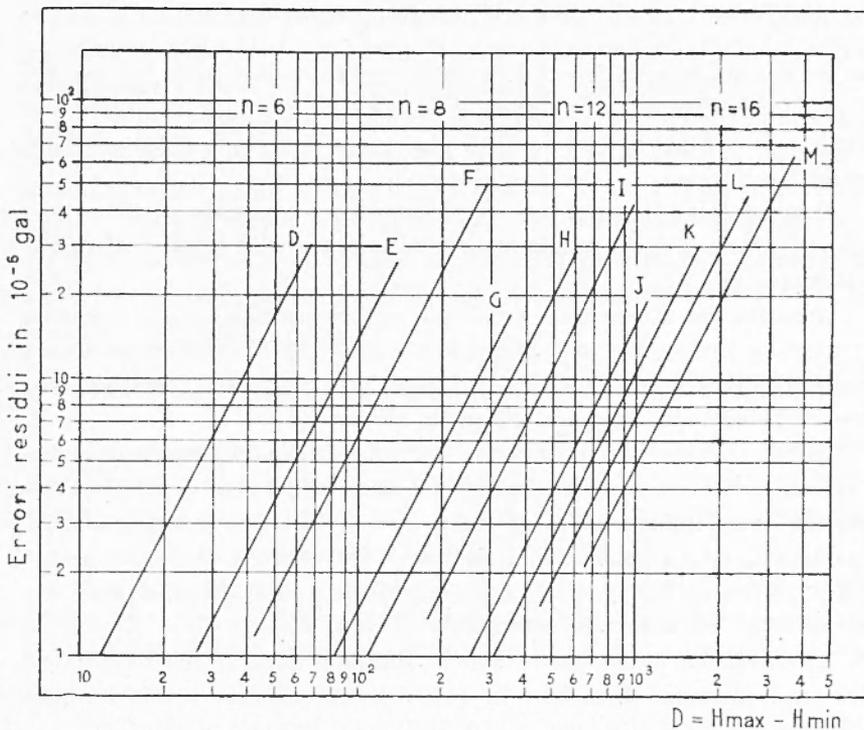


Fig. 4 - Errori residui massimi per variazione lineare delle quote con l'anomalia, in un compartimento delle varie zone di Hammer in funzione del dislivello massimo nel compartimento.

partimento citato, per $\text{tg } \beta = - 0,5$ e per H_m compresi tra $- 50$ e $+ 125$ m, il valore assoluto dell'errore residuo è maggiore di quello della correzione.

Per fornire un ordine di grandezza di tali errori residui al variare delle zone e del dislivello massimo nei singoli compartimenti, sono stati cal-

colati i valori degli errori, per un compartimento generico delle varie zone della configurazione di Hammer, mediante la espressione [2], supponendo $H_m = 0$. I valori degli errori sono riportati nella Figura 4.

6) Al variare della orientazione della pendenza media della superficie topografica, gli errori, soprattutto nel caso di valori assoluti H_m grandi, variano in una gamma molto ampia.

3. — ANALISI DEGLI ERRORI RESIDUI DI UN COMPLESSO DI ZONE IN FUNZIONE DELLA DISTRIBUZIONE DELLE PENDENZE.

Se si considera un'intera zona od un complesso di zone, l'errore residuo complessivo sarà ovviamente la somma degli errori residui dei singoli compartimenti; errori questi che, come si è visto, possono essere negativi o positivi.

Il segno dell'errore residuo complessivo dipenderà dalla distribuzione delle orientazioni delle pendenze e delle quote medie intorno al punto di stazione.

A parità del valore della pendenza, se prevarranno i compartimenti a variazione delle quote con il raggio con $H_m \cdot \operatorname{tg} \beta > 0$, l'errore totale residuo risulterà negativo, cioè il valore della correzione calcolato con le normali Tabelle sarà maggiore di quello esatto.

Per es. consideriamo il caso limite di una stazione situata sulla vetta di un rilievo isolato rappresentabile con un cono ad asse verticale. Supponiamo che il rilievo abbia un diametro uguale a quello esterno della zona I della configurazione di Hammer (⁵) (m 8938) e pendenza media, $\operatorname{tg} \beta$, uguale al 20%. La quota della sommità su cui è situata la stazione è di m 893,8 rispetto alla pianura circostante.

La correzione esatta per le zone di Hammer dalla *D* alla *I* comprese (cioè tra le distanze di m 53 e m 4469) si può calcolare con la formula di Joung

$$g = 2 \pi k \sigma (R_2 - R_1) (1 - \cos \beta)$$

e risulta di 7,18 mgal.

La correzione calcolata con le Tabelle di Hammer è di 8,27 mgal; l'errore residuo è dunque di — 1,09 mgal.

Un caso analogo a quello citato è quello di una stazione situata nel fondo di una grande vallata; tutti i compartimenti delle zone che risultano comprese nella vallata avranno prevalente variazione delle quote

con il raggio (*) con $H_m > 0$ e $\operatorname{tg} \beta > 0$. Gli errori residui saranno perciò anche qui in massima parte negativi.

Anche nel caso di stazioni situate su di un pendio, per tutte le zone che ricadono interamente sul pendio stesso, si avrà una prevalenza di compartimenti con $\operatorname{tg} \beta \cdot H_m > 0$ e quindi un errore residuo complessivo negativo. Ciò si verifica molto spesso per le zone più vicine alla stazione.

Non appena si considerano zone che interessano aree al di fuori del pendio sul quale è situata la stazione, si potranno verificare compartimenti con $H_m \cdot \operatorname{tg} \beta < 0$ e quindi con errori residui notevoli e positivi. L'errore residuo di tali zone potrà essere allora positivo o negativo.

Se si considerano zone via via più lontane, vi sarà sempre maggiore probabilità che le pendenze medie dei vari compartimenti siano orientate casualmente, cioè che nel complesso ad un compartimento con $\operatorname{tg} \beta \cdot H_m < 0$ ne corrisponda un altro con uguali valori assoluti delle quote medie relative e delle pendenze, ma con $H_m \cdot \operatorname{tg} \beta > 0$. In tal caso la somma dei due errori è un numero positivo (**). Se si considerano poi anche i compartimenti con variazione prevalentemente angolare delle quote, il cui errore residuo è sistematicamente positivo, si possono ottenere errori complessivi positivi di non trascurabile entità.

4. - ANALISI STATISTICA SU ALCUNE STAZIONI DI UN RILIEVO IN TOSCANA.

Un esempio nel quale si è potuto rilevare la validità delle considerazioni esposte nel paragrafo precedente è fornito dai risultati di un rilievo gravimetrico regionale della zona del Monte Amiata, già ricordato nella nota citata (***) (1, 4).

Si riportano dapprima i risultati di una analisi statistica della distribuzione delle orientazioni delle pendenze prevalenti relative ai compartimenti delle zone dalla *D* alla *J* della configurazione di Hammer per alcune stazioni del rilievo stesso.

Fra tutte le stazioni sono state scelte, per ogni tavoletta al 25.000 dell'I.G.M., tre stazioni situate verso il centro delle tavolette stesse.

(*) Si eccettuano i compartimenti ricadenti nel fondo della vallata nei quali la variazione delle quote risulta prevalentemente angolare.

(**) La curva media delle due correzioni assume sempre valori positivi come indicato dalle linee punteggiate della Fig. 3.

(***) In tale rilievo si era cercato di situare le stazioni in luoghi quanto possibile pianeggianti o piani. Pertanto le prime zone (almeno fino a 200 m dalle stazioni) ricadono in casi di prevalente variazione radiale delle quote con $\operatorname{tg} \beta \cdot H_m > 0$.

Le stazioni prese in considerazione sono state complessivamente 52 (*). Per ogni compartimento delle varie zone è stata valutata la orientazione prevalente delle pendenze della superficie topografica; in base a ciò i compartimenti sono stati classificati in 6 gruppi:

- gruppo 1: compartimenti a superficie pianeggiante o quasi pianeggiante;
- gruppo 2: compartimenti con variazioni delle quote prevalentemente radiali con $H_m \simeq 0$;
- gruppo 3: compartimenti con variazioni delle quote prevalentemente radiali ma con pendenze ugualmente distribuite nei due sensi;
- gruppo 4: compartimenti con variazioni delle quote prevalentemente radiali con $H_m \cdot \operatorname{tg} \beta > 0$;
- gruppo 5: compartimenti con variazioni delle quote prevalentemente radiali con $H_m \cdot \operatorname{tg} \beta < 0$;
- gruppo 6: compartimenti con variazioni delle quote prevalentemente angolari.

Per avere una idea immediata sugli errori residui da attribuirsi ai singoli gruppi, si possono riprendere in esame i diagrammi di Fig. 3. Non si considerano ovviamente i compartimenti del gruppo 1 che non debbono essere corretti; per ogni data pendenza i compartimenti del gruppo 2 sono quelli il cui errore residuo ricade nella zona delle intersezioni delle curve degli errori residui; quelli del gruppo 3 sono quelli il cui errore residuo ricade sulla curva mediana punteggiata; quelli del gruppo 4 sui due rami più bassi dei diagrammi; quelli del gruppo 5 sui due rami più alti; quelli del gruppo 6 sulla curva $\operatorname{tg} \delta = \operatorname{cost}$.

Per una analisi globale, i compartimenti a prevalente variazione radiale delle quote sono suddivisi in due gruppi indicati con le lettere *A* e *B*. Nel gruppo *A* si sono posti tutti i compartimenti del gruppo 4 e la metà di quelli dei gruppi 2 e 3; nel gruppo *B* quelli del gruppo 5 e l'altra metà di quelli dei gruppi 2 e 3 (vedi Tabella I a pag. seguente).

Osservando tale Tabella si nota che, passando a zone via via più lontane, il rapporto *A/B* diminuisce pur mantenendosi sempre superiore all'unità. Mentre per la zona *E* esso è 4,14, già nella zona *F* esso risulta prossimo a 2.

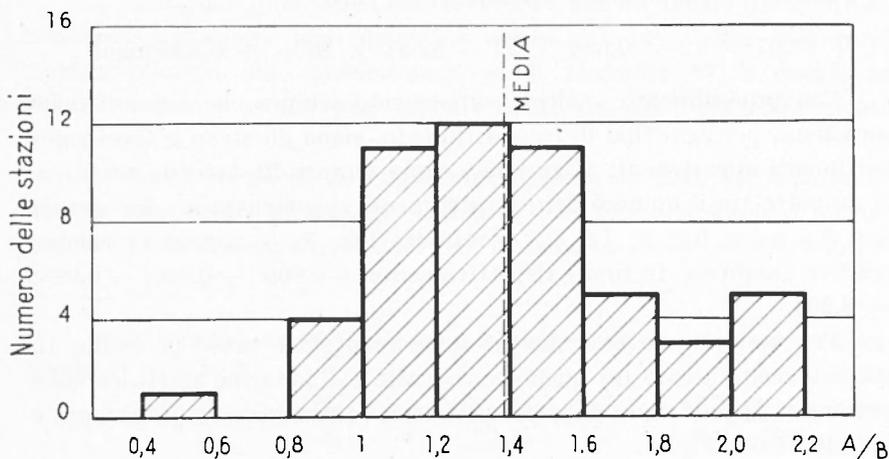
(*) Il numero delle stazioni esaminate era 67. In base ad una primissima analisi si scartarono dall'indagine 15 stazioni, 7 perchè in zone pianeggianti per larga estensione e 8 perchè situate verso la sommità dei principali monti della zona: Monte Amiata, Monte Civitella, Monte Labbro.

Bisogna ricordare che il rapporto $A/B = 1$ indicherebbe che è verificata la condizione di distribuzione casuale nelle pendenze, per i compartimenti a prevalente variazione radiale delle quote.

Tabella I

Zona di Hammer	Gr.po 1	Gr.po 2	Gr.po 3	Gr.po 4	Gr.po 5	Gr.po 6	Gr.po A	Gr.po B	A/B
E	75	32	24	179	22	84	207	50	4,14
F	31	34	52	143	46	110	186	89	2,08
G	75	58	60	177	98	156	236	157	1,50
H	69	70	122	141	106	116	237	202	1,17
I	82	68	76	154	114	130	226	186	1,21
J	184	72	78	203	155	140	278	230	1,21
Totale F-I	441	302	388	818	519	653	1163	864	1,35

Oltre i risultati dell'analisi globale per le varie zone di tutte le stazioni considerate, si riportano anche i risultati dell'analisi per le singole stazioni.


 Fig. 5 - Istogramma del numero delle stazioni in funzione del rapporto A/B .

Nella Fig. 5 è riportato l'istogramma del numero delle stazioni per le quali il rapporto tra il numero dei compartimenti ascrivibili al gruppo A

e quello dei compartimenti del gruppo B , per il complesso delle zone F - J di Hammer, è compreso nelle classi indicate in ascissa. Si può notare che per il 75% delle stazioni il rapporto A/B è compreso tra 1 ed 1,8 e che la media dei rapporti è 1,39.

Le variazioni del rapporto A/B comportano in media variazioni nell'errore residuo totale nel senso che a rapporti A/B alti (maggiori ad es. di 1,8) dovrebbero corrispondere errori residui totali negativi, mentre a rapporti A/B bassi (ad es. inferiori di 1,8) dovrebbero corrispondere errori residui totali negativi.

Come esempio consideriamo 50 compartimenti di una stazione e supponiamo che il numero dei compartimenti appartenenti ai vari gruppi (gruppo 6, A e B) stiano tra loro come il numero totale dei compartimenti appartenenti ai vari gruppi per le zone F - J indicati nella Tabella I.

In tal caso il rapporto A/B è di 1,35. I compartimenti appartenenti ai vari gruppi sarebbero 12 per il gruppo 6, 22 per il gruppo A e 16 per il gruppo B .

Supponiamo che a ciascun compartimento competano errori residui uguali a quelli calcolati per la zona F di Hammer nel caso di pendenze del 25% (vedi Fig. 3) e H_m uguale a 150 m. Per il gruppo 6 l'errore sia pertanto di + 0,007 mgal, per il gruppo A — 0,036 mgal e per il gruppo B + 0,054 mgal.

L'errore residuo totale sarebbe in tal caso

$$+ 0,007 \times 12 - 0,036 \times 22 + 0,054 \times 16 = + 0,150 \text{ mgal .}$$

Con procedimento analogo, supponendo sempre che i valori delle correzioni, per ogni tipo di compartimento, siano gli stessi e che i compartimenti appartenenti al gruppo 6 siano sempre 12, facendo assumere al rapporto tra il numero dei compartimenti appartenenti ai due gruppi A e B i valori 0,8; 1; 1,8; 2,2 (confronta Fig. 5), le correzioni residue relative sarebbero in totale rispettivamente + 0,606; + 0,426; — 0,024; — 0,204.

Per verificare le osservazioni fatte sono state prese in esame 10 stazioni scelte a caso fra quelle considerate nell'indagine statistica sulle pendenze. L'ubicazione di queste stazioni, contrassegnate da numeri, è indicata nella Fig. 6.

Per calcolare un valore sufficientemente approssimato della correzione topografica da confrontare con quello calcolato a mezzo delle tabelle di Hammer, ogni compartimento di Hammer per le zone F - J è stato suddiviso in 16 parti: si è ottenuto così una schematizzazione com-

prendente 960 compartimenti. Sono state valutate le quote medie di ciascuno dei nuovi compartimenti e calcolato il relativo apporto mediante tabelle costruite appositamente (*).



Fig. 6.

La correzione topografica così valutata è ancora affetta da un errore residuo il cui valore però dovrebbe essere il 5-10% circa dell'errore residuo relativo alla schematizzazione di Hammer(**) e quindi ai fini del presente studio può essere considerata come sufficientemente approssimata.

La quota media di ciascun compartimento di Hammer è stata ricavata come media aritmetica ponderata delle quote medie dei 16 compartimenti in cui era stato suddiviso, assumendo come pesi le relative

(*) Si è utilizzata per il calcolo la seguente espressione, ottenuta sviluppando in serie la [3]

$$\Delta g = k\sigma (a_2 - a_1) H_n \left[\frac{H_m}{R_1} \cdot \frac{a - 1}{2a} - \frac{(H_m)^3 a^3 - 1}{8a^3} + \frac{(H_m)^5 a^5 - 1}{16a^5} \dots \right]$$

nella quale $a_2 - a_1$ è l'ampiezza angolare del compartimento, a è il rapporto R_2/R_1 tra raggio esterno e raggio interno della zona ed H_m la quota media.

(**) L'errore residuo di una schematizzazione si può considerare in prima approssimazione come inversamente proporzionale al numero dei compartimenti (Vedi appendice I).

aree. In base a tali quote medie sono state calcolate le correzioni per mezzo delle tabelle di Hammer.

I valori ottenuti sono stati sottratti, sia zona per zona sia globalmente, per ogni stazione, ai valori calcolati con lo schema comprendente i 960 compartimenti. Gli scarti tra i valori considerati che rappresentano in prima approssimazione gli errori residui della schematizzazione di Hammer sono riportati nella Tabella II nella quale sono indicati anche gli errori residui totali ed i rapporti A/B per ogni stazione, sia per il complesso delle zone $F-J$ che per quello $G-J$.

Tabella II - ERRORI RESIDUI DELLA SCHEMATIZZAZIONE DI HAMMER IN 10^{-2} mgal

Punto	Zona F	Zona G	Zona H	Zona I	Zona J	Zona F-J	A/B	Zona G-J	A/B
14	- 2,2	- 0,1	+ 1,3	- 1,0	+ 0,6	- 1,4	1,92	+ 0,7	1,84
84	+ 0,4	- 0,7	+ 2,5	+ 2,7	+ 1,8	+ 6,7	1,24	+ 6,8	1,06
101	- 2,5	+ 0,4	+ 1,7	+ 1,8	+ 2,7	+ 4,1	1,32	+ 6,6	1,11
106	+ 2,1	+ 2,5	+ 1,2	+ 2,1	+ 0,4	+ 8,3	1,52	+ 6,2	1,38
147	+ 1,0	+ 0,5	+ 3,2	+ 2,5	+ 2,4	+ 9,6	1,16	+ 8,6	1,12
163	- 2,0	+ 1,4	+ 1,4	+ 2,4	+ 0,3	+ 3,5	1,83	+ 5,5	1,50
252	+ 5,2	+ 1,5	+ 0,4	+ 0,4	+ 0,3	+ 7,8	1,00	+ 2,6	1,50
377	+ 2,1	- 1,0	+ 0,5	- 0,8	+ 1,1	+ 3,9	1,69	+ 1,8	2,05
378	+ 0,3	+ 0,3	- 0,1	+ 5,1	+ 1,7	+ 7,3	1,41	+ 7,0	1,30
404	- 7,6	+ 1,4	0	+ 2,1	+ 0,3	- 3,8	2,20	+ 3,8	1,70
Medie	- 0,3	+ 0,6	+ 1,2	+ 1,7	+ 1,2				

I risultati riportati nella Tabella confermano le considerazioni fatte nel paragrafo 3; in particolare si può notare:

1) la massima parte degli errori residui, presi sia singolarmente per ogni zona e per ogni stazione, sia globalmente, sono positivi;

2) se si considerano le varie zone, i valori negativi sono più frequenti nelle zone più vicine alle stazioni (4 valori per la F e 3 per la G) mentre sono assenti nella zona J ;

3) confrontando la media per le varie zone riportate in fondo alla Tabella II con le medie corrispondenti dei rapporti A/B della Tabella I

(2,08 per la *F*, 1,50 per la *G* e 1,17; 1,21; 1,21 rispettivamente per la *H*, *I*, *J*) si può osservare che si verifica una correlazione inversa tra rapporti *A/B* ed errori;

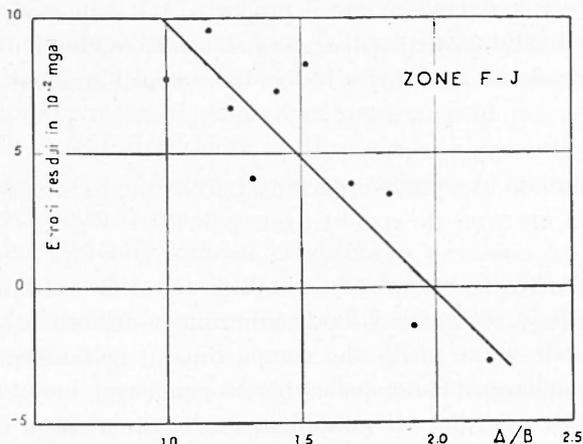


Fig. 7 - Errori residui per il complesso delle zone *F-J* in funzione del rapporto *A/B* per le 10 stazioni prese in considerazione e relativa retta di regressione.

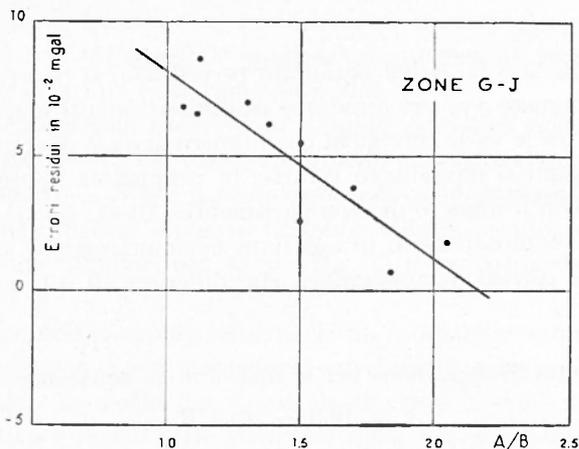


Fig. 8 - Errori residui per il complesso delle zone *G-J* in funzione del rapporto *A/B* per le 10 stazioni prese in considerazione e relativa retta di regressione.

4) anche considerando i valori relativi alle singole stazioni per i complessi delle zone *F-J* e *G-J*, si riscontra la stessa correlazione inversa.

Nelle Figg. 7 e 8 sono riportati in diagramma gli errori residui di ogni stazione in funzione del rapporto A/B separatamente per le zone $F-J$ e $G-J$ (*).

Si può perciò concludere che il rapporto A/B è in media un indice significativo di valutazione per il segno dell'errore residuo e di confronto, a parità di pendenze medie, fra valori di errori di stazioni diverse.

5. - VALUTAZIONE DI PRIMA APPROSSIMAZIONE DELLA GRANDEZZA DELL'ERRORE RESIDUO IN ALCUNI CASI.

Si è visto che gli errori residui totali di una zona o di un complesso di zone dipendono, oltre che dalla distribuzione e dell'orientamento delle pendenze e delle quote medie dei compartimenti nell'intorno della stazione, anche dalla grandezza delle singole pendenze.

Per valutare l'ordine di grandezza dell'errore residuo occorre confrontare, per alcune stazioni prese come campioni, i valori delle correzioni calcolate per mezzo della schematizzazione in esame con un valore sufficientemente approssimato della correzione stessa.

Quest'ultimo si può calcolare seguendo ad es. due metodi semirigorosi:

1) come si è fatto nel paragrafo precedente, si ricorre a suddivisioni in un numero via via crescente di compartimenti e si controllano le variazioni tra le varie correzioni con numero diverso di compartimenti. Gli errori residui si dovrebbero ridurre, in primissima approssimazione, linearmente con il numero dei compartimenti. Ad es. se quadruplicando il numero dei compartimenti di una data schematizzazione si ottiene un valore per la correzione topografica che differisce di 0,1 mgal rispetto

(*) La retta di regressione per le zone $F-J$ ha equazione

$$\varepsilon = 19,9 - 10 A/B$$

ed il coefficiente di correlazione è $- 0,87$

Per le zone $G-J$ si ha analogamente

$$\varepsilon = 15,0 - 6,9 A/B$$

ed il coefficiente di correlazione è $- 0,88$

Le correlazioni sono significative. Gli scarti rispetto alla retta di regressione sono dovuti, e a condizioni topografiche particolari, e alla influenza dei compartimenti a variazione angolare delle quote, che non compaiono nei rapporti A/B ed i cui errori residui, come già visto, sono positivi.

al valore ottenuto in base alla schematizzazione iniziale, l'errore della schematizzazione iniziale sarà in prima approssimazione uguale a

$$0,1 \cdot 4/3 = 0,13 \text{ mgal} .$$

2) Si prendono in esame per ogni compartimento i tre parametri: quota media, orientazione e valore della pendenza media, e si calcolano gli errori residui a mezzo di diagrammi simili a quelli indicati nella Fig. 3 o a mezzo di abacchi equivalenti, preventivamente costruiti per ogni zona e per ogni pendenza. L'errore residuo totale sarà la somma degli errori residui di ogni compartimento.

Ambedue i metodi indicati comportano procedimenti lunghi e laboriosi; per una valutazione di larga massima, che nella maggior parte dei casi è sufficiente, si può ricorrere a metodi più speditivi anche se meno approssimati.

In situazioni specifiche, in cui la superficie topografica in un certo intorno alla stazione sia rappresentabile con superfici semplici, si può ricorrere ad espressioni particolari quali ad es. quelle già viste per stazioni situate sulla sommità di un rilievo o quelle ricavate da C. H. Sandberg (*) per stazioni situate sul fondo o sui fianchi di vallate a V.

Non appena si considerano zone più lontane nelle quali le pendenze e le quote medie variano da compartimento a compartimento in modo irregolare, non è più possibile applicare alcun metodo semirigoroso che sia nello stesso tempo relativamente rapido.

In tal caso si può ricorrere all'indagine statistica sulla orientazione delle pendenze svolta nel paragrafo precedente e prendere in considerazione il rapporto A/B per il complesso delle zone in esame.

Un valore di tale rapporto prossimo all'unità indica che in media ad ogni compartimento con $\text{tg } \beta \cdot H_m > 0$ ne corrisponda uno con $\text{tg } \beta \cdot H_m < 0$.

Considerando le coppie formate da un compartimento del gruppo A ed uno del gruppo B cui competono valori simili delle quote H_m e delle pendenze $\text{tg } \beta$, la media dei valori degli errori residui è, come si è detto, positiva e ricade nelle vicinanze della curva relativa ai compartimenti con variazione angolare delle quote con $\text{tg } \delta = |\text{tg } \beta|$.

Anzi, se si considerano le curve delle medie tra gli errori dei compartimenti dei gruppi A e B al variare dei rapporti A/B (Fig. 9), si può notare che, con sufficiente approssimazione, si può sostituire la media degli errori con i valori del corrispondente errore per compartimenti a variazione angolare delle quote nei casi di rapporti A/B compresi tra 1 e 1,4. Per $A/B = 1,2$, in media i due valori sono molto prossimi.

In tal caso si potrebbe calcolare l'errore residuo totale considerando per ciascun compartimento, anche se a prevalente variazione radiale della quota, l'errore che si avrebbe in un compartimento a variazione angolare della quota con stessa quota media e stessa pendenza.

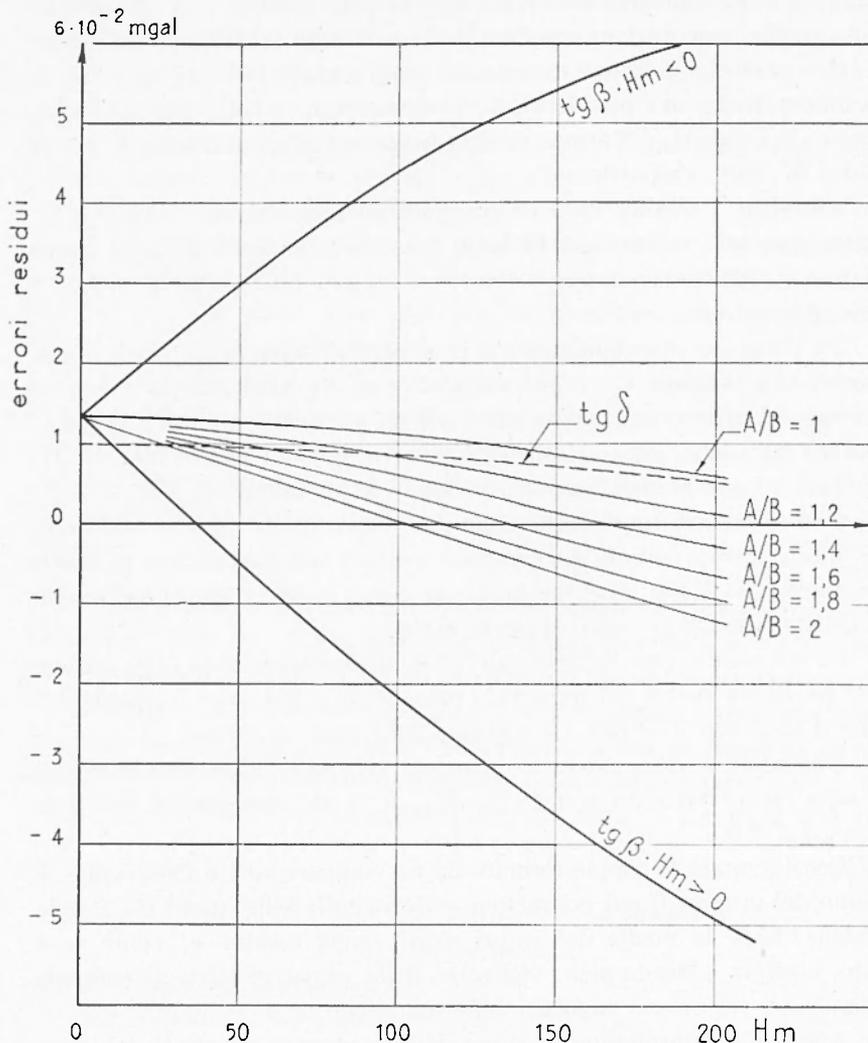


Fig. 9 - Errori residui medi dei compartimenti della zona F di Hammer a variare del rapporto A/B per pendenze di 0,25.

Nel calcolo risulterebbe così eliminato uno dei parametri che entrano nella valutazione semirigrosa dell'errore: la orientazione della pendenza della superficie topografica.

Se i rapporti A/B sono superiori ad 1,3-1,4, i valori dell'errore ottenuti applicando il metodo sopra proposto, sarebbero maggiori di quelli effettivi; essi fornirebbero quindi un limite massimo dell'entità dell'errore effettivo stesso.

Il metodo indicato dunque può portare, secondo i casi, ad un valore notevolmente approssimato dell'errore (e permettere quindi la sua eliminazione, se necessaria) o quanto meno a dare utili indicazioni di larga massima.

Esso però comporterebbe la costruzione prima e l'utilizzazione poi di diagrammi o abachi a doppia entrata ($\text{tg } \delta$ ed H_m) di scomoda lettura.

Per semplificare i calcoli si è introdotta quindi la funzione

$$\eta = \frac{1}{6} (g_{H_{\max}} + 4g_{H_m} + g_{H_{\min}}) \quad [4]$$

in cui g_H è la funzione [3] ricordata calcolata per le quote relative massima, media e minima del compartimento. Si dimostra (vedi appendice II^o) che tale funzione si approssima alla funzione [2], che fornisce l'attrazione di un compartimento con variazioni angolari delle quote, con scarti che solo eccezionalmente superano a 10^{-6} gal.

L'errore residuo dovuto alla schematizzazione in compartimenti cilindrici piani nel caso di variazione angolare delle quote, può essere pertanto calcolata mediante l'espressione: (*)

$$\begin{aligned} \varepsilon_\eta &= \frac{1}{6} (g_{H_{\max}} + 4g_{H_m} + g_{H_{\min}}) - g_{H_m} = \\ &= \frac{1}{6} (g_{H_{\max}} - 2g_{H_m} + g_{H_{\min}}) \end{aligned} \quad [5]$$

Il calcolo della [4] e della [5] è semplice e non richiede l'uso di abachi o di diagrammi particolari, in quanto utilizza le normali tabelle di correzione.

Ovviamente l'espressione [4] ha le stesse limitazioni della funzione [2] per la valutazione dell'errore globale di un gruppo di zone nel caso più generale.

Il valore della correzione calcolata con tale formula sarà perciò a sua volta affetta da un errore residuo che dipenderà dal valore di A/B , a parità di altre condizioni.

(*) L'espressione [5] è equivalente alla formula ricavata da M. Cuniatti (3) per il calcolo degli errori residui per zone con variazione angolare delle quote.

Per portare un esempio numerico si sono calcolati gli errori residui dovuti all'uso della [4] per le 10 stazioni considerate nel precedente paragrafo, relativamente ai complessi delle zone *F-J* e *G-J* della configurazione di Hammer.

Come valori di confronto, si sono considerati quelli ricavati con la suddivisione in 960 compartimenti. Nella Tabella III sono indicati i risultati dei calcoli: si riportano ordinatamente per ogni complesso di zone il rapporto A/B , l'errore residuo della suddivisione di Hammer (già indicato nella Tabella II) e l'errore residuo dovuto all'espressione [4].

Tabella III

Staz.	Zone F - J			Zone G - J		
	A/B	er. Ham.	er. F(4)	A/B	er. Ham.	er. F(4)
14	1,92	— 1,4	— 9,3	1,84	+ 0,7	— 5,8
84	1,24	+ 6,7	— 2,2	1,06	+ 6,8	+ 1,3
101	1,32	+ 4,1	— 4,8	1,11	+ 6,6	0
106	1,52	+ 8,3	— 2,2	1,38	+ 6,2	— 0,3
147	1,16	+ 9,6	— 0,5	1,12	+ 8,6	+ 1,6
163	1,83	+ 3,5	— 3,6	1,50	+ 5,5	— 0,2
252	1,00	+ 7,8	+ 1,7	1,50	+ 2,6	+ 0,7
377	1,69	+ 3,9	— 3,8	2,05	+ 1,8	— 4,6
378	1,41	+ 7,3	— 2,9	1,30	+ 7,0	+ 0,1
404	2,20	— 3,8	— 7,3	1,70	+ 3,8	+ 1,0

Nella Tabella III si può notare che per rapporti A/B superiori a 1,8 l'errore residuo dovuto all'applicazione della [4] è maggiore e talvolta anche di molte volte, a quello dovuto alla schematizzazione di Hammer.

In questo caso dunque l'errore residuo calcolato con la formula [5] fornirebbe valori molto superiori a quelli che si avrebbero applicando i metodi semirigorosi. Si avrebbe cioè solo una valutazione del limite massimo dell'entità dell'errore.

Nel caso di rapporto A/B compreso tra 1,8 e 1,6 (punto 377 zone *F-J*) gli errori residui sono, nei due casi, quasi uguali ma di segno op-

posto. L'errore residuo calcolato con la [5] avrebbe pertanto un valore doppio di quello effettivo.

Per valori A/B inferiori ad 1,6, se si accetta il numero 101 per le zone $F-J$, i valori degli errori residui dovuti all'espressione [4] sono quasi sempre inferiori di oltre il 30% a quelli dovuti alle schematizzazioni di Hammer.

In questi casi l'applicazione della [5] porta risultati sufficientemente approssimati, tanto da permettere una correzione dell'errore stesso, se necessario.

Per l'uso della [5] è necessario leggere sulle carte topografiche, oltre la quota media, anche le quote massime e minime, limitatamente però a quei compartimenti il cui dislivello massimo superi valori tali da fornire correzioni per l'errore residuo superiori a grandezze prefissate.

Tali valori possono essere ad es. ricavati dai diagrammi di Fig. 4, o analoghi, una volta stabilita l'entità massima per l'errore residuo tollerabile per un compartimento. È ovvio che nel fissare tale entità bisogna tener conto del fatto che l'errore residuo è in media sistematico.

Nei casi in cui i rapporti A/B siano sufficientemente bassi, il metodo proposto risulta notevolmente rapido e permette di ottenere le stesse approssimazioni di sistemi molto più complicati.

Desidero ringraziare il Prof. Carmelo Aquilina, Direttore dell'Istituto di Geofisica Mineraria che è stato prodigo di suggerimenti e consigli ed i colleghi Antonio Bossola e Claudio Zacchi che hanno collaborato nei calcoli.

APPENDICE I

ERRORI RESIDUI IN FUNZIONE DEL NUMERO DEI COMPARTIMENTI.

Supponiamo di suddividere un compartimento cilindrico in n^2 parti mediante la suddivisione sia in n parti dell'ampiezza angolare del compartimento γ , sia dell'intervallo $R_2 - R_1$.

Prendiamo in esame il caso di quote variabili linearmente con la anomalia; la funzione [2] del testo sviluppata in serie dà:

$$\begin{aligned}
 g = K\sigma\gamma \left\{ R \right\} & \frac{1}{2} \left(\frac{H_m}{R} \right)^2 + \frac{1}{6} \left(\frac{D}{2R} \right)^2 - \frac{1}{8} \left(\frac{H_m}{R} \right)^4 - \frac{1}{4} \left(\frac{H_m}{R} \right)^2 \left(\frac{D}{2R} \right)^2 - \\
 & - \frac{1}{40} \left(\frac{D}{2R} \right)^4 + \frac{1}{16} \left(\frac{H_m}{R} \right)^6 + \frac{5}{16} \left(\frac{H_m}{R} \right)^4 \left(\frac{D}{2R} \right)^2 + \frac{3}{16} \left(\frac{H_m}{R} \right)^2 \left(\frac{D}{2R} \right)^4 + \\
 & + \frac{1}{7 \cdot 16} \left(\frac{D}{2R} \right)^6 + \dots \left\{ \right\}_{R_2}^{R_1} \quad [1]
 \end{aligned}$$

L'espressione [3] del testo della attrazione di un compartimento di quota H_m sviluppata in serie è:

$$g_{H_m} = K \sigma \gamma \left[R \left\{ \frac{1}{2} \left(\frac{H_m}{R} \right)^2 - \frac{1}{8} \left(\frac{H_m}{R} \right)^4 + \frac{1}{16} \left(\frac{H_m}{R} \right)^6 - \dots \right\} \right]_{R_2}^{R_1}$$

La differenza tra le due espressioni [1] e [2] è:

$$\Delta g = K \sigma \gamma \left[R \left\{ \frac{1}{6} \left(\frac{D}{2R} \right)^2 - \frac{1}{4} \left(\frac{H_m}{R} \right)^4 \left(\frac{D}{2R} \right)^2 - \frac{1}{40} \left(\frac{D}{2R} \right)^4 + \frac{5}{16} \left(\frac{H_m}{R} \right)^6 \left(\frac{D}{2R} \right)^2 + \frac{3}{16} \left(\frac{H_m}{R} \right)^2 \left(\frac{D}{2R} \right)^4 + \frac{1}{7 \cdot 16} \left(\frac{D}{2R} \right)^6 + \dots \right\} \right]_{R_2}^{R_1} (*) \quad [3]$$

Per una valutazione dell'ordine di grandezza dell'errore consideriamo solo il primo termine della serie [3].

Ricordando che $D = \gamma R_m \operatorname{tg} \delta$

$$\Delta g \simeq \frac{K \sigma}{24} \gamma^3 R_m^2 \operatorname{tg}^2 \delta \left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2} \right)$$

con l'approssimazione $R_1 \cdot R_2 \simeq R_m^2$ l'espressione sopra scritta diventa:

$$\Delta g = \frac{K \sigma}{24} \gamma^3 \operatorname{tg}^2 \delta (R_2 - R_1) \quad [4]$$

L'errore di uno degli n -nuovi compartimenti di ampiezza angolare γ/n limitati tra due circonferenze distanti $(R_2 - R_1)/n$ sarà dato da:

$$\Delta g' \simeq \frac{K \sigma}{24} \frac{\gamma^3 \operatorname{tg}^2 \delta (R_2 - R_1)}{n^3}$$

Poiché nel caso considerato gli errori sono tutti sistematicamente positivi, l'errore del complesso degli n -nuovi compartimenti sarà dato da:

$$\sum \Delta g' \simeq \frac{K \sigma}{24} \frac{\gamma^3 \operatorname{tg}^2 \delta (R_2 - R_1)}{n^2} \quad [5]$$

Confrontando la [5] con la [4], si può concludere che in prima approssimazione la suddivisione di un compartimento in n -compartimenti minori porta ad una riduzione dell'errore di n -volte, ciò significa che l'errore decresce linearmente con l'aumento del numero dei compartimenti.

(*) La serie [3], limitata ai primi tre termini coincide con la espressione della correzione per distribuzione angolare ricavata da M. Cuniati (3).

APPENDICE II

La funzione

$$\eta = \frac{1}{6} (g_{H_{\max}} + 4g_{H_m} + g_{H_{\min}})$$

in cui g_H è la funzione [3] del testo calcolata per le quote relative massima media e minima del compartimento, sviluppata in serie da:

$$\begin{aligned} \eta = K\sigma\gamma \left\{ R \right\} & \left[\frac{1}{2} \left(\frac{H_m}{R} \right)^2 + \frac{1}{6} \left(\frac{D}{2R} \right)^2 - \frac{1}{8} \left(\frac{H_m}{R} \right)^4 - \frac{1}{4} \left(\frac{H_m}{R} \right)^2 \left(\frac{D}{2R} \right)^2 - \right. \\ & - \frac{1}{24} \left(\frac{D}{2R} \right)^4 + \frac{1}{16} \left(\frac{H_m}{R} \right)^6 + \frac{5}{16} \left(\frac{H_m}{R} \right)^4 \left(\frac{D}{2R} \right)^2 + \frac{5}{16} \left(\frac{H_m}{R} \right)^2 \left(\frac{D}{2R} \right)^4 + \\ & \left. + \frac{1}{16} \left(\frac{D}{2R} \right)^6 + \dots \right]_{R_2}^{R_1} \end{aligned}$$

Sottraendo l'espressione su scritta alla [1] dell'appendice I che fornisce il valore esatto della correzione topografica nel caso di variazione lineare della quota con la anomalia, si ha:

$$\Delta = K\sigma\gamma \left\{ \frac{1}{8} R \left(\frac{D}{2R} \right)^4 \right\} - \frac{2}{15} + \left(\frac{H}{R} \right)^2 - \frac{3}{7} \left(\frac{D}{2R} \right)^2 + \dots \left\{ \right\}_{R_2}^{R_1}$$

Tale differenza è funzione dei termini di grado elevato delle funzioni sopra viste, che, nei casi interessanti il presente studio, convergono rapidamente. Per avere un ordine di grandezza massimo del valore di tale differenza, si può considerare la zona F di Hammer per la quale è massimo il rapporto R_2/R_1 : per $\text{tg } \delta = 0,50$ ed $H_m = 200$ m la differenza è di $1,02 \cdot 10^{-6}$ gal.

BIBLIOGRAFIA

- (¹) M. BERNABINI, *Sulla correzione topografica nei rilievi gravimetrici geominerari*. « Annali di Geofisica » XV, 1, (1963).
- (²) G. CASSINIS, P. DORE, S. BALLARIN, *Tavole fondamentali per la riduzione dei valori osservati della gravità*. Pubblicazione della R. Commissione Geodetica Italiana, Nuova serie n. 13 (1937).
- (³) M. CUNIETTI, *Natura ed entità degli errori nelle riduzioni topografiche ed isostatiche dei valori della gravità*. « Annali di Geofisica » 1-4, (1948).

- (⁴) F. FALINI, *Notizie preliminari su una campagna di indagini e ricerche per minerali di mercurio nella regione del M. Amiata*. Periodico di Mineralogia XXXIX, 1, (1960).
 - (⁵) S. HAMMER, *Terrain correction for gravimetric stations*. « Geophysics » IV, 3, (1939).
 - (⁶) M. K. KUBERT, *Gravitational terrain effects for two-dimensional topographic features*. « Geophysics » XIII, 2, (1948).
 - (⁷) P. LEJAY, *Developpements modernes de la gravimetrie*. Gauthier-Villars, Paris 1947.
 - (⁸) C. H. SANDBERG, *Terrain correction for an inclined plane in gravity computations*. « Geophysics » XXIII, 4, (1958).
 - (⁹) L. SOLAINI, *Sulla riduzione topografica delle misure di gravità*. « Rivista Geomineraria » 2-3, 1943.
-