

Teoria e caratteristiche di due onde superficiali dispersive vibranti nel piano principale

E. PERRI

ricevuto il 26 ottobre 1959

PREMESSE E RIASSUNTO

Lo spunto alle ricerche in argomento trae origine da studi sperimentali a suo tempo effettuati dall'A. — I risultati, portati sul piano teorico, hanno comprovato una volta di più la possibile esistenza di onde superficiali *non riconducibili* ai classici prototipi di Rayleigh e Love. La opposta, ma discutibile opinione che *tutte* le onde superficiali, conosciute e da conoscere, debbano considerarsi « modificazioni » e null'altro di più dei prototipi suddetti ⁽¹⁾ è tuttora diffusa, malgrado una vasta letteratura tendente a dimostrare la individualità di onde superficiali *assolutamente estranee*. Per citarne alcune si ricorderanno le ricerche di K. Uller ⁽²⁾ e I. H. Jeans ⁽³⁾, quelle più recenti del sismologo giapponese H. Nakano ⁽⁴⁾, quelle meno recenti di E. Meissner ⁽⁵⁾ e di K. Aichi ⁽⁶⁾, nonché la interessante memoria di K. Sezawa sopra un'onda sprovvista di componente verticale e di dilatazione, relativa ad un mezzo di variabili costanti elastiche ⁽⁷⁾.

Principale scopo della presente memoria, nel pensiero dell'A., è quello di dimostrare la reale esistenza fisica di due distinguibili onde superficiali, vibranti nel piano principale, affini fra loro per costituzione, che tuttavia chiaramente si differenziano dalla classica onda di Rayleigh e da altre onde dello stesso tipo ⁽⁸⁾.

Il presente lavoro è diviso in due parti. Nella prima di esse viene analizzata e definita la costituzione dell'onda ($\mathcal{E}_1$) generica o anche detta di 1^a specie. Due equazioni di struttura, indipendenti, fissano legami definiti fra i parametri costitutivi dell'onda e le costanti elastiche del mezzo, qui supposto come un semispazio elastico, omogeneo, isotropo. Dalle equazioni suddette ricavasi la velocità di fase V_1 dell'onda. L'argomento è completato dalla determinazione dell'ellisse orbitale descritta da una particella del mezzo al passaggio dell'onda. — La seconda parte

della memoria è dedicata all'onda di *seconda specie* ($\mathcal{E}_2$), analiticamente caratterizzata dall'annullarsi di uno dei parametri fondamentali, generalmente diverso da zero nell'onda di prima specie. La velocità di fase di questa onda ($\mathcal{E}_2$) è alquanto minore di quella attribuita alla prima esaminata: se V_R è la velocità dell'onda di Rayleigh, si ha: $V_1 > V_2 > V_R$. Peculiarità relative alla propagazione e di varia indole vengono segnalate, che concorrono a confermare in modo notevole la individualità dell'onda ($\mathcal{E}$): fra queste la dispersione *anormale* della prima specie d'onda; quella all'opposto, *normale* dell'onda di seconda specie. Il lavoro si conclude colle determinazioni delle velocità di gruppo (*) delle due specie d'onda e con un diagramma spettrale della $\mathcal{E}_2$ in rapporto al coefficiente di Poisson del mezzo.

P A R T E I ^a

§ 1. — Venga considerato un semispazio infinito riempito da un mezzo elastico S_1 , isotropo, omogeneo limitato da un piano orizzontale. Un sistema di assi (x, z) è supposto legato al mezzo nel modo indicato nella figura 1. Il verso positivo dell'asse x , il cui azimuth deve intendersi generico, ha la sua origine in O .

Una perturbazione ondosa comunque generata in O può così irradiare e trasformarsi, sotto certe condizioni, in una propagazione superficiale. Poichè lo strain è considerato nel piano (x, z) , saranno considerate le sole componenti contenute nel piano verticale radiale per O . La terza componente, v , è supposta nulla.

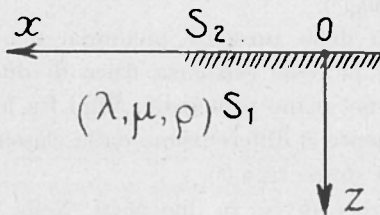


Fig. 1

In conseguenza della perturbazione prodotta scaturiranno dall'origine onde longitudinali e trasversali. Concorrendo particolari condizioni cinematiche, possono stabilirsi nel mezzo onde composte superficiali,

(*) Entro limiti determinati dal calcolo.

ed in questo caso si tratterà di vibrazioni elastiche del mezzo nel piano principale.

Vengano indicate con Ψ e Θ due funzioni armoniche del tempo e dello spazio, così definite:

$$\begin{aligned}\Psi &= -Q \cdot \left\{ \exp(-\varphi + i\zeta) + \exp(-\varphi - i\zeta) \right\} \\ \Theta &= \frac{q}{i} \cdot \left\{ \exp(-\varphi + i\zeta) - \exp(-\varphi - i\zeta) \right\}\end{aligned}\quad [1]$$

nelle quali i simboli adoperati significano:

$$\begin{aligned}\varphi &= \eta_1 x + \eta_3 z & p &= 2\pi/T & f &= \alpha x + \gamma z \quad (\text{fasi iniz.}) \\ \bar{\varphi} &= \varepsilon_1 x + \varepsilon_3 z & & & & \\ \zeta &= pt - f & Q \text{ e } q, & \text{coefficienti costanti numerici.}\end{aligned}\quad [2]$$

È agevole verificare che le [1] sono tali da soddisfare le equazioni caratteristiche fondamentali dei moti vibratorii:

$$\frac{\partial^2 \Psi}{\partial t^2} = \Omega_1^2 \nabla^2 \Psi \qquad \frac{\partial^2 \Theta}{\partial t^2} = \Omega_2^2 \nabla^2 \Theta \quad [3]$$

Sotto alcune condizioni (si vedrà in seguito quali) da imporre ai parametri costitutivi delle onde dei due tipi, componenti del moto superficiale, quest'ultimo si propagherà nel mezzo; gli spostamenti totali dipenderanno da un vettore le cui componenti sono espressa da:

$$\begin{aligned}(u) &= \frac{\partial \Psi}{\partial x} - \frac{\partial \Theta}{\partial z} \\ (w) &= \frac{\partial \Psi}{\partial z} + \frac{\partial \Theta}{\partial x}\end{aligned}\quad [4]$$

Alcune delle condizioni cui si è accennato avanti sono già implicite nelle [2]. È previsto infatti che le due onde componenti abbiano la stessa pulsazione p e le stesse fasi α, γ , donde la stessa velocità di fase V_1 — per ora incognita —.

Operando la sostituzione delle [1] nelle [3], si trova che queste ultime saranno soddisfatte nel campo reale soltanto se è verificata una ulteriore doppia condizione analitica, importante per la costituzione dell'onda. La condizione è la seguente:

$$2i \left(\frac{\partial(\varphi, \bar{\varphi})}{\partial x} \frac{\partial f}{\partial x} - \frac{\partial(\varphi, \bar{\varphi})}{\partial z} \frac{\partial f}{\partial z} \right) = 0.$$

In altri termini, deve suppersi fondamentale la equazione di condizione, identica alla precedente:

$$\eta_1 \alpha + \eta_3 \gamma = \varepsilon_1 \alpha + \varepsilon_3 \gamma = 0 \quad [5]$$

I casi possibili nei quali le [5] sono identicamente soddisfatte, risultano dal prospetto seguente:

	α	γ	η_1	η_3	ε_1	ε_3	
I	$\neq 0$	$\neq 0$	0	0	0	0	(5 bis)
II	$\neq 0$	$= 0$	0	$\neq 0$	0	$\neq 0$	
III	0	$\neq 0$	$\neq 0$	0	$\neq 0$	0	
IV	$\neq 0$	$\neq 0$	$\neq 0$	$\neq 0$	$\neq 0$	$\neq 0$	

Il caso I riguarda onde piane non smorzate, del tipo armonico semplice. I casi II e III contengono le condizioni caratteristiche di smorzamento per le onde superficiali del tipo Rayleigh. Il caso IV è quello del quale intendiamo qui occuparci.

Le condizioni poste per le funzioni φ e $\bar{\varphi}$, esprimono l'esistenza di due diversi assorbimenti dell'energia per i due assi x e z , legati tuttavia dalle ovvie relazioni

$$\varepsilon_1 = k \eta_1 ; \quad \varepsilon_3 = k \eta_3 \quad [5 \text{ ter}]$$

per il fatto che, in conseguenza delle [5] deve essere:

$$\frac{\eta_1}{\eta_3} = - \frac{\gamma}{\alpha} = \frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_3} = \Phi,$$

dove Φ , è una costante numerica. Operando secondo le [1], si trova:

$$(\alpha^2 - \eta_1^2) + (\gamma^2 - \eta_3^2) = \frac{p^2}{\Omega_1^2} \quad (\text{onda condens.}) \quad [6]$$

$$(\alpha^2 - \varepsilon_1^2) + (\gamma^2 - \varepsilon_3^2) = \frac{p^2}{\Omega_2^2} \quad (\text{onda distors.}) \quad [7]$$

La [7] può scriversi anche così:

$$(\alpha^2 - k^2 \eta_1^2) + (\gamma^2 - k^2 \eta_3^2) = \frac{p^2}{\Omega_2^2} ; \quad [8]$$

donde, eliminati fra le [5], [6], [8], i termini p , γ , η , resta:

$$\frac{\alpha^2 - k^2 \eta_3^2}{\alpha^2 - \eta_3^2} = \frac{\Omega_1^2}{\Omega_2^2} = \Omega^2. \quad [9]$$

Introduciamo per brevità il nuovo simbolo Φ_2 ; si avrà:

$$\frac{\alpha^2}{\eta_3^2} = \frac{\gamma^2}{\eta_1^2} = \Phi_2^2; \text{ e quindi: } \frac{\eta_3^2 - k^2}{\eta_3^2 - 1} = \Phi_2^2 \quad [10]$$

§ 3. - *Velocità di fase V_1 dell'onda superficiale ($\mathcal{E}_1$).*

Valgono le espressioni, tra loro identiche, di questa velocità di fase:

$$V_1 = \frac{p}{\sqrt{\alpha^2 + \gamma^2}} = \Omega_1 \sqrt{1 - \left(\frac{\eta_3}{\alpha}\right)^2} = \Omega_1 \sqrt{1 - \frac{1}{\Phi_2^2}} = \Omega_1 \sqrt{\frac{1 - k^2}{\eta_3^2 - 1}} \quad [11]$$

Osservato poi che per le stesse [5] e per le [11] deve essere:

$$\frac{\eta_3^2}{\alpha^2} = \frac{\eta_3^2}{\alpha^2 + \gamma^2} (1 + \Phi_1^2) = \eta_3^2 \frac{L^2}{4\pi^2} (1 + \Phi_1^2) \quad [12]$$

In definitiva la [11] potrà scriversi:

$$V_1 = \Omega_1 \sqrt{1 - \eta_3^2 \frac{L^2}{4\pi^2} (1 + \Phi_1^2)} \quad [13]$$

Risulta così evidente che vi è dispersione *anomala*: in altri termini l'onda è costituita in modo che la sua lunghezza diminuisce quando cresce la velocità. Si può anche mettere V_1 in funzione di Ω_2 , scrivendo:

$$V_1 = \Omega_2 \sqrt{1 - \eta_3^2 k^2 \frac{L^2}{4\pi^2} (1 + \Phi_1^2)} = \Omega_2 \sqrt{1 - \frac{k^2}{\Phi_2^2}} \quad [14]$$

§ 4. - Valendoci delle [11] e delle [9], ricaviamo direttamente:

$$k^2 = \frac{1 - (V_1/\Omega_2)^2}{1 - (V_1/\Omega_1)^2} = \frac{1 - v_2^2}{1 - v_1^2} \quad [15]$$

È facile dedurre che $k < 1$. Col tendere di $k \rightarrow 0$, la velocità di fase dell'onda ($\mathcal{E}_1$) tende ad uguagliare quella Ω_2 dell'onda distorsionale pura viaggiante nello stesso mezzo. Osserviamo pure che sussistono le seguenti relazioni:

$$\eta_2^2 = \frac{1 - \frac{k^2}{\Phi_2^2}}{1 - \frac{1}{\Phi_2^2}} = \frac{\Phi_2^2 - k^2}{\Phi_2^2 - 1}; \quad [17]$$

$$\sigma = \frac{\frac{1}{2} \eta_2^2 - 1}{\eta_2^2 - 1} = \frac{1 - \frac{1}{2} (\Phi_2^2 - k^2)}{1 - k^2} = \text{coeff. di Poisson.} \quad [18]$$

§ 5. — Fra le sette grandezze: $\eta_1, \eta_3, \alpha, \gamma, \varepsilon_1, \varepsilon_3, k$, che rappresentano altrettanti parametri fisici, ovvero delle costanti relative a un determinato mezzo, intercorrono relazioni che ci interessa conoscere e che, una volta note saranno utilizzate per fissare valori concreti delle grandezze stesse in rapporto alle velocità, o altre grandezze cinematiche dell'onda stessa.

Cinque relazioni indipendenti fra i parametri succitati sono già state scritte, più avanti; esse sono le seguenti:

$$[5], - [5 \text{ bis}], - [5 \text{ ter}], - [6], - [8] -$$

Perchè il problema possa essere risolto occorre aggiungere alle sette di cui sopra altre due relazioni indipendenti. Queste saranno fornite dalle condizioni *ai limiti* e cioè, sul piano $z = 0$ dall'annullarsi delle reazioni *normali* e *tangenziali*. In simboli: $N_3 = 0$; $T_3 = T_1 = 0$. Le equazioni sono:

$$N_3 = \lambda \Delta + 2\mu \frac{\partial (w)}{\partial z} = 0. \quad [19]$$

$$T_3 = T_1 = \mu \left(\frac{\partial (w)}{\partial x} - \frac{\partial (u)}{\partial z} \right) = 0. \quad [20]$$

dove $\Delta = \text{div. } [(u), (w)]$; $\lambda, \mu =$ costanti di Lamé.

La [19], tenuto conto delle [2] - [3] - [4] - [5], dà direttamente:

$$-\left[\frac{\partial (u)}{\partial x} - \frac{\partial (w)}{\partial z} \right] = H^2 = \frac{\lambda + 2\mu}{\lambda} \quad [21]$$

e, rispettivamente, in termini reali,

$$\begin{aligned} \frac{\partial (u)}{\partial x} &= \Gamma_1 \cos \zeta + \Gamma_2 \sin \zeta \\ \frac{\partial (w)}{\partial z} &= \Gamma_3 \cos \zeta + \Gamma_4 \sin \zeta \end{aligned} \quad [22]$$

Abbiamo indicato con $\Gamma_1, \Gamma_2, \Gamma_3, \Gamma_4$, altrettante funzioni del solo spazio. La [21] si potrà scrivere nel seguente modo se riferita al piano $z = 0$.

$$-\left(\frac{\Gamma_1 \cos \zeta + \Gamma_2 \sin \zeta}{\Gamma_3 \cos \zeta + \Gamma_4 \sin \zeta} \right)_{z=0} = \dot{H}^2 = \left(1 + 2 \frac{\mu}{\lambda} \right) \quad [23]$$

Le variabili x e t , già *indipendenti* nelle singole equazioni [22], *non lo sono più nella* [23], — come è ovvio, — a causa del legame introdotto insieme alla condizione di non esistenza di reazioni elastiche sulla super-

ficie del limite $z = 0$, in corrispondenza dell'ascissa relativa al fronte d'onda in moto progressivo.

Esplicitiamo ora le funzioni $\Gamma_1, \Gamma_2, \Gamma_3, \Gamma_4$, che contengono pertanto la sola x ; esse valgono:

$$\begin{aligned}\Gamma_1 &= Q T_I (\alpha^2 - \eta_1^2) - q T_{II} k (\eta_1 \gamma + \eta_3 \alpha) \\ \Gamma_2 &= -Q T_I \cdot 2 \eta_1 \alpha + q T_{II} (k^2 \eta_1 \eta_3 - \alpha \gamma) \\ \Gamma_3 &= Q T_I (\gamma^2 - \eta_3^2) + q T_{II} k (\eta_1 \gamma + \eta_3 \alpha) \\ \Gamma_4 &= Q T_I \cdot 2 \eta_1 \alpha - q T_{II} (k^2 \eta_1 \eta_3 - \alpha \gamma)\end{aligned}\quad [24]$$

Si è posto in queste equazioni, per brevità di scrittura

$$T_I = e^{-\frac{m}{\lambda} x} \quad ; \quad T_{II} = e^{-k\varphi} \quad [24 \text{ bis}]$$

Si rileva immediatamente che $\Gamma_2 = -\Gamma_4$.

§ 6. — In base ai precedenti risultati si potrà descrivere identicamente la [23] nella forma:

$$\operatorname{tg} \zeta = \frac{\Gamma_1 + H^2 \Gamma_3}{\Gamma_2 (H^2 - 1)} \quad [25]$$

dove $H^2 - 1 = 2 \frac{\mu}{\lambda}$, essendo λ e μ le note costanti di Lamé. Osserviamo che la [23] è in effetti una funzione che contiene una relazione implicita fra spazio e tempo: in altri termini fra la coordinata x (ascissa del fronte di onda al tempo t) e il tempo stesso (fig. 2).

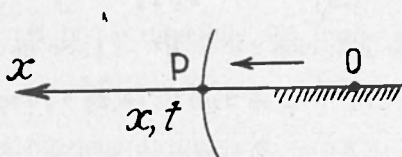


Fig. 2

Il mezzo è sottratto a tensione normale in tutti i punti già oltrepassati dal fronte d'onda nel suo moto progressivo; lo è anche da P all' ∞ , dove l'onda non è ancora pervenuta. In più lo è in P , perchè le coordinate spaziotemporali di questo punto P sono tali da soddisfare la [25]. Si può invero scrivere identicamente in luogo della [25] l'equazione seguente:

$$p t = x + \operatorname{arctg} \left(\frac{\Gamma_1 + H^2 \Gamma_3}{\Gamma_2 (H^2 - 1)} \right) \quad [25 \text{ bis}]$$

In senso sismologico quest'ultima equazione è quella di una *dromocrona*; in essa è implicita la velocità di propagazione dell'onda sul piano $z = 0$.

Differenziando la [25 bis], troviamo infatti:

$$p \cdot dt = a dx + \frac{\sigma_0' dx}{1 + \sigma_0^2} \quad [26]$$

dove σ_0 è la funzione dello spazio racchiusa fra () nella [25 bis]. Si ricava immediatamente:

$$\frac{V_1}{(V_1)_{z=0}} = 1 + \frac{1}{a} \cdot \frac{\sigma_0'}{1 + \sigma_0^2} \quad [27]$$

e pertanto la velocità, *non più costante*, dell'onda sul piano $z = 0$, sarà calcolabile colla formula:

$$(V_1)_{z=0} = \frac{V_1}{1 + \frac{1}{a} \cdot \frac{\sigma_0'}{1 + \sigma_0^2}} \quad [28]$$

Sarà in seguito possibile esprimere la stessa velocità in forma ancora più esplicita, in base ad una trasformazione della [25 bis] di cui sarà detto al seguente paragrafo.

§ 7. — Riprendendo la [25] osserviamo che essa può mettersi nella forma identica:

$$\operatorname{tg} \zeta = \frac{\Gamma_1 + \Gamma_3 + (1 + 2\varrho) \Gamma_3}{2\varrho \Gamma_2} \quad [25 \text{ ter}]$$

avendo indicato: $\varrho = \mu/\lambda$; cioè $2\varrho = H^2 - 1$. Se ne ricava:

$$\Gamma_1 + \Gamma_3 + (1 + 2\varrho) \Gamma_3 = 2\varrho \Gamma_2 \cdot \operatorname{tg} \zeta_{z=0} \quad [29]$$

Tenuta presente la [6], si rileva che sussistono le equazioni:

$$\Gamma_1 + \Gamma_3 = \frac{p^2}{\Omega_1^2} Q T_1 \quad ; \quad \Gamma_3 = \frac{p^2}{\Omega_1^2} - (\alpha^2 - \eta_1^2) + q T_1 k (\eta_1 \gamma + \eta_3 a) \quad [30]$$

Sostituendo nella [29], e riducendo, si ottiene in definitiva la seguente relazione:

$$\begin{aligned} \chi_1 \frac{p^2}{\Omega_1^2 (k^2 \eta_1 \eta_3 - a \gamma)} - \frac{\alpha^2 - \eta_1^2}{k^2 \eta_1 \eta_3 - a \gamma} + \frac{k (\eta_1 \gamma + \eta_3 a)}{k^2 \eta_1 \eta_3 - a \gamma} \cdot R \cdot e^{\delta_1 x} = \\ = \Psi_1 \left\{ \frac{2 \eta_1 a}{k^2 \eta_1 \eta_3 - a \gamma} + R \cdot e^{\delta_1 x} \right\} \cdot \operatorname{tg} \zeta_{z=0} \quad (31) \end{aligned}$$

Si è posto qui: $\chi_1 = 2 \frac{1 + \varrho}{1 + 2\varrho}$; $\tilde{\chi}_1 = \frac{2\varrho}{1 + \varrho} = (2 - \chi_1)$. Inoltre:

$$R = \frac{q}{\tilde{c}}; \quad R \cdot e^{\delta_1 x} = R \cdot e^{(1-k)\eta_1 x} = \left[\frac{q T_n}{Q T_1} \right]_{z=0} \quad [32]$$

Le altre grandezze, tutte costanti (rispetto allo stesso mezzo) che compaiono nella [31], saranno richiamate in seguito e, per brevità indicate coi simboli seguenti:

$$A = \frac{2 \eta_1 a}{k^2 \eta_1 \eta_3 - a \gamma}; \quad B = \frac{p^2}{\Omega_1^2 (k \eta_1 \eta_3 - a \gamma)}$$

$$C = \frac{a^2 - \eta_1^2}{k^2 \eta_1 \eta_3 - a \gamma}; \quad D = \frac{k (\eta_3 a + \eta_1 \gamma)}{k^2 \eta_1 \eta_3 - a \gamma}$$

Come è facile verificare, le soprascritte costanti sono tutte positive.

Fatte le necessarie sostituzioni ed alcune riduzioni, l'equazione [31] diviene:

$$-C + B \chi_1 + D \cdot R \cdot e^{\delta_1 x} = (2 - \chi_1) \cdot (-A + R \cdot e^{\delta_1 x}) \cdot \operatorname{tg} \zeta \quad [31 \text{ bis}]$$

dove si è posto, per brevità,

$$K_z = \frac{-C + \chi_1 B}{A (2 - \chi_1)}$$

$$K_1 = \frac{D (1 + \varrho)}{2 \varrho} = \frac{D}{2 - \chi_1}$$

La precedente (31 bis) è riducibile alla forma seguente:

$$K_2 + r_0 \cdot e^{\delta_1 x} K_1 = (1 - r_0 \cdot e^{\delta_1 x}) \cdot (-\operatorname{tg} \zeta) \quad [31 \text{ ter}]$$

Introdotta una funzione ausiliaria $\xi_1 = (K_1 - \operatorname{tg} \zeta)/(K_2 + \operatorname{tg} \zeta)$, si potrà identicamente in luogo della [31 ter] scrivere:

$$r_0 \cdot e^{\delta_1 x} \cdot \xi_1(x, r) = -1 \quad [34]$$

che per brevità sarà più volte utilizzata in seguito come una vera e propria *equazione di propagazione*. Reciprocamente dalla [31 ter] si trae la quantità « $\operatorname{tg} \zeta$ », scrivendo:

$$\operatorname{tg} \zeta = \frac{K_1 r_0 e^{\delta_1 x} + K_2}{r_0 e^{\delta_1 x} - 1} \quad [35]$$

In definitiva, mediante questa [35] si potrà, operando secondo la [26], esplicitare la funzione di x rappresentata dalla [28]. Dopo alcune ovvie riduzioni trovasi:

$$\Pi(x) = (K_2 + K_1) / \left(r_0 \cdot e^{\delta_1 x} (1 + K_1^2) + 2K_1 K_2 + (1 + K_2^2) \cdot \frac{e^{-\delta_2 x}}{r_0} \right) \quad [36]$$

In forma più raccolta, la velocità del fronte d'onda (traccia) sul piano $z = 0$ è data dalla formula seguente:

$$(V_1) = \frac{V_1}{1 + \frac{\delta_1}{\alpha} \Pi(x)} \quad [37]$$

Si osserverà che detto scalare è essenzialmente variabile colla distanza, come si desume dalla stessa formula. Soltanto a distanza infinita esso uguaglia quello della velocità V_1 che deve ritenersi una costante della propagazione. Se ne deduce che la dromocrona dell'onda superficiale ($\mathcal{E}_1$) sul piano limite è certamente curvilinea e, al di là di una certa distanza critica, tende asintoticamente alla retta della V_1 . Dal punto di vista fisico tale conclusione implica la reale deformazione del fronte d'onda a contatto col piano limite. A prescindere dalle conferme sperimentali tratte dallo studio di onde superficiali affini, vi sono considerazioni energetiche che inducono ad ammettere (per via teorica) che il fronte d'onda debba necessariamente deformarsi a contatto colla superficie limite, in qualunque caso, e pertanto anche nel caso della ipotetica onda piana (*).

§ 8. — Le equazioni finora trovate, dalla [25 bis] alla [32] vanno considerate come espressioni formalmente diverse di una stessa equazione di propagazione; in altri termini danno la legge spazio-tempo cui ubbidisce una perturbazione che abbia la costituzione dell'onda ($\mathcal{E}_1$), quando si allontana dal centro dal quale è scaturita.

Dal punto di vista dell'elasticità si è certi che, in base alla [21], è implicitamente soddisfatta una delle due condizioni imposte ai limiti; cioè la *non esistenza di tensioni di trazione* nei luoghi (sul piano $x-z$)

(*) Vedasi in proposito: C. SOMIGLIANA, *Sur la théorie des ondes sismiques*, « Comptes Rendus », 168, 1919: ed inoltre: C. SOMIGLIANA, *Sulle onde di Rayleigh* « Atti della R. Accad. delle Scienze di Torino », vol. 53, 1918.

in cui il fronte d'onda taglia il piano $z = 0$ e, con essi, il sopra giacente asse x . Non è meno agevole dimostrare che l'onda studiata è tale da rendere soddisfatta la seconda condizione espressa dalla [20]. Vale a dire la *non esistenza di tensioni tangenziali* sul piano $z = 0$, alla distanza x dall'origine, se x è l'ascissa del fronte d'onda. Deve essere pertanto soddisfatta la relazione ben nota fra le componenti dello « strain » tangenziale:

$$\mu \left(\frac{\partial (w)}{\partial x} + \frac{\partial (u)}{\partial z} \right) = 0 \quad [38]$$

Operando le necessarie sostituzioni, si perviene ad una equazione di condizione riducibile alle seguenti relazioni:

$$\begin{aligned} \frac{\partial (w)}{\partial x} &= \frac{\partial^2 \Psi}{\partial x \partial z} + \frac{\partial^2 \Theta}{\partial x_1} \\ \frac{\partial (u)}{\partial z} &= \frac{\partial^2 \Psi}{\partial x \partial z} - \frac{\partial^2 \Theta}{\partial z_2} \end{aligned} \quad [39]$$

Operando sulla prima delle [39], trovasi:

$$\begin{aligned} \frac{\partial (w)}{\partial x} &= \left\{ -(\eta_1 \eta_3 - \alpha \gamma) \cdot Q e^{-\varphi} - 2 k \eta \gamma e^{-k\varphi} \right\} \cos \zeta + \\ &+ \left\{ (\eta_1 \gamma + \eta_3 \alpha) Q e^{-\varphi} + (k^2 \eta_1^2 - \alpha^2) \gamma e^{-k\varphi} \right\} \sin \zeta \\ \frac{\partial (u)}{\partial z} &= \left\{ -(\eta_1 \eta_3 - \alpha \gamma) Q \cdot e^{-\varphi} - 2 k \eta_3 \gamma \cdot q \cdot e^{-k\varphi} \right\} \cos \zeta + \\ &+ \left\{ (\eta_1 \gamma + \eta_3 \alpha) \cdot Q e^{-\varphi} - (k^2 \eta_3^2 - \gamma^2) \gamma e^{-k\varphi} \right\} \sin \zeta. \end{aligned} \quad [40]$$

Sommando colla [39], secondo la precedente [38], dopo aver introdotto la sostituzione:

$$C_0 = k^2 (\eta_1^2 - \eta_3^2) - (\alpha^2 - \gamma^2) < 0 \quad [41]$$

si ottiene, a meno di un fattore esponenziale che si elide — la seguente equazione:

$$\begin{aligned} &\left\{ -(\eta_1 \eta_3 - \alpha \gamma) - 2 k \eta_3 \gamma R \cdot e^{\delta_1 x} \right\} + \\ &\left\{ -(\eta_1 \gamma + \eta_3 \alpha) - C_0 R \cdot e^{\delta_1 x} \right\} (-\operatorname{tg} \zeta) = 0 \end{aligned} \quad [41 \text{ bis}]$$

Operando ovvie riduzioni, da quest'ultima (41 bis) si ricava identicamente:

$$\frac{C_2 + C_1 r_0 e^{\delta_1 x}}{-1 + \frac{|C_0| A}{\eta_1 \gamma + \eta_3 \alpha} r_0 \cdot e^{\delta_1 x}} = \operatorname{tg} \zeta \quad [41 \text{ ter}]$$

a condizione che si intenda:

$$C_2 = -\frac{(\eta_1 \eta_3 - a \gamma)}{\eta_1 \gamma + \eta_3 a}; \quad C_1 = \frac{2 k \eta_1 a A}{\eta_1 \gamma + \eta_3 a}; \quad [42]$$

alle quali si aggiungerà la identità: $1 = \frac{|C_0| A}{\eta_1 \gamma + \eta_3 a}$ facilmente dimostrabile.

Nella sua forma ultima [41 ter] la precedente [41 bis] viene a coincidere esattamente colla [31 ter] posta più innanzi. Se ne deduce pertanto: $C_2 = K_2$, $C_1 = K_1$.

Si dimostrerà ora che $K_2 = K_1$. Sostituendo nella [41 ter], al posto del monomio $r_0 \cdot e^{\lambda x}$ l'equivalente valore $-1/\xi_1$ dato dalla [34], od esplicitamente il rapporto espresso con: $-(K_2 + \operatorname{tg} \zeta)/(K_1 - \operatorname{tg} \zeta)$, si perviene alla equazione:

$$0 = \left\{ -m (K_1 - \operatorname{tg} \zeta) - 2 k \eta_1 a A \cdot (K_2 + \operatorname{tg} \zeta) \right\} + \\ + \left\{ n (K_1 - \operatorname{tg} \zeta) + C_0 \cdot A (K_2 + \operatorname{tg} \zeta) \right\} \operatorname{tg} \zeta \quad [43]$$

dove per brevità si è posto $m = -(\eta_1 \eta_3 - a \gamma)$ ed $n = (\eta_1 \gamma + \eta_3 a)$.

È necessario che questa equazione [43] sussista per *qualunque coppia di valori* x, t se tali essi sono da soddisfare le [25]. Si ricorderà che in dette equazioni le citate variabili *non sono* più indipendenti. Perchè la condizione espressa dalla [43] sia verificata, occorre e basta che si annullino i coefficienti funzionali della [43], ovvero le espressioni chiuse fra $\{ \}$. Se ne traggono le due equazioni seguenti:

$$m \cdot (K_1 - \operatorname{tg} \zeta) = -2 k \eta_1 a A \cdot (K_2 + \operatorname{tg} \zeta) \quad [43']$$

$$n \cdot (K_1 - \operatorname{tg} \zeta) = -C_0 \cdot A \cdot (K_2 + \operatorname{tg} \zeta) \quad [43'']$$

Dividendo membro a membro, consegue:

$$\frac{m}{n} = \frac{-2 k \eta_1 a}{|C_0|} \quad [44]$$

Con che resta dimostrato in pari tempo che $K_2 = K_1$. Si osserverà qui che, utilizzando le precedenti conclusioni sarà possibile esprimere in una forma diversa la stessa [31 ter] dalla quale si era partiti, scrivendo:

$$K_1 \cdot \frac{1 + r_0 e^{\delta_1 x}}{1 - r_0 e^{\delta_1 x}} = \operatorname{tg} \zeta \quad [45]$$

ed in forma del tutto esplicita,

$$\frac{2 k \eta_1 a}{|C_0|} \cdot \frac{1 + r_0 e^{\delta_1 x}}{1 - r_0 e^{c_1 x}} = \operatorname{tg} \zeta \quad [46]$$

§ 9. — La precedente relazione [44] può essere trasformata in una equazione fra i due soli parametri Φ_2 e k . Per ottenere ciò basta moltiplicare e dividere il primo membro per la espressione $(\eta_1 \eta_3 + \alpha \gamma)$, e ridurlo ad una frazione che contiene soltanto Φ_2 e Φ_1 . Operando si trova:

$$\frac{m}{n} = \frac{\Phi_1 (\Phi_2^2 - 1)}{\Phi_2 (\Phi_1^2 - 1)} \quad [47]$$

Analogamente, dopo alcune ovvie riduzioni, tenuta presente la [41], si ottiene dal secondo membro:

$$\frac{-2 k \eta_1 a}{|C_0|} = \frac{4 k \Phi_1 \Phi_2}{(k^2 + \Phi_2^2) (1 - \Phi_1^2)} \quad [48]$$

Eguagliando fra loro i secondi membri delle [47] e [48] si giunge alla seguente equazione in k e Φ_2 , di notevole importanza nella teoria dell'onda ($\mathcal{E}_1$):

$$\Phi_2^2 - 1 = \frac{4 k \Phi_2^2}{k^2 + \Phi_2^2} \quad [49]$$

preferibilmente scritta in seguito nella forma di un trinomio quadratico:

$$k^2 - \frac{4 k \Phi_2^2}{\Phi_2^2 - 1} + \Phi_2^2 = 0. \quad [50]$$

Ho dato a tale equazione il nome di seconda equazione di struttura dell'onda ($\mathcal{E}_1$) perchè scaturita dalla seconda condizione ai limiti, imposta dalla ipotetica inesistenza di tensioni tangenziali sul piano limite $z = 0$, in conformità della [38].

Risolvendola in k , si trova:

$$k = \frac{2 \Phi_2^2}{\Phi_2^2 - 1} \left\{ 1 - \sqrt{1 - \frac{(\Phi_2^2 - 1)^2}{4 \Phi_2^2}} \right\}. \quad [51]$$

Questa [51] consente un'agevole tabellazione di k in funzione della sola Φ_2 . Per detto motivo ho ritenuta opportuna la scelta di Φ_2 come *parametro libero* dal quale far dipendere tutti i rimanenti, nonché le altre grandezze numeriche legate comunque alle costanti elastiche del mezzo. In base a questo procedimento restano determinati i limiti di variabilità di Φ_2^2 in dipendenza s'intende della oscillazione che la teoria dell'elasticità prevede per la costante prescelta. Ricorrendo al *coefficiente*

di Poisson, — che in questo ordine di ricerche svolge il ruolo di un vero e proprio modulo geofisico, — il calcolo è il seguente.

Dalla [9] si trae la [17] per cui:

$$\mathcal{H}^2 = \frac{\Phi_2^2 - k^2}{\Phi_2^2 - 1}. \quad [52]$$

Per la seconda delle [18] si ha:

$$\sigma = \frac{1}{2} \cdot \frac{2 - \Phi_2^2 - k^2}{1 - k^2}. \quad [53]$$

Per $\sigma = \frac{1}{2}$, deve essere $2 - \Phi_2^2 = 1$; dunque $\min \cdot \Phi_2^2 = 1$.

Il valor massimo di Φ_2^2 si ricava dal corrispondente valor nullo di σ . Sussiste la relazione:

$$k^2 + \max \cdot \Phi_2^2 = 2. \quad [54]$$

Anzi che sostituire questo risultato nella [50] e poi risolvere in Φ_2^2 , è preferibile ricorrere alle approssimazioni successive. Si trova in definitiva essere $\max \cdot \Phi_2^2 = 1,94122\dots$. A parte i calcoli, la convergenza dei valori è rapida.

Nella Tabella I, che segue a pag. 15 sono stati raccolti, per questa prima specie di onda, valori discreti per i parametri più importanti, e cioè:

$$k, k^2, v_1^2, v_2^2, v_1, v_2.$$

Tabella I. — ONDA DI 1^a SPECIE (ξ_1).

$\Phi_{21} (*)$	1.	1,1025	1,2100	1,4400	1,6900	1,9412	parametro libero
k_1	0.	0,0255	0,0606	0,1108	0,1753	0,2491	(51)
k_1^2	0.	0,00065	0,0037	0,0123	0,0307	0,0621	
$\mathcal{H}^2$	∞	10,6928	5,7442	3,1709	2,4047	2,0000	(17)=(52)
σ	0,5000	0,4483	0,3496	0,2697	0,1440	0,0000	(53)=(18)
v_{21}^2	1.	0,9993	0,9969	0,9915	0,9818	0,9680	(14)
v_{21}	1.	0,9974	0,9985	0,9957	0,9907	0,9839	(14)
v_{11}^2	0.	0,0929	0,1736	0,3056	0,4051	0,4782	(13)
v_{11}	0.	0,3084	0,4166	0,5528	0,6465	0,6915	
$q = \frac{\mu}{\lambda}$	0.	0,11503	0,2671	0,8540	24,7196	∞	

(*) Dei due indici, il primo riguarda il significato fisico del parametro, il secondo la specie (1^a e 2^a) dell'onda. Dove non vi è possibilità di equivoco, il secondo indice viene omissso. Soltanto per k l'unico indice (1, 2) deve essere attribuito alla specie d'onda.

ed infine il rapporto o fra le costanti elastiche del Lamé. I valori tabellari sono stati, ottenuti tutti con calcoli diretti, procedendo dal parametro libero Φ_2^2 , entro i limiti di oscillazione previsti dalla teoria. La Tabella offre la possibilità di determinare valori intermedi dei parametri suddetti col sussidio della interpolazione. Soprattutto per i valori di σ , prossimi a quelli comunemente ammessi nei calcoli geofisici, la interpolazione dà soddisfacenti risultati.

§ 10. — Per la [34] era stata stabilita una implicita equazione di propagazione:

$$r_0 e^{\delta \cdot x} \cdot \xi = 1 \quad [55]$$

che sarà utile qui richiamare. Dimostriamo che al tendere di x ad un certo valore finito, il corrispettivo valore di ξ è l'unità. Anzitutto è ovvio, dalla stessa [33] che per $\text{tg } \zeta \rightarrow \infty$ è $\xi \rightarrow 1$. Per la [25] sussiste infatti la relazione: $\text{tg } \zeta = \frac{\Gamma_1 + H^2 \Gamma_2}{\Gamma_2 \cdot (H^2 - 1)}$ dalla quale appare chiaro che per $\text{tg } \zeta \rightarrow \infty$ deve necessariamente essere $\Gamma_2 \rightarrow 0$; (con $\Gamma_1 + H \cdot \Gamma_3 \neq 0$.)

Per la 2^a delle [24], al limite e per una certa (x) , sarà verificata la equazione:

$$\left[-Q T_I \right]_{x \rightarrow (x)} \cdot 2 \eta_1 \alpha + \left[q T_{II} \right]_{x \rightarrow (x)} \cdot (k \eta_1 \eta_3 - \alpha \gamma) = 0.$$

Questa *soluzione particolare*, $x = (x)$, ci consente così di impostare una relazione fra i parametri noti, che si può trascrivere nel modo seguente:

$$\left[\frac{q T_{II}}{Q T_I} \right]_{x \rightarrow (x)} = \frac{2 \eta_1 \alpha}{k^2 \eta_1 \eta_3 - \alpha \gamma} = R \cdot e^{\frac{\delta \cdot (x)}{1^{\text{m}}}} \quad [56 \text{ bis}]$$

Tenendo ben presente che $\delta_1 = (1 - k) \eta_1$, (sul piano $z = 0$).

Alla particolare ascissa (x) , che soddisfa le [56] e la [56 bis], corrisponderà necessariamente un certo valore del tempo (t) , ricavabile dalla stessa equazione di propagazione, ovvero dalla dromocroma dell'onda. Osserviamo a questo punto che, per essere $\lim (F_2) = 0$, *puntualmente* sarà verificata l'equazione [23] per $x = (x)$. Cioè sarà:

$$\lim_{x \rightarrow (x)} \left(- \frac{\Gamma_1}{\Gamma_3} \right) = H^2 \quad [57]$$

La [56 bis] può anche scriversi nella forma:

$$\left[\frac{q T_{II}}{Q T_I} \right]_{x \rightarrow (x)} = A; \quad [58]$$

dove si è indicata con la lettera A la *costante* già definita colla prima delle [33], e che si identifica col rapporto a secondo membro della [56 bis]. Ciò posto, è opportuno riprodurre la [57], utilizzando le sostituzioni precedenti. Ciò si farà traendo dalle [24] le Γ_1 e Γ_3 le espressioni relative.

Si avrà, dopo ovvie riduzioni, la seguente relazione parametrica:

$$\frac{(\alpha^2 - \eta_1^2) - A k (\eta_1 \gamma + \eta_3 \alpha)}{(\gamma^2 - \eta_3^2) + A k (\eta_1 \gamma + \eta_3 \alpha)} = -H^2 \quad [59]$$

Sviluppata e ridotta, è questa l'equazione da me chiamata I^a di *struttura*. Essa non contiene le variabili x, z, t , ma collega fra loro tutti i parametri fisici dell'onda, in modo implicito od esplicito. — Osservato che, dopo aver effettuato alcune ovvie riduzioni, si può scrivere:

$$A = \frac{2 \Phi_2^2}{\Phi_2^2 + k^2},$$

la equazione I^a di struttura, non meno importante di quella 2^a trovata in precedenza, [50], si presenta nei termini seguenti:

$$\Phi_1^2 - \Phi_2^2 + H^2 (1 - \Phi_1^2 \Phi_2^2) = (1 - \Phi_1^2) \Phi_3^2 \quad [60]$$

dove, per brevità, si è posto:

$$\Phi_3^2 = \frac{2 k \Phi_2^2 \cdot (H^2 - 1)}{k^2 + \Phi_2^2} \quad [61]$$

§ 11. — La [60], risolta in Φ_1^2 , ci consente di esplicitare questo parametro di notevole importanza nella teoria dell'onda (6). Troviamo:

$$\Phi_1^2 = \frac{H^2 - \Phi_3^2 - \Phi_2^2}{H^2 \Phi_2^2 - \Phi_3^2 - 1} \quad [62]$$

Si comprende come uno studio della correlazione esistente fra le costanti elastiche del mezzo ed i vari parametri usati in questa teoria, debba preferibilmente impostarsi sulla scelta di uno di essi come *libero*: la scelta è caduta su Φ_2^2 e si giustifica con la considerazione che, nel campo fisico, la oscillazione del valore numerico di detto parametro è *minima*.

Donde il riferimento prescelto, delle grandezze fin qui esaminate in funzione diretta od indiretta di Φ_2 , come si deduce dalla precedente Tabella I.

Per gli sviluppi ulteriori si ricorderà che le [18] dànno ancora luogo alle relazioni formali:

$$\begin{aligned} \left(\frac{\eta_1}{\alpha}\right)^2 - \left(\frac{\eta_1}{\eta_3} \cdot \frac{\eta_3}{\alpha}\right)^2 &= \frac{\Phi_1^2}{\Phi_2^2} \\ \left(\frac{\eta_3}{\alpha}\right)^2 - \left(\frac{-\eta_1}{\gamma}\right)^2 &= \frac{1}{\Phi_2^2} \end{aligned} \quad [63]$$

che, unitamente alla [11 bis] dànno: $\alpha = \frac{2\pi}{L\sqrt{1+\Phi_1^2}}$; della quale ci si può valere, consentendoci di determinare i coefficienti di smorzamento η_1, η_3 (e di conseguenza gli analoghi $\varepsilon_1, \varepsilon_2$) in funzione della lunghezza d'onda L , di Φ_1 e Φ_2 . Le formule adatte al caso sono le seguenti:

$$\begin{aligned} \eta_1 &= \frac{\Phi_1}{\Phi_2} \cdot \frac{2\pi}{L\sqrt{1+\Phi_1^2}} \\ \eta_3 &= \frac{1}{\Phi_2} \cdot \frac{2}{L\sqrt{1+\Phi_1^2}} \end{aligned} \quad [63]$$

entrambi facilmente collegabili con la velocità di fase V_1 e col coefficiente k , quando siasi conosciuto il periodo T_1 dell'onda ed il rapporto di Poisson del mezzo (σ), ottenuto attraverso le formule [16] o [17].

Si osserva qui che la [59] può essere anche posta sotto una forma poco diversa, scrivendo:

$$\Phi_1^2 = \frac{H^2 - \Phi_2^2 H_1^2}{H^2 \Phi_2^2 - 1} \quad [64]$$

quando si ritenga

$$H_1^2 = \frac{1 - 2k/(k^2 + \Phi_2^2)}{1 - 2k\Phi_2^2/(k^2 + \Phi_2^2)} = \frac{k^2 + \Phi_2^2 - 2k}{k^2 + \Phi_2^2(1 - 2k)}$$

Perchè si possa ritenere *nullo* Φ_1^2 , dovrà pertanto verificarsi la condizione necessaria: $H^2/H_1^2 = \Phi_2^2$.

Queste relazioni saranno riprese in seguito, a proposito delle formule di struttura dell'onda di 2^a specie.

§ 12. — Nei precedenti paragrafi si è visto come, valendoci opportunamente delle condizioni ai limiti, e riferendoci al piano $z = 0$, sia stato possibile ricavare due importanti correlazioni, costituite appunto dalle equazioni [50] e [62].

La [50], nella forma di una 1^a equazione di struttura dell'onda ($\mathcal{E}_1$):

$$k^2 - 4k \frac{\Phi_2^2}{\Phi_3^2 - 1} + \Phi_2^2 = 0$$

esprime infatti una relazione analitica fra i numeri k e Φ_2 ; parametri già indicati come fondamentali (v. § 1 e segg.).

La [62], nella sua forma di 2^a equazione di struttura della stessa onda ($\mathcal{E}_1$):

$$\Phi_1^2 = \frac{H^2 - \Phi_3^2 - \Phi_2^2}{H^2 \Phi_3^2 - \Phi_3^2 - 1}. \quad [65]$$

Perchè si abbia un'onda della 1^a specie ($\mathcal{E}_1$), deve essere soddisfatta la condizione: $0 < \Phi_1 < 1$.

Codesti parametri Φ_1 , Φ_2 , k , rappresentano, per ogni mezzo che abbia determinate costanti elastiche, delle grandezze invariabili. Esse dunque entreranno nelle formule che definiscono le componenti degli spostamenti totali di un punto qualunque del mezzo potenziato dall'onda superficiale progressiva. Peraltro la conoscenza delle espressioni esplicite di dette componenti è necessaria per le ricerche relative alle curve orbitali di cui sarà detto al § seguente.

Come è noto dalle [4] gli spostamenti totali sono definiti dalle relazioni:

$$(u) = \frac{\partial \Psi}{\partial x} - \frac{\partial \Theta}{\partial z}; \quad (w) = \frac{\partial \Psi}{\partial z} + \frac{\partial \Theta}{\partial x}; \quad [66]$$

dove la Ψ , in termini reali, è la funzione $= -Q e^{-\bar{r}} \cos \zeta$

dove la Θ , in termini reali, è la funzione $= -q e^{-k\varphi} \sin \zeta$

Operando secondo le [66] si perviene alle espressioni seguenti:

$$\begin{aligned} (u) &= -(Q \cdot e^{-\varphi} \alpha + q e^{-k\varphi} k \eta_3) \sin \zeta + (Q e^{-\bar{r}} \eta_1 - q e^{-k\varphi} \gamma) \cos \zeta \\ (w) &= -(Q \cdot e^{-\varphi} \gamma + q e^{-k\varphi} k \eta_1) \sin \zeta + (Q e^{-\bar{r}} \eta_3 - q e^{-k\varphi} \alpha) \cos \zeta \end{aligned} \quad [66 \text{ bis}]$$

Introducendo alcune sostituzioni e riducendo si ottiene:

$$\begin{aligned} (u) &= -\frac{Q\alpha}{\Phi_2} \cdot \left\{ \Phi_2 \bar{X}_1 \sin \zeta - \bar{\Psi}_1 \bar{X}_2 \cos \zeta \right\}; \\ (w) &= +\frac{Q\alpha}{\Phi_2} \cdot \left\{ \Phi_1 \Phi_2 X_1 \sin \zeta + X_2 \cos \zeta \right\}; \end{aligned} \quad [67]$$

dove si è posto:

$$X_1 = e^{-\varphi} \left(1 - \frac{k \cdot R \cdot e^{\varphi(1-k)}}{\Phi_2} \right); \quad X_2 = e^{-\varphi} (1 + \Phi_2 R \cdot e^{\varphi(1-k)}) \quad [68]$$

essendo X_1 e X_2 due funzioni delle coordinate spaziali x, z .

Le espressioni [67] possono semplificarsi di più tenendo presente che $a = \frac{2\pi}{L\sqrt{1+\Phi_1^2}}$ coll'introdurre, in luogo di $(u), (w)$ i simboli equivalenti: $u \cdot B_0, w \cdot B_0$. — Si porrà altresì:

$$B_0 = \frac{2\pi Q}{L\Phi_0\sqrt{1+\Phi_1^2}}$$

In definitiva abbiamo per le due componenti degli spostamenti locali le seguenti espressioni:

$$\begin{aligned} u &= -\Phi_2 X_1 \sin \zeta + \Phi_2 X_2 \cos \zeta \\ w &= \Phi_1 \Phi_2 X_1 \sin \zeta + X_2 \cos \zeta \end{aligned} \quad [69]$$

dalle quali si ricavano $\cos \zeta$ e $\sin \zeta$, scrivendo:

$$\begin{aligned} \frac{w + \Phi_1 u}{X_2 (1 + \Phi_1^2)} &= \cos \zeta \\ \frac{u - \Phi_1 w}{\Phi_2 X_1 (1 + \Phi_1^2)} &= -\sin \zeta \end{aligned} \quad [70]$$

Quadrando e sommando troviamo l'equazione:

$$\frac{(w + \Phi_1 u)^2}{X_2^2 (1 + \Phi_1^2)} + \frac{(u - \Phi_1 w)^2}{X_1^2 (1 + \Phi_1^2)} = 1 \quad [71]$$

che, sviluppata e ridotta, dà la relazione, che occorre in definitiva conoscere, fra le componenti di spostamento e le funzioni trascendenti X_1 e X_2 della distanza:

$$\begin{aligned} &u^2 (X_2^2 + X_1^2 \Phi_1^2 \Phi_2^2) + w^2 (\Phi_2^2 X_1 + \Phi_1^2 X_2) + \\ &+ 2 \Phi_1 (\Phi_2^2 - X_2^2) u w = \Phi_2^2 (1 + \Phi_1^2) \cdot X_1^2 X_2^2 \end{aligned} \quad [72]$$

Dalla qual forma la medesima è riducibile in termini generali alla ben nota espressione:

$$a_{11} u^2 + a_{22} w^2 + 2 a_{12} u w + a_{33} = 0 \quad [73]$$

caratteristica di una conica a centro, nella quale si è posto, per brevità:

$$\begin{aligned} a_{11} &= (X_1^2 \Phi_1^2 \Phi_2^2 + X_2^2) & a_{22} &= (X_1^2 \Phi_2^2 + X_2^2 \Phi_1^2) \\ a_{12} &= \Phi_1^2 (X_1^2 \Phi_2^2 - X_2^2) & a_{33} &= -(1 + \Phi_1^2) \cdot X_1^2 X_2^2 \cdot \Phi_2^2 \end{aligned} \quad [74]$$

Il discriminante $A/a_{33} = (a_{11} a_{22} - a_{12}^2) = A_{33}$ è l'invariante quadratico. Esso vale:

$$A_{33} = \Phi_2^2 X_1^2 X_2^2 (1 + \Phi_1^2)^2 > 0 \quad [75]$$

Evidentemente la conica è un'ellisse. Essendo poi nulli i coefficienti a_1 ed a_3 , il centro dell'ellisse cadrà nell'origine degli assi di riferimento; pertanto in questo caso si avrà $A_{33} = |a_{33}|$.

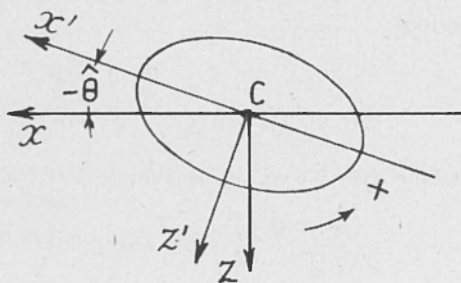


Fig. 3

§ 13. — Possiamo determinare l'angolo $\hat{\theta}$ di cui la coppia primitiva degli assi cartesiani deve ruotare nel senso positivo per coincidere cogli assi x' e y' (principali della ellisse orbitale). Dovrà essere pertanto:

$$\operatorname{tg} 2 \hat{\theta} = \frac{2 a_{12}}{a_{11} - a_{22}} \quad [76]$$

E agevole verificare che $\operatorname{tg} 2 \hat{\theta} = \frac{-2 \Phi_1}{1 - \Phi_1^2} = \text{costante}$ per un dato mezzo. Se ne ricava: (v. fig. 3).

$$\hat{\theta} = \arctg (-\Phi_1), \quad [77]$$

risultato molto importante per la teoria dell'onda ($\mathcal{E}$), soprattutto per il significato cinematico che la grandezza angolare $\hat{\theta}$ ha nei riguardi della propagazione, come si vedrà più chiaramente in seguito.

§ 14. — Occorre ora trovare l'equazione *ridotta* della ellisse orbitale, cioè l'equazione della ellisse medesima riferita ai suoi assi principali. Poniamo anzitutto i simboli seguenti:

$$\begin{aligned} I_0 &= a_{11} + a_{22} = \text{invar. lineare} = (X_1^2 \Phi_2^2 + X_2^2) (1 + \Phi_1^2) \\ J_0 &= a_{11} - a_{22} = - (1 - \Phi_1^2) (X_1^2 \Phi_2^2 - X_2^2) \\ a_{33} &= a_{11} a_{22} - a_{12}^2 = \text{invar. quadrat.} = \Phi_2^2 X_1^2 X_2^2 (1 + \Phi_1^2) \end{aligned} \quad [80]$$

La soluzione si trae dalle radici dell'equazione quadratica:

$$g^2 - I_0 g + A_{33} = 0 \quad [81]$$

che dà:

$$2 g_1 = I_0 \left(1 + \sqrt{1 - 4 \frac{a_{33}}{I_0^2}} \right) \quad [82]$$

$$2 g_2 = I_0 \left(1 - \sqrt{1 - 4 \frac{a_{33}}{I_0^2}} \right) \quad [83]$$

Trovate le quali radici, si ha l'equazione ridotta della ellisse orbitale nei termini seguenti:

$$\frac{(u, w)^2}{a_{33}/g_1} + \frac{(w, u)^2}{a_{33}/g_2} = 1. \quad [84]$$

Le due variabili al numeratore stanno a significare che per ora si lascia indeterminata l'attribuzione delle rispettive grandezze agli assi omonimi. Evidentemente, per avere soluzioni reali occorre che sia verificata la condizione: $I_0^2 - 4 a_{33} \geq 0$. Ossia:

$$(X_1^2 \Phi_2^2 + X_2^2)^2 - 4 X_1^2 X_2^2 \Phi_2^2 \geq 0. \quad [85]$$

immediatamente riducibile all'altra:

$$(X_1^2 \Phi_2^2 - X_2^2)^2 \geq 0$$

che è certamente soddisfatta in qualunque caso.

§ 15. — Possiamo ora dare una forma definitiva, e più semplice alla equazione ridotta della ellisse orbitale di cui alla [82]. Ciò si ottiene riducendo la espressione relativa agli assi principali in cui si presenta la quantità:

$$G^2 = 1 - \frac{4 a_{33}}{I_0^2} \quad [86]$$

E facile constatare che la predetta grandezza G , fatte le dovute sostituzioni, si trova essere data da:

$$G = \frac{Y_1^2 \Phi_2^2 - Y_2^2}{X_1^2 \Phi_2^2 + X_2^2} \quad [87]$$

In conseguenza si ricava:

$$\frac{1}{2}(I + G) = \frac{X_1^2 \Phi_1^2}{X_1^2 \Phi_2^2 + X_2^2}; \quad \frac{1}{2}(1 - G) = \frac{Y_2^2}{X_1^2 \Phi_2^2 + X_2^2}. \quad [88]$$

Non resta che operare le necessarie sostituzioni nella [83] per trovare la lunghezza generica degli assi, cui provvede la formola con doppio segno:

$$A_{u,w}^2 = 2 A_{33} \frac{1}{I_0 (1 \pm G)} \quad [89]$$

L'equazione della ellisse sarà in definitiva la seguente:

$$\frac{[(u), (w)]^2}{B_0 \Phi_2^2 X_1^2 (1 + \Phi_1^2)} + \frac{[(w), (u)]^2}{B_0 X_2^2 (1 + \Phi_1^2)} = 1. \quad [90]$$

Si era lasciato indeterminato l'abbinamento degli assi principali alle singole direzioni delle componenti di spostamento (u) e (w) , fermo restando l'orientamento della coppia principale (x', z') determinato dall'angolo $(\widehat{x, x'}) = -\widehat{\theta}$.

Ora si può risolvere la indeterminazione col procedere ad accertamento delle lunghezze che si devono attribuire rispettivamente agli assi della coppia (x', z') .

Dalla equazione [73], nella sua forma generale:

$$a_{11} u^2 + a_{22} w^2 + 2 a_{12} u \cdot w + a_{33} = 0$$

si può trarre un criterio geometrico che consente il calcolo delle lunghezze specifiche dei due assi x' e z' . Si consideri un raggio r' uscente dal centro della conica, con equazione $z = -\Phi_1 x$. Questo raggio coinciderà con l'asse x' . Facendo lo stesso col raggio r'' rivolto verso le z positive, lo si porterà a coincidere con l'asse z' (v. fig. 4).

La intersezione di r' con la curva dà un punto P' di quest'ultima; la intersezione di r'' darà un altro punto P'' , tenendo presente che il raggio r'' ha per equazione $z = x/\Phi_1$,

La seconda retta taglierà l'ellisse nel punto P'' . Cogli usuali procedimenti si determinano le distanze CP' e CP'' ; si trova:

$$\overline{CP_1^2} = \frac{-a_{33}(1 + \Phi_1^2)}{a_{11} + a_{22}\Phi_1^2 - 2a_{12}\Phi_1}; \quad \overline{CP_2^2} = \frac{-a_{33}(1 + \Phi_1^2)}{a_{11}\Phi_1^2 + a_{22} + 2a_{12}\Phi_1} \quad [91]$$

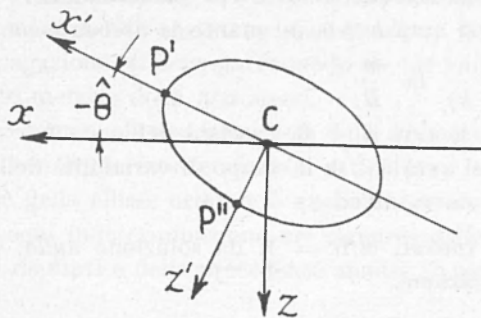


Fig. 4

Donde il rapporto:

$$\epsilon_k^2 = \frac{A_x^2}{A_z^2} = \frac{a_{11}\Phi_1^2 + a_{22} + 2a_{12}\Phi_1}{a_{11} + a_{22}\Phi_1 - 2a_{12}\Phi_1} \quad [92]$$

Piuttosto che determinare direttamente tale rapporto, converrà esaminare la differenza:

$$A_x^2 - A_z^2 = D.$$

Fatte le necessarie riduz. e sostituz. trovasi:

$$D = \left\{ (1 + \Phi_1^2) + 4\Phi_1^2 \right\} (X_{21}\Phi_1^2 - X_2^2) \quad [93]$$

È chiaro che D sarà ≥ 0 , se si potrà dimostrare altrettanto del fattore $(X_{21}\Phi_1^2 - X_2^2)$.

Sostituendo ancora si ottiene:

$$D = \left\{ (1 + \Phi_1^2)^2 + 4\Phi_1^2 \right\} (\Phi_2^2 - k) e^{-2\varphi} \cdot h \quad [94]$$

dove si è posto $h = m - R$; inoltre: $m = \frac{\Phi_2 - 1}{\Phi_2 - k} < 1$

Si possono dare tre ipotesi:

$$\frac{m}{R} > 1, \quad \frac{m}{R} = 1, \quad \frac{m}{R} < 1$$

La prima ipotesi ammette tre sottocasi distinti;

$$a) m/R > e^{p(1-k)}; \quad b) m/R = e^{p(1-k)}; \quad c) m/R < e^{p(1-k)}$$

Limitiamo la indagine a quanto accade sul piano limite $z = 0$, potendosi le conclusioni estendersi all'intero piano radiale.

Nel caso *a*) si avrà $h > 0$, in quanto la ascissa è compresa fra $x = 0$ ed $x_0 = \frac{1}{\eta_1(1-k)} \ln \frac{m}{R}$.

Nel caso *b*) si avrà $h = 0$, l'ascissa dell'onda è $x = x_c$.

Nel caso *c*) si avrà $h < 0$; il campo di variabilità dell'ascissa è illimitato, perchè va da x_0 all' ∞ .

La seconda ipotesi, $m/R = 1$, dà soluzione nulla, perchè $x = 0$; non vi è propagazione.

La terza ipotesi $m/R < 1$ è anche da respingere perchè darebbe luogo all'assurda relazione:

$$-x = \frac{1}{\eta_1(1-k)} \ln \frac{m}{R}$$

che contrasta colla ipotesi data di uno spostamento radiale nel senso positivo della x .

§ 16. - In riassunto:

Segnata sull'asse di propagazione un'ascissa $x_c = \frac{1}{\eta_1(1-k)} \ln \frac{m}{R}$, essa divide il campo seminfinito di propagazione dell'onda ($\mathcal{E}_1$) in due parti: S' e S'' (v. fig. 5).

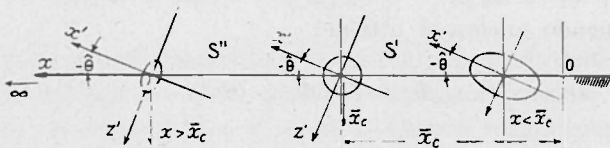


Fig. 5

Nella prima di esse, compresa fra l'origine degli assi e l'ascissa x_c il rapporto degli assi $[A_x/A_z] > 1$. In altri termini la componente secondo

x' supera quella secondo z' . In $\bar{x}_c$ le due componenti si eguagliano. Nel secondo tratto di lunghezza infinita S'' , per ascisse $x > \bar{x}_c$, la componente verticale prevale sull'altra.

Quest'onda ($\mathcal{E}_1$) ammette dunque una peculiare modificazione cinematica, totalmente dovuta alla sua struttura, ed assolutamente indipendente dalle proprietà elastiche del mezzo. In funzione della distanza essa onda, pur mantenendo *invariata* la inclinazione dell'ellisse orbitale sull'asse di propagazione, *si deforma* in modo da far variare entro larghi limiti il rapporto metrico degli assi stessi.

Nello stesso tempo gli assi principali della ellisse orbitale si accorciano entrambi con legge esponenziale di estinzione.

L'equazione della ellisse orbitale è quella che si ricava dai già noti sviluppi. Tolta ogni indeterminazione nei riguardi delle componenti (u) e (w) in base ai risultati e della precedente analisi, si potrà scrivere definitivamente:

$$\frac{1}{B_0 (1 + \Phi_1^2)} \left\{ \frac{(u)^2}{\Phi_2^2 X_1^2} + \frac{(w)^2}{X_2^2} \right\} = 1 \quad [94]$$

Con quelle avanti esposte, le caratteristiche di quest'onda superficiale ($\mathcal{E}_1$) sono le seguenti:

- a) dispersione *anomala*;
- b) velocità di fase teorica *costante*; $V_1 = \Omega_0 (1 - \Phi_1^2)^{1/2}$; sul piano limite del mezzo ($z = 0$) variabile colla distanza con legge: [28];
- c) inclinazione costante di ciascuno degli assi principali dell'ellisse orbitale; con angolo di inclinazione $\widehat{x'x} = -\widehat{\theta} = \arctg (-\Phi_1)$.
- d) rapporto degli assi $[A_x/A_z] = \varrho_*$, variabile colla distanza. Esattamente si ha:

$$\varrho_* = \frac{(\Phi_2/R) \exp [-x \eta_1 (1 - k)] - k}{(1/R) \exp. [-x \eta_1 (1 - k)] - \Phi_0} \quad [96]$$

Teoricamente il rapporto degli assi conserva un valore finito anche a distanza $x = \infty$ secondo la formula qui sopra: sarebbe cioè $\lim_{x \rightarrow \infty} \varrho = k/\Phi_0$.

In realtà i valori delle ampiezze degli assi dell'ellisse orbitale differiranno notevolmente da quelli calcolati, concorrendo altre cause ad accelerare il processo di assorbimento dell'energia trasferita coll'onda.

P A R T E I I

§ 17. — Nella parte prima di questo studio è stata presa in esame un'onda superficiale le cui caratteristiche sono state poste in rilievo e discusse nei §§ precedenti, nonchè riassunte nell'ultimo di essi.

Accogliendo ora, in luogo del gruppo di condizioni indicate coll'ordinale (IV) di cui alla 5-bis, § 2, quello indicato con l'ordinale (II), ancora sussisterà la equazione fondamentale [5]:

$$\eta_1 a + \eta_3 \gamma = 0$$

a condizione, s'intende, che col rendere di η_1 a zero, η_3 tenda altresì a zero.

In tale supposto, fisicamente ammissibile, conseguiranno dei cambiamenti formali nelle relazioni già discusse, inferenti tuttavia nella struttura fisica dell'onda, come si vedrà analizzando i rapporti fra le grandezze, Φ_1 , Φ_2 , a , γ , k , dalle quali in definitiva tutte le altre si fanno dipendere.

In forma simbolica, questo caso II, conservata ogni validità alla [5], si potrà esprimere scrivendo:

$$\begin{aligned} \lim_{\substack{\eta_1 \rightarrow 0 \\ \gamma \rightarrow 0}} \left(\frac{-\gamma}{\eta_1} \right) &= \frac{a}{\eta_3} = \Phi_{22} \\ \lim_{\eta_1 \rightarrow 0} \left(\frac{\eta_1}{\eta_3} \right) &= \Phi_{12} = 0 \end{aligned} \quad [97]$$

Si è voluto qui aggiungere un secondo indice (numero 2) ai ben noti parametri e per porre in evidenza che si tratta del *secondo* dei casi possibili: $\Phi_{11} \neq 0$; $\Phi_{12} = 0$.

Come è evidente le deduzioni [97] non contrastano colla [5] su riportata; tuttavia la onda ($\mathcal{E}_2$) caratterizzata dalle nuove posizioni così formulate, presenterà differenze notevoli di struttura rispetto alla ($\mathcal{E}_1$).

Anzitutto l'ipotesi $\Phi_{12} = 0$ conduce per sè stessa ad una particolare classificazione. Scrivere $\Phi_{12} = 0$, equivale a porre nella [76]:

$$\operatorname{tg} 2 \hat{\theta} = \frac{-2 \Phi_1}{1 - \Phi_1^2} = 0, \quad [98]$$

avendo denominato $\hat{\theta}$ l'angolo di cui *devesi far ruotare (nel senso negativo) la coppia primitiva* (x, z), *per farla coincidere colla coppia* (x', z'), v. fig. 6.

Mentre l'onda ($\mathcal{E}_1$) ammette un caso limite (teorico) per $\hat{\theta} = 0$, si vede chiaramente che l'onda ($\mathcal{E}_1$) non ammette alcuna variabilità dell'angolo $\hat{\theta}$, che è costantemente di 90° .

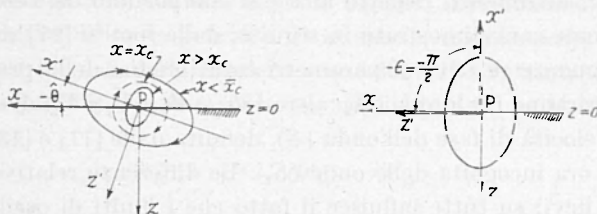


Fig. 6

Nel caso dell'onda ($\mathcal{E}_2$), la conica orbitale è riferita ad assi principali ruotati in modo da conservare diretta la maggiore componente (verticale) normalmente al piano limite, e ciò da $x = 0$ fino all'infinito: la distanza critica x_c nel caso della ($\mathcal{E}_2$), è appunto infinitamente grande, come è da attendersi col convergere di η_1 a zero, secondo le [97] e formule conseguenti del § 15.

§ 18. — Nelle equazioni della curva orbitale quest'è posizioni deduttive sono implicite e del tutto formali. Richiamando le parametriche [70], si era trovato, v. § 12, in generale:

$$\frac{w + u \Phi_1}{X_2 (1 + \Phi_1^2)} = \cos \zeta \quad [99]$$

$$\frac{u - w \Phi_1}{X_1 (1 + \Phi_1^2)} = -\sin \zeta \quad [99 \text{ bis}]$$

con u ; $w = (u)/B_0$; $(w)/B_0$, risp.

Dalle [99] e [99-bis], dopo aver operato lo scambio nominale degli assi di riferimento delle componenti ed introdotto, in base alle posizioni del paragrafo preced. $\Phi_{12} = 0$, si ottiene:

$$\frac{1}{B_0} \left\{ \frac{(w)^2}{\Phi_{22}^2 X_{12}^2} + \frac{(u)^2}{X_{22}^2} \right\} = 1. \quad [100]$$

In questa equazione si deve intendere attribuito al simbolo X_{12} , risp. X_{22} , il valore definito dalle espressioni:

$$X_{12} = e^{-\varphi_2} \left(1 - \frac{k R}{\Phi_{22}} e^{\varphi_2(1-k_2)} \right) \quad [101']$$

$$X_{22} = e^{-\varphi_2} \left(1 - \Phi_{22} R \cdot e^{\varphi_2(1-k_2)} \right) \quad [101'']$$

Si è scritto $\varphi_2 = \eta_1 x + \eta_3 z = \eta_3 z$, per distinguere il valore che la funzione φ assume col tendere di η_1 a zero. Importante conseguenza è che, nelle onde $(\mathcal{E}_2)$ i coefficienti funzionali X_{12} e X_{22} *variano soltanto colla coordinata z* : altrimenti, rispetto alla x si comportano da vere e proprie costanti. Come sarà dimostrato in seguito, dalle ipotesi [97] scaturiranno altre conseguenze relative ai parametri caratteristici della propagazione. Ad es. differiranno fra loro k_1 e k_2 ; altresì Φ_{21} e Φ_{22} ; V_1 e V_2 , ove si intenda con V_1 la velocità di fase dell'onda $(\mathcal{E}_1)$ definita dalle [11] e [13], e con V_2 quella, per ora incognita delle onde $(\mathcal{E}_2)$. Le differenze relative sono tutt'altro che lievi: su tutte influisce il fatto che i limiti di oscillazione del parametro libero Φ , *non sono gli stessi* per i due tipi di onda. Resteranno invariati nei calcoli, come costanti assolute, le note grandezze legate alle costanti di Lamé.

È importante osservare che, riferendo il moto orbitale ad una particella del mezzo situata sul piano limite, $z = 0$, il rapporto degli assi principali della ellisse verrà espresso dal rapporto:

$$o_2 = \frac{X_{22}}{\Phi_{22} X_{12}} = \frac{1 + \Phi_{22} R}{\Phi_{22} + k_2 R} = \text{costante}$$

se il mezzo è attraversato da un'onda $(\mathcal{E}_2)$.

Nel caso dell'onda $(\mathcal{E}_1)$ si è già visto che l'analogo rapporto fra il semiasse x' e quello delle z' era dato da [96]:

$$o_1 = \frac{X_{11}}{X_{21}} = \frac{\Phi_{21} e^{-x\eta_1(1-k_1)} + k_1 R}{e^{-x\eta_1(1-k_1)} + \Phi_{21} R} = \text{funz. di } x.$$

Le formule precedenti giustificano l'uso del doppio indice.

Si può concludere a questo punto che sono state determinate alcune importanti caratteristiche della ellisse orbitale provocata nel mezzo dal passaggio di un'onda di seconda specie. Nei §§ seguenti verranno esaminate le relazioni cui danno luogo le due equazioni di struttura, formalmente comuni ai due tipi di onda, ed alcuni legami esistenti fra i parametri noti e le costanti elastiche del mezzo.

§ 19. — L'onda tipica di 2^a specie è un'onda superficiale la cui capacità dissipativa nei confronti dell'energia vibratoria può dirsi *nulla* o *trascurabile* nel senso della propagazione radiale; *finita* invece ed apprezzabile nel senso della profondità misurata normalmente allo stato conduttore. Queste caratteristiche costitutive appaiono comuni alla cosiddetta onda pura di Rayleigh; si osserva tuttavia a tal proposito che l'onda $(\mathcal{E}_2)$ della

2^a specie se ne differenzia notevolmente e per più motivi: a) per il fatto anzitutto che l'onda di Rayleigh *non è dispersiva*; b) perchè le due onde obbediscono ad equazioni diverse ed hanno diversa velocità di fase; c) per altre caratteristiche di cui sarà detto in seguito. Riprendendo gli sviluppi analitici relativi all'onda generica di 1^a specie, esamineremo anzitutto i cambiamenti formali delle cosiddette equazioni di struttura — di cui ai § 11 [62]; e § 9 [49]. La prima di esse, nell'ipotesi $\Phi_{12} = 0$, dà luogo all'equazione:

$$\Phi_{12}^2 = H^2 - \Phi_{32}^2 - \Phi_{22}^2 = 0 \quad [103]$$

La seconda di dette equazioni resterà invariata non contenendo esplicitamente Φ_1 . Essa si scriverà in tal caso nella forma seguente:

$$(\Phi_{22}^2 + k_2) \cdot (\Phi_{22}^2 - 1) = 4 k \Phi_{22}^2 \quad [104]$$

Dalla precedente [103] si ricava:

$$\Phi_{32}^2 = H^2 - \Phi_{22}^2 \quad [105]$$

e, poichè per la [61] è anche: $\Phi_{32}^2 = \frac{2 k \Phi_{22}^2}{k^2 + \Phi_{22}^2} (H^2 + 1)$ confrontando la [105] con quest'ultima, nonchè tenendo presente la [104], si giunge alla importante relazione:

$$\Phi_{32}^2 = H^2 - \Phi_{22}^2 = \frac{2 k \Phi_{22}^2}{k^2 + \Phi_{22}^2} (H^2 - 1) \quad [106]$$

ovvero per la [49]:

$$H^2 - \Phi_{22}^2 = \frac{\Phi_{22}^2 - 1}{2} (H^2 - 1) \quad [106 \text{ bis}]$$

Ricordando infine che $H^2 = 1 + 2 \frac{\mu}{\lambda}$, per sostituzione si ha:

$$1 + 2 \frac{\mu}{\lambda} - \Phi_{22}^2 = (\Phi_{22}^2 - 1) \cdot \frac{\mu}{\lambda}$$

ovvero, risolvendo in $\frac{\mu}{\lambda}$:

$$\frac{\mu}{\lambda} = \frac{\Phi_{22}^2 - 1}{3 - \Phi_{22}^2} = \frac{1 - 2 \sigma}{2 \sigma} \quad (\sigma = \text{coeff. Poissou}). \quad [107]$$

§ 20 — A questo punto importa avvertire che i valori numerici di Φ_{22}^2 che soddisfano le relazioni tratte dalla [105] o solamente compatibili con la [105] e colla [103], *non possono coincidere* coi valori di Φ_2 tratti dalle precedenti equazioni nella ipotesi $\Phi_1 \neq 0$. Per distinguere appunto i valori di Φ_2 di una e dell'altra specie d'onda, dalla relaz. [100] in avanti si è fatto ricorso costantemente al doppio indice.

Con riguardo alla forma, si è così trovato per l'onda ($\mathcal{C}_2$):

$$\Phi_{22}^2 = H^2 - \Phi_{22} \quad [105 \text{ bis}]$$

$$H^2 - \Phi_{22}^2 = \frac{\Phi_{22}^2 - 1}{2} (H_0 - 1) \quad [106 \text{ bis}]$$

$$\frac{\mu}{\lambda} = \frac{\Phi_{22}^2 - 1}{3 - \Phi_{22}^2} = \frac{1 - 2\sigma}{26} \quad [107 \text{ bis}]$$

Dalle quali si potranno dedurre altre, fra cui le seguenti notevoli:

$$H^2 = \frac{\lambda}{\mu} + 2 = \frac{\Phi_{22}^2 + 1}{\Phi_{22}^2 - 1}; \quad [108]$$

$$\sigma = \frac{\lambda}{2(\lambda + \mu)} = \frac{3 - \Phi_{22}^2}{4} \quad [109]$$

Da quanto precede è appena necessario avvertire che colle onde di seconda specie *sono mutati i limiti di variabilità del parametro libero* Φ_2 . Infatti il valore di $\sigma = 1/4$ (coefficiente di Poisson medio) si trova corrispondere al valore $\Phi_{22}^2 = 2$. Al valore minimo ammesso dalla teoria per il coefficiente di Poisson positivo $\sigma = 0$, corrisponde $\Phi_{22}^2 = 3$. Coincidono fra loro soltanto i valori di Φ_{21}^2 e Φ_{22}^2 per $\sigma = 1/2$; perchè entrambi uguali all'unità. Riceverà da qui in avanti l'indice 2 anche k , se ricavato in funzione di Φ_{22} dalla equazione analoga alla [50] valida per le onde della 2^a specie.

$$k_2^2 - \frac{4 k_2 \Phi_{22}^2}{\Phi_{22}^2 - 1} + \Phi_{22}^2 = 0. \quad [110]$$

Consegue infine che le velocità specifiche v_{22} e v_{12} dovranno differire anch'esse da quelle analoghe trovate per le onde di 1^a specie, v_{11} e v_{21} .

La relazione [17], — valida come si è visto per l'onda di 1^a specie —, esprimibile con il rapporto:

$$\frac{v_{21}^2}{v_{11}^2} = \frac{\Phi_{21}^2 - k_1}{\Phi_{21}^2 - 1} = H^2 \quad [111]$$

non lo è più per l'onda di 2^a specie; per quest'ultima è invece valida la seguente:

$$\frac{v_{22}^2}{v_{12}^2} = \frac{\Phi_{22}^2 + 1}{\Phi_{22}^2 - 1} = \mathbb{N}^2. \quad [112]$$

Se ne deducono altresì le ovvie relazioni seguenti:

$$\frac{v_{21}^2}{v_{11}^2} = \left(\frac{v_{22}^2}{v_{12}^2} \right) = \mathbb{N}^2; \quad \Phi_{22}^2 = \frac{\mathbb{N}^2 + 1}{\mathbb{N}^2 - 1}. \quad [113]$$

§ 21. — Cerchiamo ora i valori espliciti v_{22}^2 e v_{12}^2 , velocità specifiche delle quali per ora conosciamo il solo rapporto. Poniamo, indicando con χ un moltiplicatore incognito tale che:

$$v_{22}^2 = \frac{1}{\Phi_{22}^2 - 1} \chi^2; \quad v_{12}^2 = \frac{1}{\Phi_{22}^2 + 1} \chi^2. \quad [114]$$

Sappiamo che dev'essere, in questo caso, valida formalmente la [15]:

$$k_{22}^2 = \frac{1 - v_{22}^2}{1 - v_{12}^2}.$$

Pertanto si avrà:

$$k_{22}^2 = \frac{1 - \frac{\chi^2}{\Phi_{22}^2 - 1}}{1 - \frac{\chi^2}{\Phi_{22}^2 + 1}} \quad [115]$$

donde una equazione in χ , che risolta dà:

$$\chi^2 = \frac{(\Phi_{22}^2 - 1)(1 - k_{22}^2)}{(\Phi_{22}^2 + 1) - k_{22}^2(\Phi_{22}^2 - 1)} \quad [116]$$

riducibile alla seguente espressione:

$$\chi^2 = (\Phi_{22}^2 + 1) \frac{1 - k_{22}^2}{\mathbb{N}^2 - k_{22}^2}. \quad [116 \text{ bis}]$$

Se ne ricavano direttamente i valori di v_{22}^2 e v_{12}^2 :

$$v_{22}^2 = \frac{[\Phi_{22}^2 + 1]}{\Phi_{22}^2 - 1} \cdot \frac{1 - k_{22}^2}{\mathbb{N}^2 - k_{22}^2} = \frac{\mathbb{N}^2}{\mathbb{N}^2 - k_{22}^2} (1 - k_{22}^2) \quad [117]$$

$$v_{12}^2 = \frac{1 - k_{22}^2}{\mathbb{N}^2 - k_{22}^2}. \quad [118]$$

Ovvero, poichè $v_{22}^2 = V_2^2/\Omega_2^2$; $v_{12}^2 = V_2^2/\Omega_1^2$, si ha in definitiva per la velocità di fase dell'onda ($\mathcal{E}_2$):

$$V_2^2 = \Omega_2^2 \frac{\mathfrak{H}^2}{\mathfrak{H}^2 - k_2^2} \cdot (1 - k_2^2) = \Omega_1^2 \cdot \frac{1 - k_2^2}{\mathfrak{H}^2 - k_2^2}, \quad [119]$$

come era da attendersi.

§ 23. — Pertanto si potrà calcolare una Tabella dei valori di k_2 , k_2^2 , $\mathfrak{H}^2$, σ , v_{22}^2 , v_{12}^2 , v_{22} , v_{12} , analogamente a quanto si è già fatto per l'onda ($\mathcal{E}_1$) colla sola avvertenza che nel caso della ($\mathcal{E}_2$), il parametro $\mathfrak{H}_2$ deve essere calcolato necessariamente colla formula [112]. I risultati sono raccolti nel prospetto della Tabella II.

Tabella II. — ONDA ($\mathcal{E}_2$).

Φ_{-2}^2	1,0000	1,5000	2,0000	2,5000	3,0000	> 3
k_2	0.	0,1264	0,2583	0,3988	0,5505	< 0
k_2^2	0.	0,0159	0,0667	0,1591	0,3031	
$\mathfrak{H}^2$	∞	5.	3.	2,3300	2.	
σ	0,500	0,3750	0,2500	0,1250	0,0000	
v_{22}^2	1.	0,9966	0,9545	0,9071	0,8213	
v_{12}^2	0.	0,1993	0,3182	0,3893	0,4106	
v_{22}	1.	0,9983	0,9769	0,9525	0,9063	
v_{12}	0.	0,4464	0,5641	0,6239	0,6408	
$\frac{\mu}{\lambda}$	0.	0,3333	1,0000	3,3333	∞	

In questa tabella si è calcolato:

$$\begin{aligned} \mathfrak{H}^2 & \text{ colla formula [112]} & \text{---} & \sigma & \text{ colla formula [109]} \\ v_{22}^2 & \text{ " " [117]} & \text{---} & v_{12}^2 & \text{ " " [118]} \\ \frac{\mu}{\lambda} & \text{ " " } & \frac{1}{\mathfrak{H}^2 - 2} & = & \frac{\Phi_{22}^2 - 1}{3 - \Phi_{22}^2}; \text{ [107]} \end{aligned}$$

Com'è facile verificare, la fondamentale relazione [15] che esprime k in funzione delle due veloc. specif., non perde la propria validità for-

male anche se le due velocità specifiche sono quelle indicate per le onde della 2^a specie. Infatti si ha identicamente:

$$\frac{1 - v_{22}^2}{1 - v_{12}^2} = \frac{1 - \mathfrak{H}^2 \frac{1 - k_2^2}{\mathfrak{H}^2 - k_2^2}}{1 - \frac{1 - k_2^2}{\mathfrak{H}^2 - k_2^2}} = k_2^2 \quad [120]$$

Dal confronto dei valori trovati per i medesimi parametri delle onde ($\mathcal{E}_1$) ed ($\mathcal{E}_2$) si può dedurre che l'onda di 2^a specie è un poco più *lenta* di quella di 1^a specie.

§ 24. — La variata ampiezza di oscillazione del parametro libero Φ_{22}^2 rispetto a Φ_{21}^2 , pone il quesito della relazione esistente fra i due parametri. È facile trovarla riferendosi a qualcuna delle costanti elastiche del mezzo espressa in funzione dell'una e dell'altra Φ_2 , ed eguagliando. Prendendo, ad esempio, (σ) (coeff. di Poisson) si ha l'equazione:

$$\sigma - \frac{3 - \Phi_{22}^2}{4} = \frac{1}{2} \cdot \frac{2 - \Phi_{21}^2 - k_1^2}{1 - k_1^2} \quad (\text{vedi: 53}) \quad [121]$$

donde ricavasi:

$$\Phi_{22}^2 = I + 2 \cdot \frac{\Phi_{21}^2 - 1}{1 - k_1^2} = \frac{2 \Phi_{21}^2 - (1 + k_1^2)}{1 - k_1^2} \quad [122]$$

che rappresenta una specie di « equazione di trasformazione » per passare da Φ_{22} a Φ_{21} e viceversa. Nello stesso tempo dà conto del perchè nelle formule relative alle velocità specifiche v_{22} e v_{12} può essere conservata la struttura analitica della stessa onda di 1^a specie, data, come sappiamo, dalla relazione:

$$V_1^2 / \Omega_1^2 = \frac{1 - k_1^2}{\mathfrak{H}^2 - k_1^2}, \quad [123]$$

ma non quella (espressa in funzione di Φ_{21}) che è legata al valore del parametro $\mathfrak{H}^2$ discendente dalla seconda delle [111]: $\frac{\Phi_{21}^2 - k_1^2}{\Phi_{21}^2 - 1} = \mathfrak{H}^2$, valida per l'onda di 1^a specie (*).

Si può peraltro avvicinare le espressioni formali delle due velocità V_1 e V_2 .

(*) Si avverte che $\mathfrak{H}^2$ vale sempre $\frac{\Omega_1^2}{\Omega_2^2}$; qui trovasi tale rapporto espresso in funzione di Φ_{22} come vuole la [113] del § 20.

Dalla [118] si ha:

$$v_{12}^2 = \frac{1 - l_2^2}{\Omega^2 - k_2^2} \quad [125]$$

Sostituendo a Ω^2 il valore dato dalla [108]=[112] e definendo per brevità col simbolo:

$$\kappa^2 = \frac{1 + k_2^2}{1 - l_2^2} \quad [125 \text{ bis}]$$

una certa funzione di k_2 , si ottiene in luogo della [125]:

$$v_{12}^2 = \left(\frac{V_2}{\Omega_1} \right)^2 = \frac{\Phi_{22}^2 - 1}{\Phi_{22}^2 + \kappa^2} \quad [126]$$

Valori discreti di κ^2 calcolati in funzione di Φ_{22}^2 e di l_2 , (— intendendo da qui in avanti $l_2 = L_2 / (2\pi / \eta_3) = 1 / \Phi_{22} = L_2 : (L) —$), sono raccolti nella tabella seguente:

l_2	0,578	0,632	0,709	0,819	1.
Φ_{22}^2	3.	2,5	2.	1,5	1.
κ^2	1,869	1,378	1,143	1,034	1.

Procedendo in modo analogo, si scriverà per $v_{22} = V_2 / \Omega_2$, la seguente formula:

$$v_{22}^2 = \frac{\Omega_2^2}{\Omega^2} \Omega_2^2 = \frac{\Phi_{22}^2 + 1}{\Phi_{22}^2 + \kappa^2} \quad [127]$$

Donde identicamente:

$$V_2^2 = \Omega_2^2 \frac{1 + l_2^2}{1 + \kappa^2 l_2^2}$$

Poichè, (in funzione di l), κ^2 è decrescente, è chiaro che la velocità di fase V_2 crescerà al crescere della lunghezza d'onda L_2 . In altri termini si è provato che l'onda $(\mathcal{E}_2)$ è *soggetta a dispersione normale*; all'opposto di quanto si era trovato per la $(\mathcal{E}_1)$ — (v. § 3).

§ 24. — Può interessare conoscere la *velocità di gruppo* delle due specie d'onda studiate, che saranno al solito riferite alla variabile numerica $l = L / (L)$.

a) Per la $(\mathcal{E}_1)$ anzitutto si trova:

$$V_{g1} = V_1 \cdot \frac{1}{1 - L_1^2/(L)^2} = V_1 = \frac{1}{1 - l_1^2} \quad [128]$$

Si può facilmente verificare, passando al limite che per $l_1 \rightarrow 1$, che il rapporto:

$$V_{g1} : \Omega_1 = v_{11} \cdot \frac{1}{1 - l_1^2} \quad [129]$$

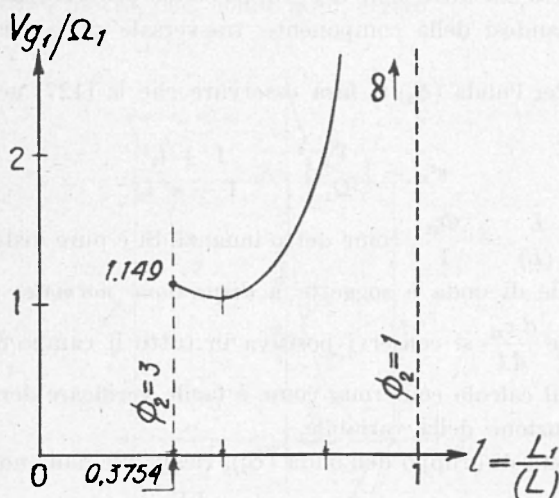


Fig. 7

tende all' ∞ ; in più che esiste un *minimo* di l . Per la sua importanza fisica è utile conoscerne il valore. Per la [13] si ha infatti:

$$L_1 = \frac{2\pi}{\eta_3} \sqrt{\frac{1 - v_{11}^2}{1 + \Phi_{11}^2}} = (L) \sqrt{\frac{1 - 0,4782}{1 + 0,3899}} = 0,3754 (*) \quad [130]$$

I valori introdotti per v_{11} e per Φ_{11} sono correlativi, ed entrambi *massimi* per codeste grandezze, come risulta dalla Tabella I e dalla [62] di § 11. Pertanto deve ritenersi $l_1 = 0,3754$, quel valore del rapporto $L_1/(L)$ che corrisponde alla propagazione di un'onda $(\mathcal{E}_1)$ in un mezzo *idealmente rigido*. Il grafico — indicativo — di fig. 7 pone in evidenza

(*) Dalle [13] si ha difatti: $L_1 = (1 - v_{11}^2) \frac{2\pi}{\eta_3} \cdot \frac{1}{1 + \Phi_{11}^2}$.

l'andamento della velocità di gruppo specifica V_{g1}/Ω_2 , crescente con l_1 a partire dal suo valor minimo che con la [129] si calcola:

$$\min (V_{g1}/\Omega_2) = \frac{\sqrt{2}}{0,4782} \cdot \frac{0,6915}{1 - (0,3754)^2} = 2,404.$$

Questo risultato va inteso nel senso che col *diminuire* della rigidità del mezzo la velocità di gruppo sopravanza nettamente il valore della Ω_2 velocità teorica delle onde trasversali nello stesso; in altri termini che l'onda ($\mathcal{E}_1$) *evanescente* tende ad avanzare verso il fronte del gruppo accelerando rispetto alle altre onde del gruppo stesso per scomparire, gradualmente spogliandosi della componente trasversale della sua struttura.

§ 24. — Per l'onda ($\mathcal{E}_2$) si farà osservare che la [127] ne definisce il rapporto v_{22}

$$v_{22}^2 = \left(\frac{V_2}{\Omega_2} \right)^2 = \frac{1 + l_2^2}{1 + \kappa^2 l_2^2} \quad [131]$$

essendo $l_2 = \frac{L}{(L)} = \frac{\Phi_{22}}{1}$, come detto innanzi. Si è pure visto che questa seconda specie di onda è soggetta a *dispersione normale*; donde deve attendersi che $\frac{d v_{22}}{d l}$ si conservi positiva in tutto il campo di variabilità di l , ciò che il calcolo conferma, come è facile verificare derivandola v_{22} previa sostituzione della variabile.

La velocità di gruppo dell'onda ($\mathcal{E}_2$), ricavabile dalla nota relazione:

$$V_{g2} = V_2 - L_2 \frac{d V_2}{d L_2} \quad [132]$$

riferita alla variabile adimensionale l ed alla velocità della trasversale pura nello stesso mezzo, potrà dedursi scrivendo:

$$\left(\frac{V_{g2}}{\Omega_2} \right) = v_{22} - l_2 \cdot \frac{d v_{22}}{d l_2} \quad [133]$$

Derivando si trova:

$$\frac{d}{d l_1} (V_{g2}/\Omega_2) = - l_2 \cdot \frac{d v_{22}}{d l_2^2}$$

Per assicurarsi circa il segno del secondo membro si può procedere per via analitica o grafica. Qui si è preferito ricorrere alla via grafica, partendo dai valori della v_{22} raccolti nella precedente Tabella II; nella fig. 8 si notano le funzioni: v_{22} , κ ; le derivate v_{22}' , v_{22}'' , κ' . Com'è evidente $\frac{d v}{d l} > 0$; all'opposto la *derivata seconda* di v_{22} è *negativa* in tutto il campo fisico dell'onda ($\mathcal{E}_2$).

Se ne deduce che deve ritenersi:

$$\frac{d}{dl} (V_{g2}/\Omega_2) = l_2 \cdot v''_{22} > 0.$$

Cioè la velocità di gruppo dell'onda di seconda specie ($\mathcal{E}_2$) cresce al crescere della lunghezza d'onda della velocità di fase, ciò che inevitabilmente avviene quando la propagazione è costretta a svolgersi in mezzi di sempre *minore* rigidità. Al limite, per $l_2 = 1$, si ha l'onda *evanescente* e la velocità di gruppo tende ad eguagliare la velocità della trasversale pura nello stesso mezzo, che, com'è noto, è zero.

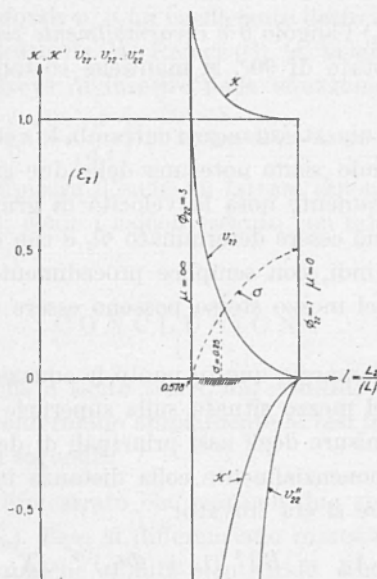


Fig. 8

§ 25. — Importa a questo punto aggiungere alcune osservazioni marginali ed in parte riassuntive circa alcune caratteristiche secondarie delle onde studiate. Sono le seguenti:

a) Dalla teoria dell'onda ($\mathcal{E}$) generica sono stati ricavati i limiti del parametro numerico Φ_2 , e ciò si è fatto per entrambi le specie d'onda. Si è accertato che il parametro libero Φ_{21} varia tra l'unità e 1,9412...; mentre il parametro Φ_{22} varia tra la unità e 3. — Questi valori massimi dei due parametri corrispondono allo stesso limite superiore della rigidità assoluta con $\sigma = 0$. (fig. 8);

b) Le due onde possono propagarsi simultaneamente nello stesso mezzo. I valori delle velocità di fase differiscono sensibilmente: l'onda ($\mathcal{E}_2$), coeteris paribus, risulta alquanto più lenta della ($\mathcal{E}_1$). Sono altresì crescenti colla lunghezza d'onda le velocità di gruppo specifiche, ossia i rapporti delle singole velocità di gruppo alla velocità dell'onda trasversale Ω_2 attraversante lo stesso mezzo;

c) il rapporto degli assi principali della ellisse orbitale, entro i limiti della *distanza critica*, si mantiene *maggiore* dell'unità nell'onda di 1^a specie; lo stesso rapporto nella onde di 2^a specie è *minore* dell'unità. Nella ($\mathcal{E}_1$) l'asse principale maggiore A_x è inclinato di un angolo $\hat{\theta}$ *indipendente* dalla distanza x per un punto situato sulla superficie limite del mezzo; nell'onda ($\mathcal{E}_2$) l'angolo $\hat{\theta}$ è *invariabilmente zero*, e pertanto l'asse maggiore, che è ruotato di 90° , si mantiene costantemente normale al piano $z = 0$;

d) rispetto ad uno stesso mezzo entrambi le velocità di fase possono essere calcolate quando siano note una delle due grandezze σ , Φ_2 oltre al periodo. Reciprocamente nota la velocità di gruppo (o anche quella di fase) dell'onda, può essere determinato Φ_2 e con esso il coefficiente di Poisson nel mezzo; indi, con semplice procedimento, anche le costanti elastiche di Lamé del mezzo stesso possono essere determinate (*).

§ 26. — Nel richiamare a questo punto le equazioni orbitali descritte da una particella del mezzo situata sulla superficie limite ($z = 0$), si è già rilevato che le misure degli assi principali di dette orbite sono funzioni decrescenti esponenzialmente colla distanza in entrambi le specie d'onda. In particolare si era trovato:

$$\begin{aligned} \text{per l'onda } (\mathcal{E}_1): \quad A_{u1} &= B_0^{1/2} (1 + \Phi_{11}^2)^{1/2} \cdot X_{11} \\ A_{w1} &= B_0^{1/2} (1 + \Phi_{11}^2)^{1/2} \cdot X_{21} \end{aligned} \quad [135]$$

$$\begin{aligned} \text{per l'onda } (\mathcal{E}_2): \quad A_{u2} &= B_0^{1/2} \cdot X_{22} \\ A_{w2} &= B_0^{1/2} \cdot X_{12} \end{aligned} \quad [136]$$

Le X_1 ed X_2 si annullano teoricamente a distanza infinita. In realtà la comune esperienza conferma che la propagazione delle onde superficiali si annulla a distanze finite su entrambi le componenti. Che ciò deb-

(*) V. comunicazione dell'A. all'Assoc. Internationale de Séismologie, X^e Ass. gén. in Roma; U.G.G.I., 1954; ed inoltre: C. R. dell'Assemblea Ann. della Commissione Sismologica Europea, Utrecht, 1958.

ba attribuirsi alla imperfetta elasticità dei mezzi reali è cosa notissima: fra le cause, (— ve n'è più d'una —), sembra prevalere quella particolare proprietà della materia intesa sotto il nome di « viscosità solida ». Conclusioni più rigorose riguardo allo assorbimento dell'energia vibratoria da parte di mezzi polifasi, (come da un punto di vista reologico vanno considerate molte formazioni naturali e soprattutto le rocce della crosta terrestre), possono trarsi dallo studio di corpi polifasi tipici, quali ad es. il corpo di Kelvin, per il quale è applicabile la equazione reologica:

$$p_0 = 2 G e_0 + 2 \eta_s \dot{e}_0 \quad [137]$$

dove p_0 ed e_0 sono rispettivamente il tensore della deformazione *deviatrice* ed quello degli sforzi; η_s è un coefficiente detto appunto di viscosità solida nel senso indicato da M. Reiner ⁽¹¹⁾. A volerne tener conto si è suggerito da H. Jeffreys di inserire nella equazione generale dei moti vibratori un termine $\left(\mu + \frac{d}{dt} \right)$ in luogo di μ : se ne ricava una soluzione che attribuisce all'ampiezza d'onda un fattore esponenziale che si estingue a distanze finite, come i calcoli eseguiti con tale procedimento confermano ⁽¹²⁾.

CONCLUSIONI

Le conclusioni che è lecito trarre dai risultati del presente lavoro, nel pensiero dell'A. confermano ampiamente la tesi iniziale. Esse possono riassumersi nei punti seguenti:

1. — È stato dimostrato che esistono due specie d'onda superficiale: le $(\mathcal{E}_1)$ e le $(\mathcal{E}_2)$. Esse si differenziano marcatamente dall'onda di Rayleigh malgrado qualche affinità strutturale. Entrambi le onde sono dispersive: le $(\mathcal{E}_1)$ presentano dispersione *anomala*; all'opposto le $(\mathcal{E}_2)$ presentano dispersione *normale*.

2. — Le equazioni di struttura delle due onde consentono di collegare funzionalmente i parametri elastici del mezzo a determinati parametri numerici, che caratterizzano le singole propagazioni. La conoscenza delle velocità — (di gruppo o di fase) — e del periodo è sufficiente per determinare, — una volta accertata la individualità dell'onda generica, — le stesse costanti elastiche del mezzo.

3. — Le onde della prima specie $(\mathcal{E}_1)$, a corto tragitto, si presentano prevalentemente nelle vibrazioni rapide del suolo provocate da perturbazioni superficiali: quali ad esempio quelle dovute all'agitazione

microsismica, od anche suscitate, da forze impulsive applicate alla superficie limite di un semispazio elastico, isotropo: (esplosioni).

Le onde della seconda specie ($\mathcal{E}_2$), soggette ad assorbimento nel senso della profondità, ma non in quello della propagazione, sembrano suscettibili di compiere lunghi percorsi senza perdite apprezzabili di energia. È questo il solo punto in comune che le onde ($\mathcal{E}$) sembrano dividere colla caratteristica onda di Rayleigh e ancor più colle « channel waves » ed in certo modo colle onde si Stoneley (¹³).

Non è stato qui considerato il quesito di una possibile classificazione delle onde ($\mathcal{E}$): è risaputo che non poche difficoltà si presentano già colla classificazione proposta dal Prof. Sâto (¹⁴), indubbiamente la più razionale se si accetta la tesi dei due prototipi che vuole distinte le onde superficiali a seconda della forma analitica della funzione di estinzione (esponenziale o sinusoidale). In linea conclusiva, sembra superfluo far rilevare la incongruenza fra una simile classificazione e la tesi sostenuta dall'A. circa l'individualità dell'onda ($\mathcal{E}$).

RIASSUNTO

L'A. traccia una teoria unificata di due particolari onde lente superficiali dispersive, non riconducibili, per costituzione, ai classici prototipi di Rayleigh e Love. Le onde studiate dipendono formalmente da due comuni equazioni di struttura che ne determinano le caratteristiche individuali: fra le quali noterole la dispersione anomala delle onde di prima specie, quella normale delle altre.

Relazioni fra i parametri elastici del mezzo e le velocità di fase, nonché di gruppo, di queste onde ($\mathcal{E}$) sono poste in evidenza dall'A. in vista delle possibili applicazioni nel campo delle ricerche geofisiche.

ABSTRACT

The A. states here a unified theory of two surface dispersive waves, which may not be considered as modification of basic types of Rayleigh and Love.

Though these waves are presenting distinct individual characteristics, they satisfy two common structural equations connected to their constitution.

It is noticeable anomalous dispersion of the first type wave ($\mathcal{E}_1$), against the normal dispersion of the second type ($\mathcal{E}_2$).

Relations between elastic parameters of body and phase velocity, — also group velocity —, of the ($\mathcal{E}$) waves are pointed in regard to possible geophysics researches.

BIBLIOGRAFIA

- (¹) EWING M. and PRESS F., *Surface waves and guided waves*, « H. der Physik », Band XLVII, 120/139, Springer, Verlag, Berlin, 1956.
- (²) ULLER K., *Grundlegung der wellen kinematik*, « Phys. Zeitschr. », 17, (1916).
- (³) JEANS J. H., *The propagation of Earthquake waves*, « Proc. Roy. Soc. », London, A. 102/154, (1923).
- (⁴) NAKANO H., *On Rayleigh waves*, « Japan Journ. of Astron. and Geophys. », 5. 223/326, (1925).
- (⁵) MEISSNER E., *Elastische oberflächen Querwellen*, Verh. 2 int. Kongr. f. techn. Mech. Zürich, 1926.
- (⁶) AICHI K., *On the transversal seismic waves travelling upon the surface of heterogeneous material*, « Proc. Phys. Math. Soc., Japan. », (3), 4. 137/142 (1922).
- (⁷) SEZAWA K., *A kind of waves transmitted over a seminfinite solid body of varying elasticity*, « B. of E.R.I. », Tokyo. IX. 310/315, 3, (1931).
- (⁸) CALOI P., *Sopra alcuni sistemi di onde sismiche a carattere superficiale*, Accad. d'Italia, fasc. 1-2, Serie VII, vol. II, (1940).
- (⁹) CALOI P., *C_{ij}*, « Annali di Geofisica », VIII, 3, (1955).
- (¹⁰) PERRI E., *Il fattore visco-elastico nella sismogenesi tettonica*. R. C., Osservat. Reggino dell'Ist. Naz. di Geofis., V, 51/66, (1957).
- (¹¹) REINER M., *Rhéologie théorique*, Paris, Dunod, 1955.
- (¹²) JEFFREYS H., *The Earth*, 4^a Edit., Cambridge University Press, 1959.
- (¹³) STONELEY R., *Elastic waves at the surface of separation of two solids*, Proc. Roy. Soc. CVI, 1924.
- (¹⁴) SÂTO Y., *Classification of surface Waves and related topics*, « J. Geophys. Res. », 63, Pasadena, Inst. of Techn. Ca., 1958.