

Bifilarità elettrodiche aperte e chiuse nei processi « EGO »

A. BELLUIGI

ricevuto il 15 dicembre 1959

§ 1. — Poniamo il problema del bifilare rettilineo « elettrodi piani » nel suolo disposti in sezione come in Fig. 1, un dispositivo di facile adattabilità in situazioni pratiche EGO, o elettrogeosmotiche.

Il dispositivo polare bicilindrico coassiale da noi studiato in ⁽¹⁾, ha servito soprattutto per poter agevolmente stabilire le essenziali caratteristiche funzionali dei circuiti geobifilari.

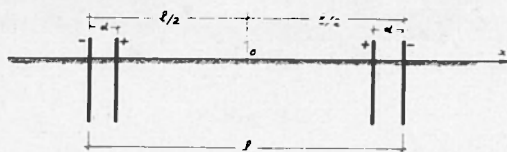


Fig. 1

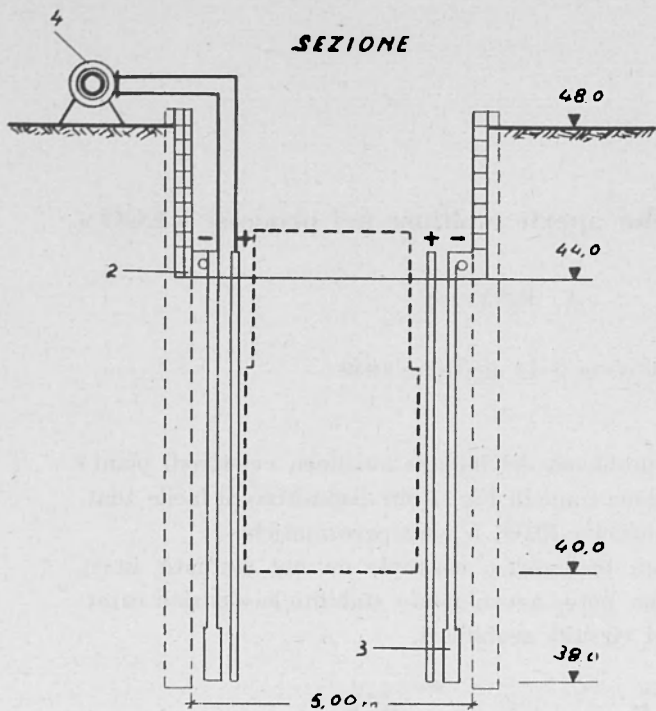
La pratica edilizia ha dimostrato che per ottenere un abbassamento del livello delle acque sotterranee è molto efficace l'azione della corrente elettrica con idonei dispositivi elettrodici ad es. bifilari: a questo abbassamento idrico si accompagna un radicale miglioramento delle condizioni di stabilità di pendii e del fondo di eventuali scavi (v. Fig. 3).

Avvallamenti in cui non è possibile effettuare i lavori, e in cui si cercherebbe invano di sostenere il terreno con incastri e sostegni, vengono prosciugati e resi accessibili ai meccanismi, mentre i pendii, pur molto ripidi, si stabilizzano.

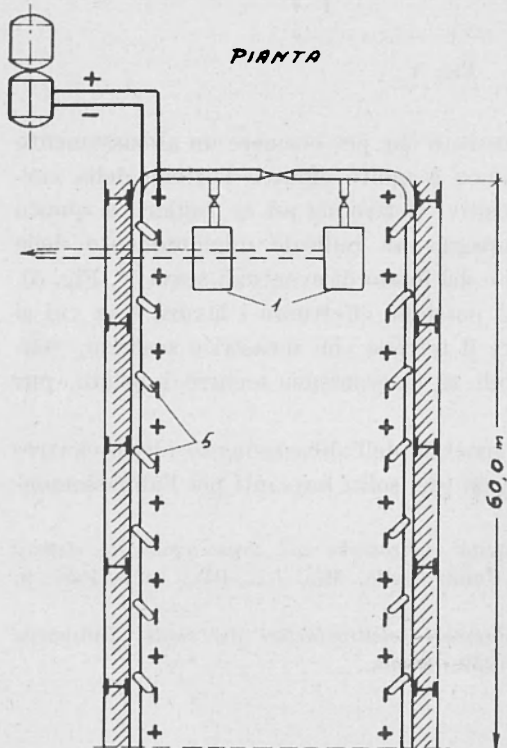
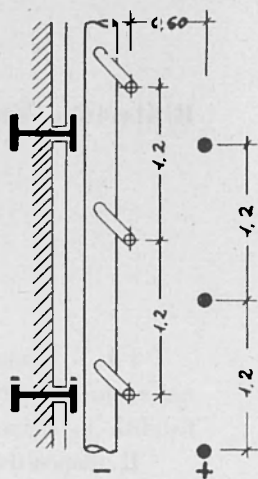
Come s'è visto lo schema generale dell'abbassamento idrico elettrosmotico prevede l'impiego di pozzi (dei soliti impianti per l'abbassamen-

(¹) BELLUIGI A., *Bicollinearità elettrodiche nel prosciugamento elettrosmotico dei suoli*. Giornale del Genio Civile, Min. L.L. PP., 1959, Fasc. 9, Roma.

BELLUIGI A., *Autoconsolidamenti elettrocinetici dei suoli*. Industria Italiana del Cemento, Agosto 1959, Roma.



PARTICOLARE



LEGGENDA:

- 1 - Pompe centrifughe per vuoto.
- 2 - Collettore del diametro di 15 em.
- 3 - Filtri di 3 em. di diametro.
- 4 - Sorgente di c.e.
- 5 - Collegamenti a cerniera.

to del livello idrico), ma catodizzati. Affiancati e prossimi ai catodi circuenti gli scavi appaiono gli anodi la cui azione è paragonabile a quella di pompe di svuotamento. Allorquando i terreni sono formati da strati sovrapposti a diversa permeabilità, il regime di filtrazione diventa ancor più complesso, ed è possibile che l'acqua si trovi nei singoli strati in diverse condizioni, come allo stato gravitazionale in alcuni, in quello capillare in altri. In seguito a ciò sono inevitabili la comparsa di orizzonti

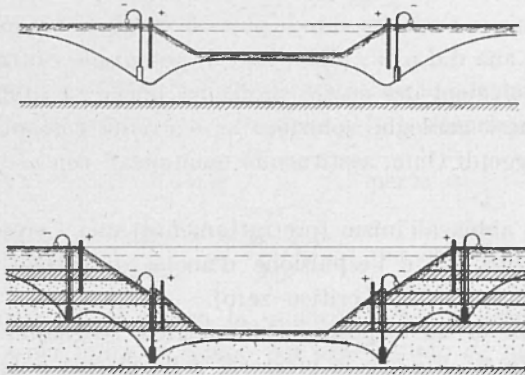


Fig. 3

o di focolai che permettono i distacchi di terre negli scavi, e conseguenti insoddisfacenti condizioni dei lavori. Applicando allora l'abbassamento elettrosmotico si creerà specie nelle assise argillose, focolai locali di pressioni negative le quali aumenteranno sensibilmente l'efficacia delle forze capillari, creando appunto quelle condizioni necessarie per poter prosciugare e elevare la stabilità delle scarpate.

Le bifilarità polari comportano spesso vantaggiose differenziazioni dai dispositivi polari alternati, a tappeto, talvolta caotici, non ben definibili nei loro effetti.

Mostreremo che le proprietà evidenziate delle geometrie bicilindriche-polari s'estendono alle più diverse geometrie bifilari, a cominciare dalla rettilinea, oggetto di esame di questo primo paragrafo: (Fig. 2, 3).

La « bifilarità rettilinea » (Fig. 1, 2) si realizza con catodi esterni allineati piano-paralleli, verticali, indefiniti, ampiezza intercatodica trasversale l . Gli anodi, allineati, anch'essi indefiniti piano-paralleli, sono distanti dai catodi $d \ll l$, e reciprocamente $(l - 2d)$.

Con ciò si realizza un particolare « sbarramento polare », circunte un determinato volume, per cui s'ottiene un transfert dell'acqua tellurica

dall'interno d'una zona umida ($l - 2d$), esternamente ai suoi confini, accompagnato d'abbassamento della tavola d'acqua e da compattazione superiormente a questa.

Gli apporti idrici extranodici, che nelle bifilarità eteronome estese snaturano il presumibile rapporto di stretta corrispondenza tra ambiti di terreno da prosciugare e ambiti interpolari ⁽²⁾ nelle bifilarità polari, conferiscono invece a tale rapporto un valore reale.

Si determini così tra più anodi elementari cortocircuitati componenti l'« Anodo », e i relativi catodi pure in parallelo tra loro componenti il « Catodo » una d.d.p. V , (differenza di potenziale elettrico continuo).

Daremo soluzioni del nostro problema lineare a « tensione costante »: per ottenere analoghe soluzioni a « corrente costante I », basterà applicare la legge di Ohm, sostituendo ovunque V con ρId , (ρ resistività del terreno).

Il terreno abbia all'inizio (pretrattamento) una « pressione geoidrostatica » costante H_0 , e l'espulsione d'acqua al catodo avvenga alla « stessa pressione » (tempo critico zero).

Trattandosi di un dispositivo simmetrico, scegliamo quale origine delle coordinate (v. Fig. 1), la mezzzeria della distesa polare ($l/2$), risultando sufficiente limitare le considerazioni ai semispazio $x \geq 0$.

A causa della monodimensionalità del problema le equazioni fondamentali del processo [1] si scriveranno:

$$\left. \begin{aligned} q &= -k \frac{\partial H}{\partial x}, \quad 0 < x < \frac{l}{2} - d \\ q &= -k \frac{\partial H}{\partial x} + V k_e/d, \quad (l/2) - d < x < l/2 \end{aligned} \right\} \quad [1(1)]$$

Praticamente il terreno extraelettrodotico, non influirà sull'andamento del fenomeno, l'acqua tellurica venendo estratta solo dalla « zona intercatodica ». È questa, del resto, s'è detto, una caratteristica del bifilare polare in genere, la possibilità di poter delimitare elettricamente lo spazio da trattare, concentrando in esso tutta l'energia elettrica disponibile.

Alla [1(1)] s'aggiunge l'equazione differenziale a cui deve soddisfare la pressione H :

$$\frac{\partial^2 H}{\partial x^2} = c \frac{\partial H}{\partial t}; \quad [1(2)]$$

c qui inverso della costante standard di consolidamento.

⁽²⁾ BELLUIGI A., *Aspetti diversi applicativi dell'elettrogeosmosi transitoria*. Roma, Annali di Geofisica, 1958, vol. XI, n. 3-4.

La [1(2)] va risolta con la condizione iniziale:

$$H(x, 0) = H_0 \quad , \quad [1(3)]$$

le condizioni ai limiti (che comportano quelle di simmetria:

$$\frac{\partial H}{\partial x} = 0 \quad , \quad [1(4)]$$

(per $x = 0$), la condizione della pressione costante al catodo H_0 :

$$H = H_0 \quad , \quad \text{per } x = \frac{l}{2} \quad . \quad [1(4')]$$

Le condizioni di continuità all'anodo richiedono la continuità della pressione e del flusso idrico e, in virtù della [1(1)], s'esprimono:

$$\begin{aligned} (H_+) - (H_-) &= 0 \quad , \quad \text{per } x = \frac{l}{2} - d \\ \left(\frac{\partial H}{\partial x}\right)_+ - \left(\frac{\partial H}{\partial x}\right)_- &= \frac{K_e V}{k d} \quad , \quad \text{per } x = \frac{l}{2} - \tilde{a} \end{aligned} \quad [1(5)]$$

Determinata H , si ricava la quantità d'acqua estratta per unità di superficie e per unità di tempo per ogni catodo q_k , nonchè l'analoga quantità totale Q_k emunta dopo un tempo determinato:

$$q_k = -k \left(\frac{\partial H}{\partial x}\right)_x = \frac{l}{2} + k_e \frac{V}{\tilde{a}} \quad ; \quad Q_k = \int_0^t q_k dt \quad [1(6)]$$

Introducendo le grandezze adimensionali:

$$\delta = 2d/l \quad , \quad \xi = 2x/l \quad , \quad \theta = t/\tau \quad , \quad \tau = cl^2/4 \quad , \quad (\text{tempo caratteristico}) \quad [1(7)]$$

ponendo inoltre:

$$H - H_0 = \frac{k_e}{k} \varphi V \quad , \quad [1(8)]$$

e sostituendo le [1(7)], [1(8)], nelle [1(2)], [1(5)], il nostro problema consiste nel dover determinare una funzione $\varphi(\xi, \theta)$ per $0 \leq \xi \leq 1$ soddisfacente la:

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial \xi^2} = \frac{\partial \varphi}{\partial \theta} \quad , \quad \text{condizione iniziale:} \quad [1(9)]$$

$$\varphi = 0 \quad , \quad \text{per } \theta = 0 \quad , \quad \text{condizioni limiti:} \quad [1(10)]$$

$$\frac{\partial \varphi}{\partial \xi} = 0 \quad , \quad \xi = 0 \quad ; \quad \varphi = 0 \quad , \quad \xi = 1 \quad [1(11)]$$

e quelle di continuità:

$$\left. \begin{aligned} (\varphi_+) - (\varphi_-) &= 0 \quad , \quad \text{per } \xi = 1 - \delta \\ \left(\frac{\partial \varphi}{\partial \xi}\right)_+ - \left(\frac{\partial \varphi}{\partial \xi}\right)_- + \frac{1}{\delta} &= 0 \end{aligned} \right\} \quad [1(12)]$$

Trovata φ deriveranno q_k, Q_k , mercè:

$$\left. \begin{aligned} q_k &= 2 k_e \frac{V}{l} \left(\frac{\partial \varphi}{\partial \xi} + \frac{1}{\delta} \right)_{\xi=1} = k_e \frac{V}{d} \left(\delta \frac{\partial \varphi}{\partial \xi} + 1 \right) \\ Q_k &= \tau \int_0^{\theta} q_k d\theta \quad ; \quad k_e V/d = \mu I \end{aligned} \right\} \quad [1(13)]$$

Applicazioni della trasformata L .

Per la soluzione di questo problema si può applicare la trasformata di Laplace L , indicando con soprasegno le trasformate delle rispettive grandezze: $f = L(f)$.

Le trasformate L alle [1(9)], [1(12)] comportano il seguente problema relativo alla $\bar{\varphi}$ di φ . Risolvere:

$$\bar{\varphi}'' = s \bar{\varphi} \quad , \quad 0 \leq \xi \leq 1 \quad , \quad \text{condizioni ai limiti:} \quad [1(14)]$$

$$\bar{\varphi}' = 0 \quad , \quad \xi = 0 \quad ; \quad \bar{\varphi} = 0 \quad , \quad \xi = 1 \quad , \quad \text{di continuità:} \quad [1(15)]$$

$$\bar{\varphi}_+ - \bar{\varphi}_- = 0 \quad , \quad \xi = 1 - \delta \quad ; \quad (\bar{\varphi}')_+ - (\bar{\varphi}')_- + s^{-1} = 0 \quad [1(16)]$$

La soluzione della [1(14)], con le condizioni [1(15)] e [1(16)], è del tutto elementare. È facilmente verificabile che essa è data da:

$$\left. \begin{aligned} \bar{\varphi} &= sh \delta \sqrt{s} ch \xi \sqrt{s/\delta} s^{-1/2} ch s^{1/2} \quad , \quad 0 \leq \xi \leq 1 - \delta \\ \bar{\varphi} &= ch (1 - \delta) \sqrt{s} sh (1 - \xi) \sqrt{s/\delta} s^{3/2} ch s^{1/2} \quad , \quad 1 - \delta < \xi < 1 \end{aligned} \right\} \quad [1(17)]$$

Dalle [1(17)] si può risalire alla φ in due maniere diverse. Una prima consiste nell'applicare il « metodo dei residui ». La φ infatti è data dalla nota formula:

$$\varphi = \frac{1}{2\pi j} \int_L \bar{\varphi} e^{s\theta} d\theta \quad , \quad [1(18)]$$

con L retta parallela all'asse immaginario, a destra dell'origine. Essendo $\bar{\varphi}$ una funzione meromorfa di s , che s'annulla all'infinito, l'integrale si può calcolare quale somma dei residui relativi ai poli a sinistra di L . Questi poli, dati dagli zeri dei denominatori delle [1(17)], sono tutti semplici e precisamente saranno:

$$s = 0 \quad , \quad s_n = -\pi^2 \left(n + \frac{1}{2} \right)^2 \quad , \quad n = 0, 1, \dots$$

Per $s = 0$, il residuo della $(\bar{\varphi})$ è dato:

$$\lim_{s \rightarrow 0} s\bar{\varphi} = \begin{cases} 1 & , \quad 0 < \xi < 1 - \delta \\ (1 - \xi)/\delta & , \quad 1 - \delta < \xi < 1 \end{cases} \quad [1(19)]$$

mentre per s_n questo residuo è dato dal teorema dell'Hospital:

$$\lim_{s \rightarrow s_n} (s - s_n)\bar{\varphi} = \begin{cases} \frac{2 sh \delta \sqrt{s_n} ch \xi \sqrt{s_n}}{\delta s_n sh \sqrt{s_n}} = \\ = -2(-1)^n \frac{\text{sen} \delta \left(n + \frac{1}{2}\right) \pi}{\delta \left(n + \frac{1}{2}\right)^2 \pi^2} \cos \left(n + \frac{1}{2}\right) \pi \xi ; \quad (0 < \xi) \\ \\ \frac{2 ch (1 - \delta) \sqrt{s_n} sh (1 - \xi) \sqrt{s_n}}{\delta s_n sh \sqrt{s_n}} = \\ = -2(-1)^n \frac{\text{sen} \delta \left(n + \frac{1}{2}\right) \pi}{\delta \left(n + \frac{1}{2}\right)^2 \pi^2} \cos \left(n + \frac{1}{2}\right) \pi \xi ; \\ \\ \quad (1 - \delta < \xi < 1) . \end{cases} \quad [1(20)]$$

In virtù delle [1(19)] e [1(20)], s'ottiene per la somma dei residui della [1(18)]:

$$\varphi(\xi, \theta) = \left\{ \begin{array}{l} 1 \\ \frac{1 - \xi}{\delta} \end{array} \right\} - 2 \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{\text{sen} \delta \left(n + \frac{1}{2}\right) \pi \cos \left(n + \frac{1}{2}\right) \pi \xi}{\delta \left(n + \frac{1}{2}\right)^2 \pi^2} e^{-\left(n + \frac{1}{2}\right)^2 \pi^2 \theta} ,$$

$$\left\{ \begin{array}{l} 0 < \xi < 1 - \delta \\ 1 - \delta < \xi < 1 \end{array} \right. \quad [1(21)]$$

Una seconda maniera consiste nello sviluppare in « serie di potenze » le [1(17)], in virtù della serie geometrica:

$$\frac{1}{ch \sqrt{s}} = \frac{e^{-\sqrt{s}}}{2} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n e^{-2n\sqrt{s}} \quad [1(22)]$$

Sostituendo la [1(22)] nella [1(17)] s'ottiene:

$$\begin{aligned} \bar{\varphi} &= \frac{1}{2 \delta s^{3/2}} \left\{ \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \exp [-(2n+1-\delta-\xi)\sqrt{s}] + \right. \\ &\quad - \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \exp [-(2n+1+\delta+\xi)\sqrt{s}] + \\ &\quad + \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \exp [-(2n+1-\delta+\xi)\sqrt{s}] + \\ &\quad \left. - \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \exp [-(2n+1+\delta-\xi)\sqrt{s}] \right\}; 0 < \xi < 1 - \delta \\ \bar{\varphi} &= \frac{1}{2 \delta s^{3/2}} \left\{ \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \exp [-(2n+1-\delta-\xi)\sqrt{s}] + \right. \\ &\quad - \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \exp [-(2n+1+\delta+\xi)\sqrt{s}] + \\ &\quad + \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \exp [-(2n+1-\delta+\xi)\sqrt{s}] + \\ &\quad \left. - \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \exp [-(2n+1+\delta-\xi)\sqrt{s}] \right\}; 0 < \xi < 1. \end{aligned} \quad [1(23)]$$

I singoli termini sono tutti della forma $\exp a\sqrt{s}/s^{3/2}$, di note anti-trasformate.

Dato che nel seguito ci serviranno le L^{-1} d'altre funzioni, ne elencheremo alcune:

$$\left. \begin{aligned} L^{-1} e^{-a\sqrt{s}/\sqrt{s}} &= e^{-a^2/4\theta} / \sqrt{\pi\theta}; \quad L^{-1} e^{-a\sqrt{s}/s^{3/2}} = \sqrt{\theta} \psi_1(a/2\sqrt{\theta}) \\ L^{-1} e^{-a\sqrt{s}/s} &= \psi(a/2\sqrt{\theta}) \quad ; \quad L^{-1} e^{-a\sqrt{s}/s^2} = \theta \psi_2(a/2\sqrt{\theta}), \end{aligned} \right\} [1(24)]$$

$$\psi(y) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_x^{\infty} e^{-u^2} du = 1 - \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^y e^{-u^2} du = 1 - \Phi(y) \quad [1(25)]$$

$\Phi(y)$ funzione di Gauss, mentre ψ_1 e ψ_2 , sono definite da:

$$\psi_1(y) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} e^{-x^2} - 2y\psi(y), \quad \psi_2(y) = (1 + 2y^2)\psi(y) - ye^{-x^2}, \quad [1(26)]$$

combinazioni di funzioni esponenziali e di Gauss.

Per alti valori di y le funzioni ψ , ψ_2 , ψ hanno il comportamento asintotico:

$$\psi(y) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \frac{e^{-y^2}}{y}, \quad \psi_1(y) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \frac{e^{-y^2}}{y^2}, \quad \psi_2(y) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \frac{e^{-y^2}}{y^3}. \quad [1(27)]$$

Applicando alle [1(23)] termine a termine le L^{-1} s'ottiene:

$$\varphi(\xi, \theta) = \frac{\sqrt{\theta}}{2\delta} \left[\sum_{n=a}^{\infty} (-1)^n \psi_1 \left(\frac{2n+1-\delta-\xi}{2\sqrt{\theta}} \right) - \sum_{n=\beta}^{\infty} (-1)^n \psi_1 \left(\frac{2n+1+\delta+\xi}{2\sqrt{\theta}} \right) + \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \psi_1 \left(\frac{2n+1-\delta+\xi}{2\sqrt{\theta}} \right) - \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \psi_1 \left(\frac{2n+1+\delta-\xi}{2\sqrt{\theta}} \right) \right] \quad [1(28)]$$

dove nelle prime due somme la Σ procede da $a = 0, \beta = 0$, per $0 < \xi < 1 - \delta; a = 1, \beta = 1$, per $1 - \delta < \xi < 1$.

Soluzioni per la funzione ausiliaria φ .

Entrambe le serie [1(21)] e [1(28)], convergono molto rapidamente. La [1(21)] converge meglio col crescere del tempo (θ), e per tempi dell'ordine del « critico » sarà sufficiente il 1° termine. Per tempi molto più piccoli di τ sono invece necessari più termini. Il contrario avviene con le 4 serie [1(28)]. Queste convergono più rapidamente per piccoli θ . Per quest'ultimi il contributo principale proverrà dai primi termini delle 4 serie. Dalla struttura delle serie, e della asintotica [1(27)] per la $\psi_1(y)$, si vede inoltre che per θ molto piccoli s'ottiene un contributo notevole solo in vicinanza degli elettrodi, perchè solamente 2 dei 4 termini delle [1(28)] danno un contributo preponderante.

Col crescere del tempo, la φ assume grandezze non trascurabili anche nella zona interanodica e i 4 termini danno contributi dello stesso ordine.

Per il calcolo conviene usare la [1(28)] fino a quei θ per cui è sufficiente il 1° termine di ogni serie ($n = 0$ per la zona interanodica). Con valori più alti θ saranno sufficienti (per gli scopi pratici) 2 termini della serie [1(21)]. La [1(21)] mostra inoltre che per $\theta = \infty$, la φ s'avvicina al valore costante unitario, ($H = H_0 - \frac{k_e}{k} V$), nella zona interanodica. Nell'intervallo anodo-catodo, la φ decresce linearmente a 1 a 0, (H aumenta linearmente da $H_0 - \frac{k_e}{k} V$ a H_0), come si potrebbe direttamente dedurre anche dalla teoria stazionaria.

La « rapidità del prosciugamento » (nella zona interanodica in funzione di θ), a causa della presenza del fattore $1/\theta$ almeno all'inizio cre-

sce molto rapidamente al diminuire di $\delta = 2 d/l$, fatto fisicamente chiaro, dato che coll'aumentare di δ diminuisce anche la corrente.

All'inizio la disidratazione avviene quindi proporzionalmente all'intensità della corrente, con l'andar del tempo il limite raggiungibile del disseccamento è condizionato dalla tensione disponibile.

Per $t > \tau$ la φ dipende solo debolmente da θ , come mostra la [1(21)].

In altre parole: nella fase iniziale a tensione costante, aumenta abbastanza rapidamente il ritmo del prosciugamento, diminuendo la distanza tra gli elettrodi eteronomi. Nella fase avanzata del processo invece questa modalità (affatto pratica del resto), d'avvicinare le polarità per incrementare la corrente, non provoca conseguenze di rilievo. Si dovrà allora innalzare la tensione al generatore, onde poter procedere in condizioni lontane dallo stato d'equilibrio raggiungibile mediante una determinata tensione.

Doppi strati elettrolici.

Le [1(21)], [1(28)] si semplificano per $\vartheta \rightarrow 0$.

In questa situazione il bifilare si può assimilare addirittura a « doppi strati elettrolici », tra cui viene mantenuta una tensione V .

Le formule per $\vartheta \rightarrow 0$ si potranno applicare però già quando ϑ appare molto piccola rispetto all'unità ($\vartheta \ll 1$), per tempi tali per cui: $\theta \gg \delta$, ($t \gg \tau \vartheta^2 = c d^2$).

Il passaggio al limite nella [1(21)] si può eseguire passando al limite dei singoli termini. Si perviene così, per $\delta \rightarrow 0$:

$$\varphi(\xi, \theta) = 1 - \frac{2}{\pi} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n + 1/2} \cos(n + 1/2) \pi \xi e^{-(n + 1/2)^2 \pi^2 \theta}, \quad (\delta \rightarrow 0) \quad [1(21')]$$

L'analogo passaggio al limite nella [1(28)] si esegue invece accoppiando la 1ª con la 4ª, e la 2ª con la 3ª serie, e osservando che, in virtù delle [1(25)] e [1(26)] si ha:

$$\frac{d}{dy} \psi_1(y) = -2 \psi(y) \quad .$$

Si perviene così, per $\vartheta \rightarrow 0$ a:

$$\begin{aligned} \varphi(\xi, \theta) = & \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \cdot \psi\left(\frac{2n+1-\xi}{2\sqrt{\theta}}\right) + \\ & + \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \cdot \psi\left(\frac{2n+1+\xi}{2\sqrt{\theta}}\right) \quad . \end{aligned} \quad [1(28')]$$

Le proprietà di convergenza delle [1(21')], [1(28')], sono analoghe rispettivamente a quelle delle [1(21)] e [1(28)], lo stesso dicasi per le loro applicabilità al calcolo effettivo della φ per piccoli e grandi θ . Nella [1(28')] appare inoltre chiaramente che per bassissimi θ , il contributo più notevole si ha nella zona degli elettrodi $\xi = 1$, contributo essenzialmente definito dal 1° termine della 1ª serie.

Calcolo di q_k , Q_k .

Passiamo al calcolo dell'acqua estraibile al catodo, ovverosia delle grandezze q_k , Q_k (riferentisi all'unità di sezione di un catodo (Fig. 1).

Esse si possono ricavare sostituendo direttamente le [1(21)] e [1(28)] nelle [1(13)]. Però è più comodo, specie per quel che riguarda Q_k , ricavare quest'ultima applicando la L . Si noti che:

$$L\left(\delta \frac{\partial \bar{\varphi}}{\partial \xi} + 1\right)_{\xi=1} = (\delta \varphi^1 + s^{-1})_{\xi=1} = s^{-1} \left[1 - \frac{ch(1-\delta)\sqrt{s}}{ch\sqrt{s}} \right], \quad [1(29)]$$

per cui si ha:

$$\begin{aligned} \bar{q}_k &= \frac{2 k_e V}{l \delta} \frac{1}{s} \left\{ 1 - \frac{ch(1-\delta)\sqrt{s}}{ch\sqrt{s}} \right\} \\ \bar{Q}_k &= \frac{2 k V \tau}{l \delta} \frac{1}{s^2} \left\{ 1 - \frac{ch(1-\delta)\sqrt{s}}{ch\sqrt{s}} \right\}. \end{aligned} \quad [1(30)]$$

In modo analogo, come per φ , si possono ricavare due espressioni per q_k^* , Q_k^* .

Col « metodo dei residui », si procede come sopra: il polo $s = 0$ non dà nessun contributo per q_k , mentre si ha, applicando il teorema de l'Hospital:

$$\lim_{s \rightarrow 0} s^{-1} \left\{ 1 - \frac{ch(1-\delta)\sqrt{s}}{ch\sqrt{s}} \right\} = \delta \left(1 - \frac{\delta}{2} \right). \quad [1(31)]$$

Analogamente per i poli $s = s_n$ si ha:

$$\begin{aligned} \lim_{s \rightarrow s_n} (s - s_n) \left[1 - \frac{ch(1-\delta)\sqrt{s}}{ch\sqrt{s}} \right] &= -2\sqrt{s_n} \frac{ch(1-\delta)\sqrt{s_n}}{ch\sqrt{s_n}} = \\ &= -2 \left(n + \frac{1}{2} \right) \pi \operatorname{sen} \delta \pi \left(n + \frac{1}{2} \right). \end{aligned} \quad [1(32)]$$

I residui relativi a q_k , Q_k si determinano moltiplicando le [1(32)] rispettivamente per $e^{\theta s_n/s_n}$, $e^{\theta s_n/s_n^2}$. Si perviene così alla 1ª forma per le q_k , Q_k :

$$\left. \begin{aligned}
 q_k(\theta) &= 4 \frac{k_e}{l} V \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\text{sen } \delta (n + 1/2) \pi}{\delta (n + 1/2) \pi} e^{-(n + 1/2)^2 \pi^2 \theta} \\
 Q_k(\theta) &= 2 \frac{k_e}{l} V \tau \left\{ 1 - \frac{\delta}{2} - 2 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\text{sen } \delta (n + 1/2) \pi}{\delta (n + 1/2)^3 \pi^3} e^{-(n + 1/2)^2 \pi^2 \theta} \right\}, \quad [1(33)]
 \end{aligned} \right\}$$

formule valedoli per bifilari rettilinei indefiniti.

Gli andamenti temporali q_k sono privi di pianerottoli (v. Fig. 4) e (v. Fig. 5 per Q_k).

Per ottenere il 2° tipo di formule scriviamo le sotto forma di serie:

$$\left. \begin{aligned}
 \bar{q}_k &= \frac{2 K_e V}{l \delta} s^{-1} \left\{ 1 - \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n e^{-(2n + \delta) \sqrt{s}} + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n e^{-(2n - \delta) \sqrt{s}} \right\} \\
 \bar{Q}_k &= \frac{2 k_e V \tau}{l \delta} s^{-2} \left\{ 1 - \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n e^{-(2n + \delta) \sqrt{s}} + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n e^{-(2n - \delta) \sqrt{s}} \right\}
 \end{aligned} \right\} \quad [1(34)]$$

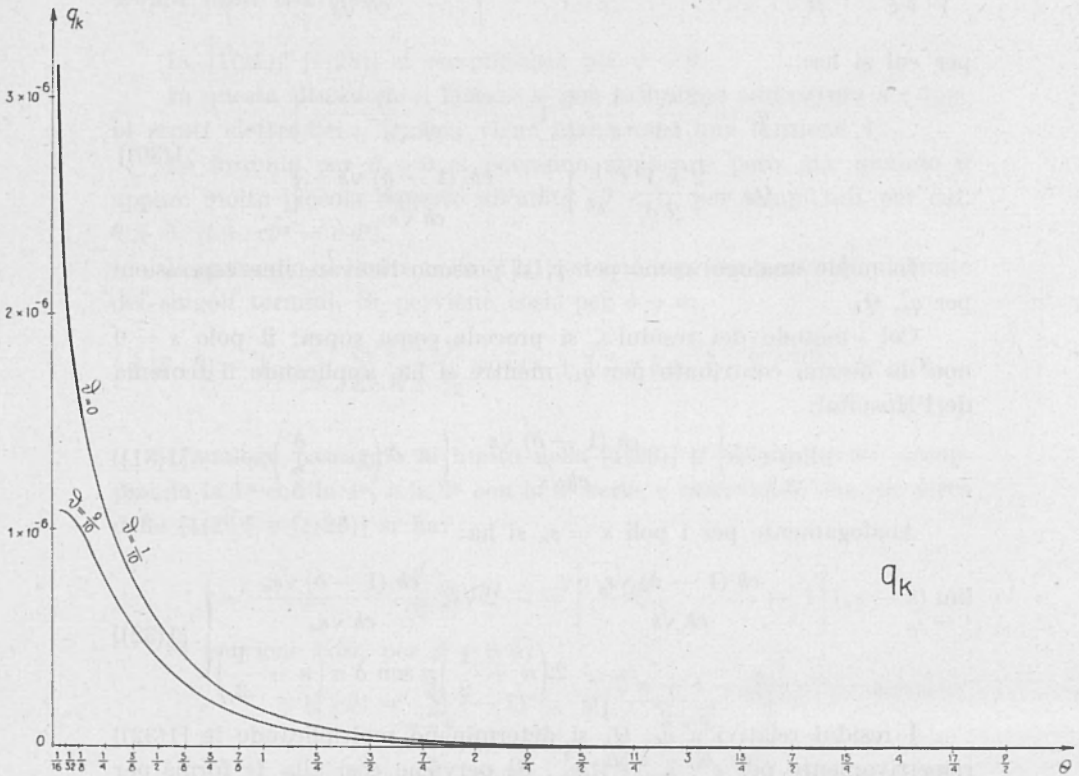


Fig. 4

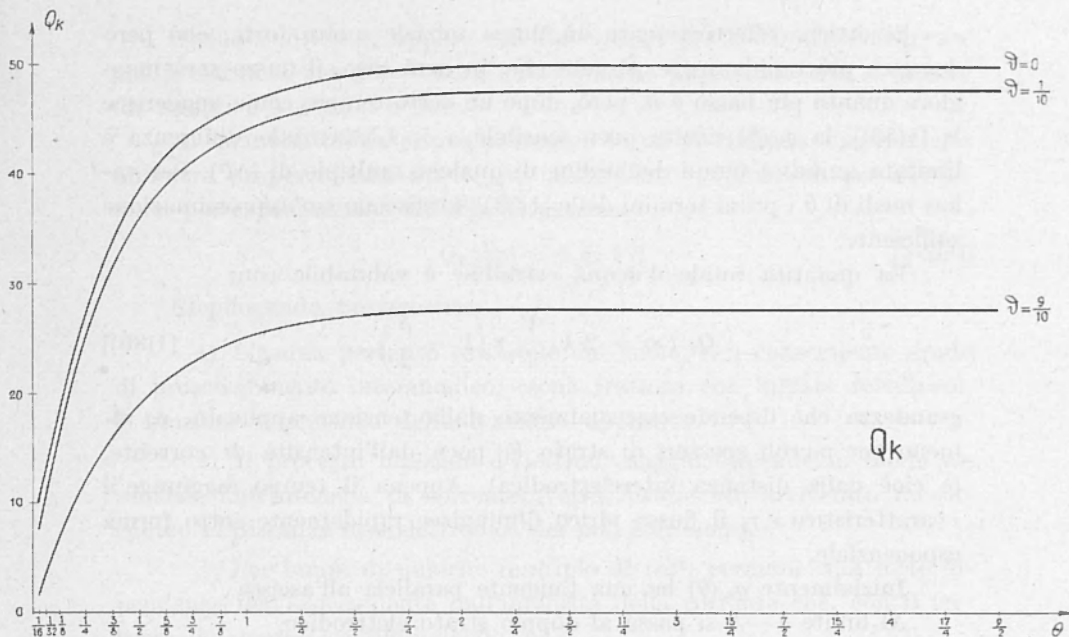


Fig. 5

Le antitrasformate dei singoli termini sono date dalle [1(24)], la cui applicazione, (tenendo conto che $\psi(0) = \psi_2(0) = 1$), dà:

$$\begin{aligned}
 q_k(\theta) &= 2 \frac{k_e V}{l \delta} \left[1 - \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \psi \left(\frac{2n + \delta}{2\sqrt{\theta}} \right) + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \psi \left(\frac{2n - \delta}{2\sqrt{\theta}} \right) \right] \\
 Q_k(\theta) &= 2 \frac{K_e V}{l \delta} \tau t \left[1 - \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \psi_2 \left(\frac{2n + \delta}{2\sqrt{\theta}} \right) + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \psi_2 \left(\frac{2n - \delta}{2\sqrt{\theta}} \right) \right]
 \end{aligned}$$

[1(35)]

Le [1(33)] e [1(35)] convergono bene, e, come per le [1(21)] e [1(23)], le 1^e sono convenienti per valori medi ed alti di θ , le 2^e per piccoli θ . Se anche δ è piccolo, allora per piccoli θ può essere sufficiente il 1^o termine ($n = 0$) della 1^a serie.

Come si vede dalla 1^a delle [1(35)], $q_k(\theta)$ parte da:

$$q_k(\theta) = 2 K_e V / l \delta = k_e V / d = \mu I \quad , \quad (\text{stazionarietà}),$$

mantiene tale valore per un tempo:

$$\theta \sim \vartheta^2 / 4 \quad , \quad t \sim c d^2 / 16 \quad ,$$

il che farebbe pensare che, almeno per quanto riguarda l'estrazione idrica, non conviene avvicinare eccessivamente i poli eteronomi.

Si ottiene effettivamente un flusso iniziale molto forte, che però decresce più rapidamente. È vero che, in ogni caso, il flusso sarà maggiore quanto più basso è ϑ , però, dopo un certo tempo, come suggerisce la [1(33)], la $q_k(\theta)$ risulta poco sensibile a δ . L'essenziale differenza è limitata quindi a tempi dell'ordine di qualche multiplo di (cd^2) . Per valori medi di θ i primi termini delle [1(33)] forniscono un'approssimazione sufficiente.

La quantità totale d'acqua estraibile è valutabile con:

$$Q_k(\infty) = 2 k_e \frac{V}{l} \tau \left(1 - \frac{\delta}{2}\right), \quad [1(36)]$$

grandezza che dipende essenzialmente dalla tensione applicata, e, almeno per piccoli spessori di strato θ , poco dall'intensità di corrente, (e cioè dalla distanza interelettrodica). Appena il tempo raggiunge il « caratteristico » τ , il flusso idrico diminuisce rapidamente sotto forma esponenziale.

Inizialmente $q_k(\theta)$ ha una tangente parallela all'ascissa.

Al limite $\delta \rightarrow 0$ si passa al doppio strato elettrodico.

Nella [1(33)] il passaggio è semplice, si hanno, per $\theta \rightarrow 0$, le seguenti risolventi:

$$\left. \begin{aligned} q_k(\theta) &= 4 k_e \frac{V}{l} \sum_{n=0}^{\infty} e^{-(n+1/2)^2 \pi^2 \theta} \\ Q_k(\theta) &= 2 k_e \frac{V}{l} \left[1 - \frac{2}{\pi^2} \sum_{n=0}^{\infty} (n+1/2)^{-2} e^{-(n+1/2)^2 \pi^2 \theta} \right] \end{aligned} \right\} [1(33')]$$

Per eseguire l'analogo passaggio al limite nelle [1(35)] occorre staccare il 1° termine ($n=0$) dalla 1ª serie e accoppiarlo coll'unità, mentre i termini rimanenti vanno accoppiati coi corrispondenti della 2ª serie. Tenendo inoltre presente che dalle [1(24)] si ha:

$$\psi_2(y) = -2 \psi_1(y), \quad \psi_1'(y) = -\frac{2}{\sqrt{\pi}} e^{-y^2}, \quad \psi_1(0) = \frac{2}{\sqrt{\pi}}, \quad [1(37)]$$

s'ottiene dalle [1(35)], le:

$$\left. \begin{aligned} q_k(\theta) &= 2 k_e \frac{V}{l} \frac{1}{\sqrt{\pi \theta}} \left\{ 1 + 2 \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n e^{-n^2/\theta} \right\}, \quad \vartheta \rightarrow 0 \\ Q_k(\theta) &= 4 k_e \frac{V}{l} \tau \sqrt{\frac{\theta}{\pi}} \left\{ 1 + \sqrt{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \psi_1\left(\frac{n}{\sqrt{\theta}}\right) \right\} \end{aligned} \right\} [1(35')]$$

Le serie che compaiono nelle [1(35')] hanno valori negativi.

Il flusso idrico q_k appare infinito $\sim 1/\sqrt{t}$ per $t \rightarrow 0$. È d'osservare che le formule per $\vartheta = 0$ sono praticamente applicabili solo a partire da tempi: $\theta \gg \delta^2$, o ($t > cd^2$).

La quantità totale di acqua rimane tuttavia limitata, s'incrementa all'inizio proporzionalmente a \sqrt{t} , (andamento parabolico) per avvicinarsi poi esponenzialmente alla saturazione.

$$Q_k(\infty) = 2 k_e V/l \quad [1(36')]$$

Riepilogando brevemente:

1) L'acqua pertanto estraibile dal suolo, e il conseguente grado di prosciugamento interanodico, (zona trattata con bifilare rettilineo), è funzione soprattutto della tensione applicata.

2) Il processo iniziale d'elettrodrenaggio, dipende in modo essenziale dall'intensità di corrente, verrà fortemente accelerato raccorciando la distanza interelettrodica dei poli eteronomi.

3) Per tempi di qualche multiplo di (cd^2) permane una forte dipendenza dell'essiccamento dall'intensità della corrente che, con il crescere del tempo va diminuendo.

4) Aumentando ancora la durata dell'elettrotattamento la rapidità del prosciugamento incomincia a risentire essenzialmente della tensione. Se il decorso temporale diventa paragonabile col « tempo caratteristico », il fenomeno si rallenta, praticamente insensibile all'ampiezza catodo-anodo, e cioè all'intensità di corrente per V costante.

Ne consegue che il prosciugamento mediante una determinata tensione, è conveniente solo fino a tempi inferiori al « caratteristico ». Poi occorre incrementare la tensione praticando sempre distanze eteropolari (d) piuttosto piccole.

Il bifilare, in altri termini, diventa non più rispondente alla sua specifica funzionalità acceleratrice di « svuoto idrico » periferico se non si riporta la tensione a valori funzionali (dato che ciò sia possibile con i nostri generatori che dovrebbero permettere ampia manovrabilità di tensione).

Queste considerazioni qualitative rimangono presumibilmente valide con elettrodi finiti e tempi critici non nulli.

È però essenziale, in quest'ultimo, caso che i « tempi critici » rimangano inferiori a (cd^2), altrimenti essi tagliano la parte più utile del flusso. Trovandoci di fronte ad un « tempo critico », sarà quindi inutile diminuire la distanza tra gli elettrodi, oltre un limite per cui (cd^2) diventa più piccolo di esso.

* * *

§ 2. - I risultati relativi ai bifilari verticali cilindrici sono dunque estensibili ai verticali rettilinei, e anche a quelli di forma qualsiasi, v. Fig. (1)₂, (2)₂, (3)₂.

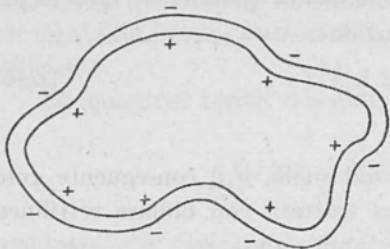


Fig. 1,

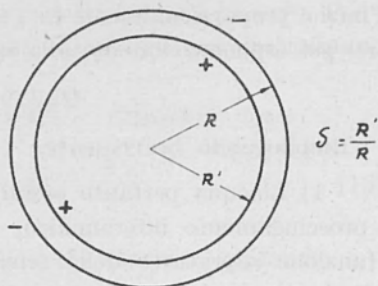
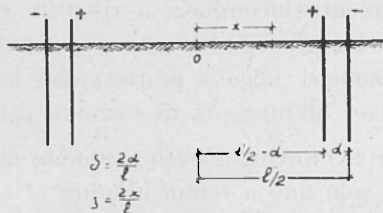


Fig. 2,

Passiamo infatti ai confronti tra le depressioni massime del livello idrostatico della massa umida elettrotrattata ottenibili coi due dispositivi studiati, per constatarne l'identità.

Le formule [2(1)] sono relative al « bicilindro », le [2(2)], [2(2')] sono relative al « birettilineo », qui dedotte nel § 1 con lo stesso metodo.

Fig. 3₂

Nel bicilindro circolare, la depressione massima ottenibile è valutabile [1] con:

$$\begin{aligned}
 H_0 - H_\infty &= \frac{k_e}{k} V & , & \quad 0 < \xi < \lambda & \quad \text{zona interanodica} \\
 H_0 - H_\infty &= \frac{k_e}{k} V \frac{lg \xi}{lg \lambda} & , & \quad \lambda < \xi < 1 & \quad \text{zona interelettroica}
 \end{aligned}
 \tag{2[1]}$$

H_0 livello idrostatico del terreno

H_∞ » » per $t \rightarrow \infty$

k_e coefficiente elettrosmotico

k coefficiente di Darcy

$\lambda = R'/R$, rapporto fra i raggi del bicilindro

r distanza d'un punto generico dal centro del sistema
 V tensione applicata agli elettrodi.

Nel dispositivo bifilare rettilineo, abbiamo ottenuto § 1):

$$\left. \begin{aligned} H_0 - H_x &= \frac{k_e}{k} V & , & \quad 0 < \xi < 1 - \delta & , & \text{zona interanodica} \\ H_0 - H_\infty &= \frac{k_e}{k} V \frac{1 - \xi}{\delta} & , & \quad 1 - \delta < \xi < 1 & , & \text{zona interlettrodica} \end{aligned} \right\} [2(2)]$$

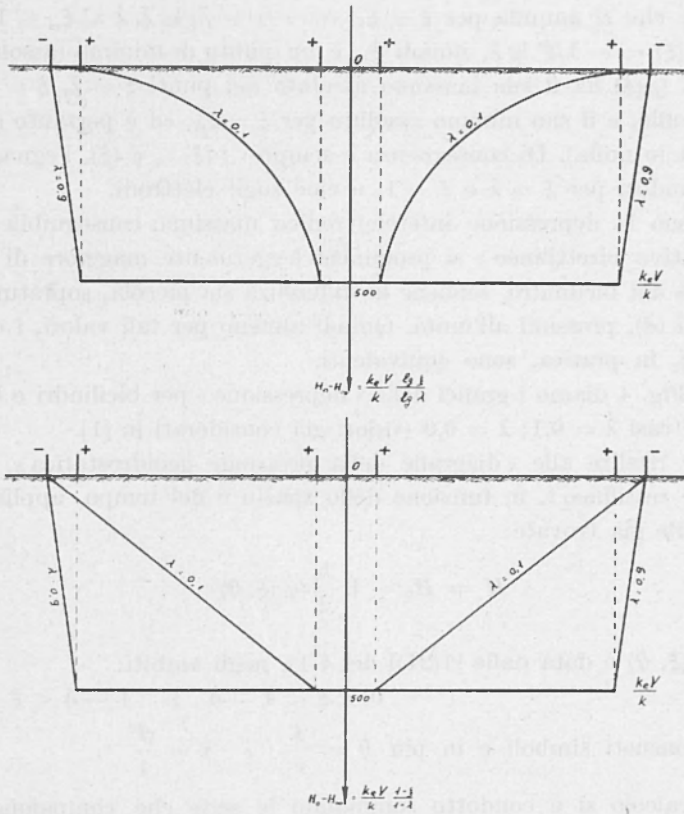


Fig. 4₂

introducendo le grandezze adimensionali: $\delta = 2 d/l$, $\xi = 2 x/l$. Con il rapporto $\lambda = (l - 2 d)/l$, per cui: $\delta = 1 - \lambda$, le [2(2)] pertanto diventano:

$$\left. \begin{aligned} H_0 - H_x &= \frac{k_e}{k} V & , & \quad 0 < \xi < \lambda & , & \text{zona interanodica} \\ H_0 - H_\infty &= \frac{k_e}{k} V \frac{1 - \xi}{1 - \lambda} & , & \quad \lambda < \xi < 1 & , & \text{zona interlettrodica} \end{aligned} \right\} [2(2)']$$

Nell'ambito interanodico perciò dei due dispositivi le depressioni ottenibili coincidono.

Quanto agli spazi interelettrofici il confronto si riduce a quello delle due funzioni f e φ (cui è proporzionale la depressione):

$f(\xi) = \lg \xi / \lg \lambda$; $\varphi(\xi) = (1 - \xi) / (1 - \lambda)$, o, meglio allo studio di:
Per $\mu(\xi)$ si ha:

$$\mu(\lambda) = \mu(1) = 0 \quad \mu'(\lambda) = \frac{1}{\xi \lg \lambda} + \frac{1}{1 - \lambda} ,$$

funzione che si annulla per $\xi = \xi_m = - (1 - \lambda) / \lg \lambda$, $\lambda \leq \xi_m \leq 1$. Inoltre: $\mu''(\xi) = - 1 / \xi^2 \lg \lambda$, quindi ξ_m è un punto di minimo (assoluto) di $\mu(\xi)$. La $\mu(\xi)$ ha il suo massimo assoluto nei punti $\xi = \lambda$, $\xi = 1$, con valore nullo, e il suo minimo assoluto per $\xi = \xi_m$, ed è pertanto sempre negativa (o nulla). Di conseguenza è sempre: $f(\xi) \leq \varphi(\xi)$, l'eguaglianza presentandosi per $\xi = \lambda$ e $\xi = 1$, e cioè sugli elettrodi.

Perciò la depressione interelettrofica massima, conseguibile con il « dispositivo birettilineo » si pronuncia leggermente maggiore di quella prodotta dal bicilindro, sebbene la differenza sia piccola, soprattutto per valori di (d) , prossimi all'unità. Quindi almeno per tali valori, i due dispositivi, in pratica, sono equivalenti.

In Fig. 4 diamo i grafici della « depressione » per bicilindri e birettilinei nei casi $\lambda = 0,1$; $\lambda = 0,9$ (valori già considerati in [1]).

Per risalire alle « diagrafie della pressione geoidrostatica », per il « bifilare rettilineo », in funzione dello spazio e del tempo, applichiamo le formule già trovate:

$$H = H_0 - V \frac{k_e}{k} \varphi(\xi, \theta) ,$$

dove $\varphi(\xi, \theta)$ è data dalle [1(21)] del § 1), negli ambiti:

$$0 < \xi < 1 - \delta \quad ; \quad 1 - \delta < \xi < 1 \quad ,$$

con i consueti simboli e in più $\theta = \frac{t}{r}$, $\tau = \frac{ct^2}{4}$.

Il calcolo si è condotto sommando le serie che compaiono nelle $\varphi(\xi, \theta)$, usando θ come parametro, al variare di ξ fra 0 ed 1. Circa 80 sono stati considerati 25 valori di esso, fino a quando cioè θ era tanto grande da annullare identicamente la serie a meno di 10^{-4} , ottenendo così il valore di $\varphi(\xi, \theta)$ e quindi di $H(\xi, \theta)$, per $\theta = \infty$, cioè il « livello geoidrostatico minimo » realizzabile.

Nei grafici costruiti per $\delta = 0$ (« doppio strato elettrofico »), $\delta = 0,1$, $\delta = 0,9$, sono state riportate soltanto alcune delle curve per evitare un eccessivo appesantimento della figura, profilazioni per ulteriori θ sono deducibili dalle tabelle. Fig. 5₂, Fig. 6₂, Fig. 7₂.

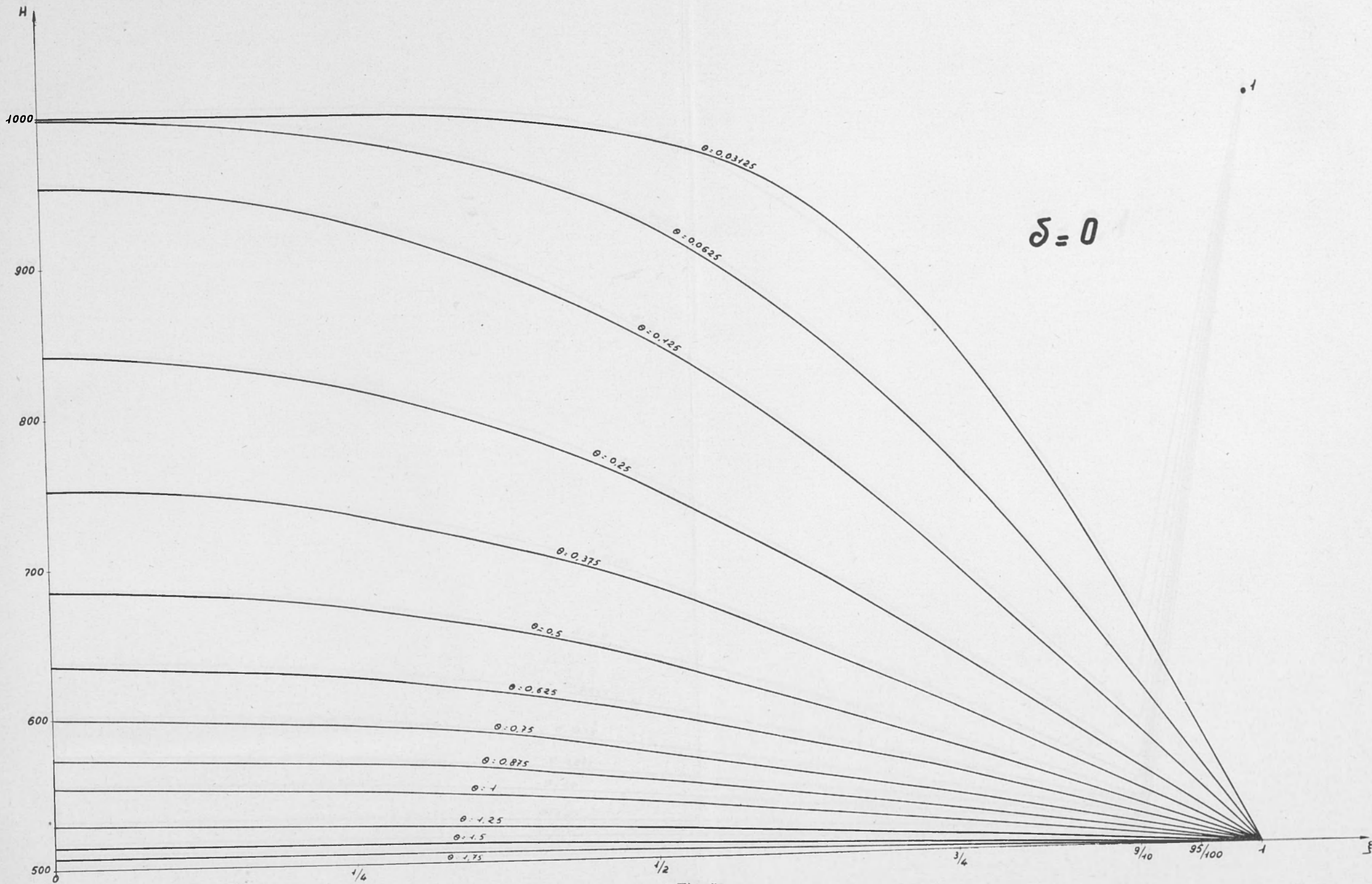


Fig. 5₂

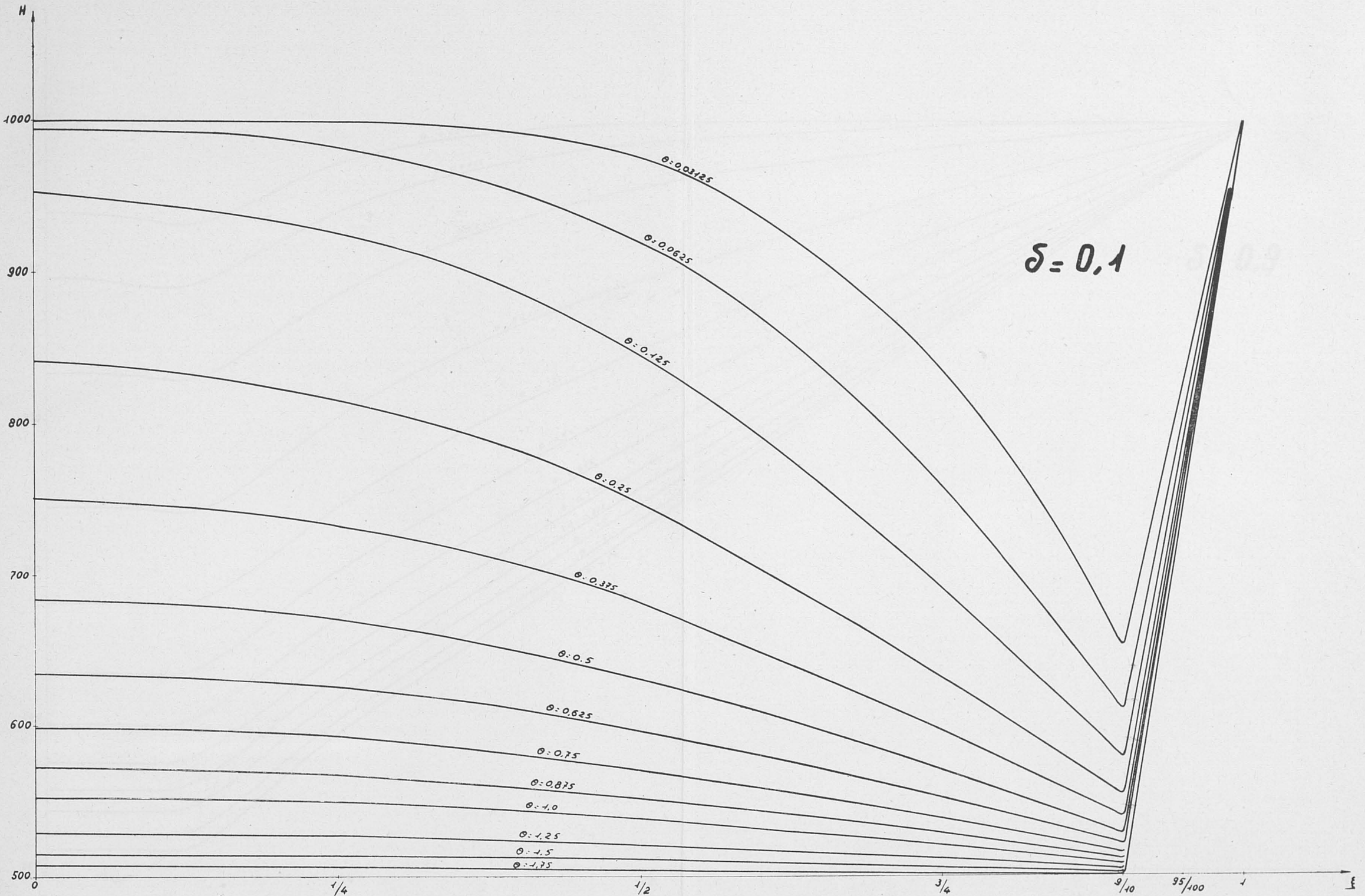


Fig. 6₂

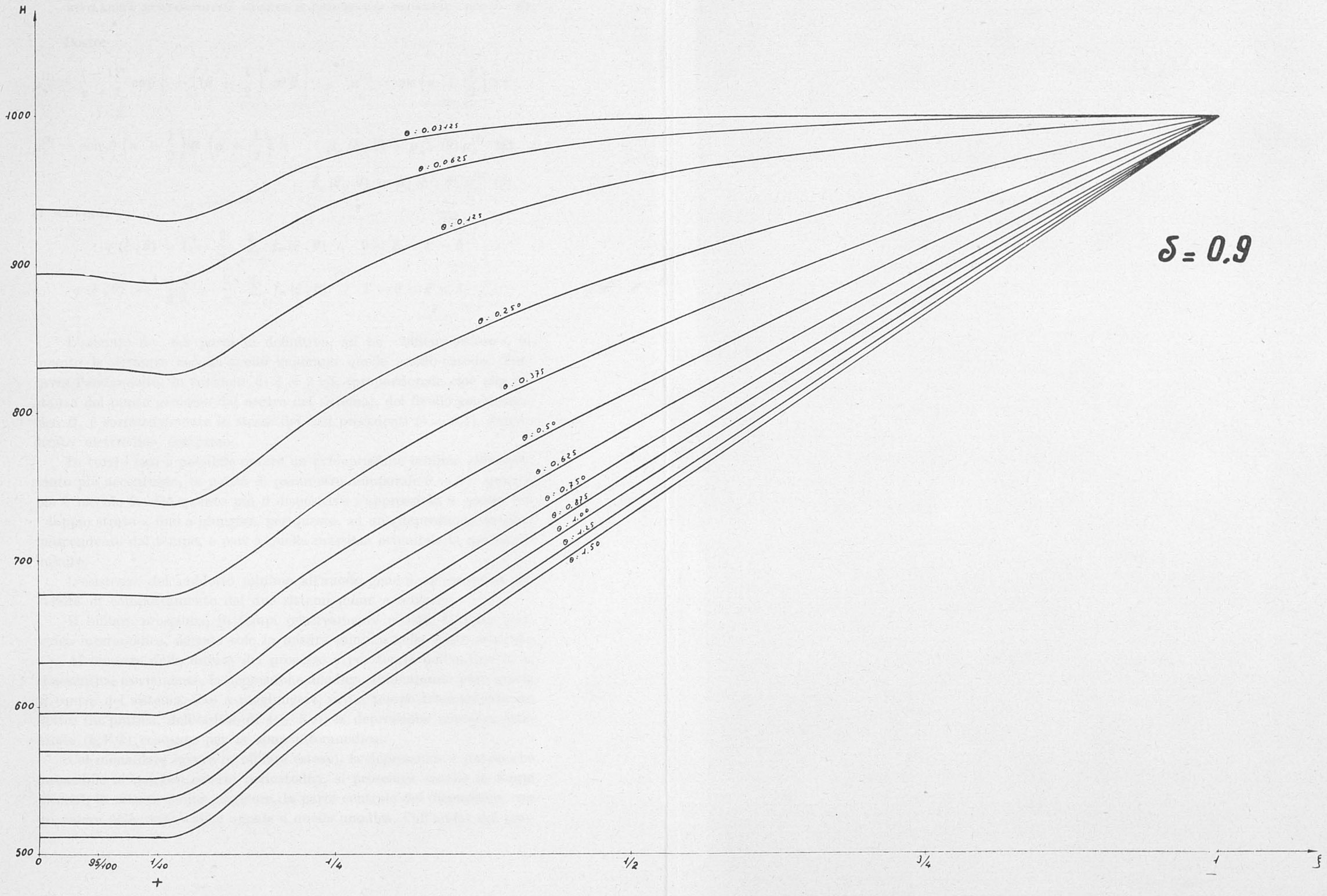


Fig. 7₂

Posto:

$$\mu_n^{(1)} = \frac{(-1)^n}{n+1} \exp \left[- \left(n + \frac{1}{2} \right)^2 \pi^2 \theta \right] , \quad \mu_n^{(2)} = \cos \left(n + \frac{1}{2} \right) \pi \xi .$$

$$\mu_n^{(3)} = \operatorname{sen} \delta \left(n + \frac{1}{2} \right) / \vartheta \left(n + \frac{1}{2} \right) \pi , \quad \mu_n(\xi, \vartheta) = \mu_n^{(1)}(\theta) \mu_n^{(2)}(\xi) ,$$

$$f_n(\xi, \theta) = \mu_n(\xi, \theta) \mu_n^{(3)}(\delta) ,$$

si scriverà:

$$\varphi(\xi, \theta) = 1 - \frac{2}{\pi} \sum_{n=0}^{\infty} f_n(\xi, \theta) , \quad 0 < \xi < 1 - \delta$$

$$\varphi(\xi, \theta) = \frac{1-\xi}{\delta} - \frac{2}{\pi} \sum_{n=0}^{\infty} f_n(\xi, \theta) , \quad 1 - \delta < \xi < 1 .$$

L'assunto $\delta = 0,9$ porta in definitiva, ad un « bifilare esteso », in quanto le distanze catodo-anodo superano quelle anodo-catodo. Tuttavia l'andamento, in funzione di $\xi = 2x/l$, (proporzionale cioè alla distanza del punto generico dal centro del sistema), del livello geoidrostatico H , è sostanzialmente lo stesso dei casi precedenti ($\delta = 0,1$), doppio strato elettrodico compreso.

In tutti i casi è possibile notare un evidentissimo minimo all'anodo, tanto più accentuato, (a parità di parametro temporale $\theta = t/\tau$, quanto più è piccolo θ , cioè quanto più il dispositivo s'approssima a quello del « doppio strato », fino a giungere, per questo, ad una depressione anodica indipendente dal tempo, e pari a quella massima ottenibile in un tempo infinito.

L'esistenza del suddetto minimo all'anodo genera un'essenziale diversità di comportamento dei due sistemi mono e bifilare.

Il bifilare prosciuga, in tempi relativamente piccoli, la zona periferica interanodica, agendo solo in misura minima nella parte centrale.

Al crescere della durata del processo e per tempi dell'ordine di τ , si accentua, ovviamente, la depressione anodica, aumentando pure quella al centro del sistema, fino a raggiungere, in un tempo teoricamente infinito, (in pratica, dell'ordine di $4 \pm 5 \tau$), la depressione massima ottenibile ($k_e V/k$) costante per la zona interanodica.

Col monofilare invece (o bifilare esteso), la depressione è pressoché insensibile ai margini esterni pericatodici, si prosciuga (anche in tempi piccoli), in misura molto maggiore, la parte centrale del dispositivo, con un valore della depressione uguale a quella anodica. Coll'andar del tem-

po, la depressione interanodica cresce, fino a raggiungere, (ancora per tempi sui $4 \pm 5 \tau$), il massimo $k_e V/k$.

Mettendo a confronto, per alcuni valori temporali i sistemi bifilare e monofilare (v. Fig. 8₂) s'osserva che, appunto per il fatto che la

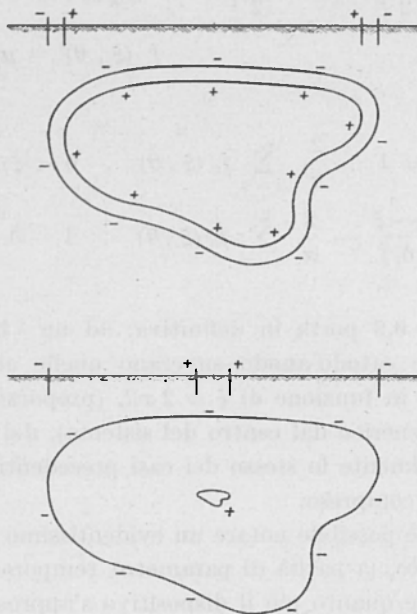


Fig. 8₂

depressione massima $k_e V/k$ si ottiene soltanto nella zona interanodica, il bifilare prosciuga in tempi adeguati (grandi valori di t) un volume molto più esteso di quello prosciugabile col monofilare. È anzi evidente che il bifilare può giungere a disidratare fino alla depressione limite $k_e V/k$ un volume in cui il monofilare non può avere alcuna influenza. Per $t < 4 \pm 5 \tau$ presso al centro del dispositivo, v'è un ambito in cui il monofilare appare più vantaggioso del bi, ed un altro, più prossimo alla periferia, in cui il bifilare determina una depressione maggiore del mono: (v. Fig. 9₂).

L'ascissa di separazione delle due zone si ottiene facilmente intersecando due curve relative ai due sistemi e ad un fissato valore del tempo, uguale per entrambi, ascissa d'inversione dell'effetto che varia ovviamente col tempo e decresce con esso.

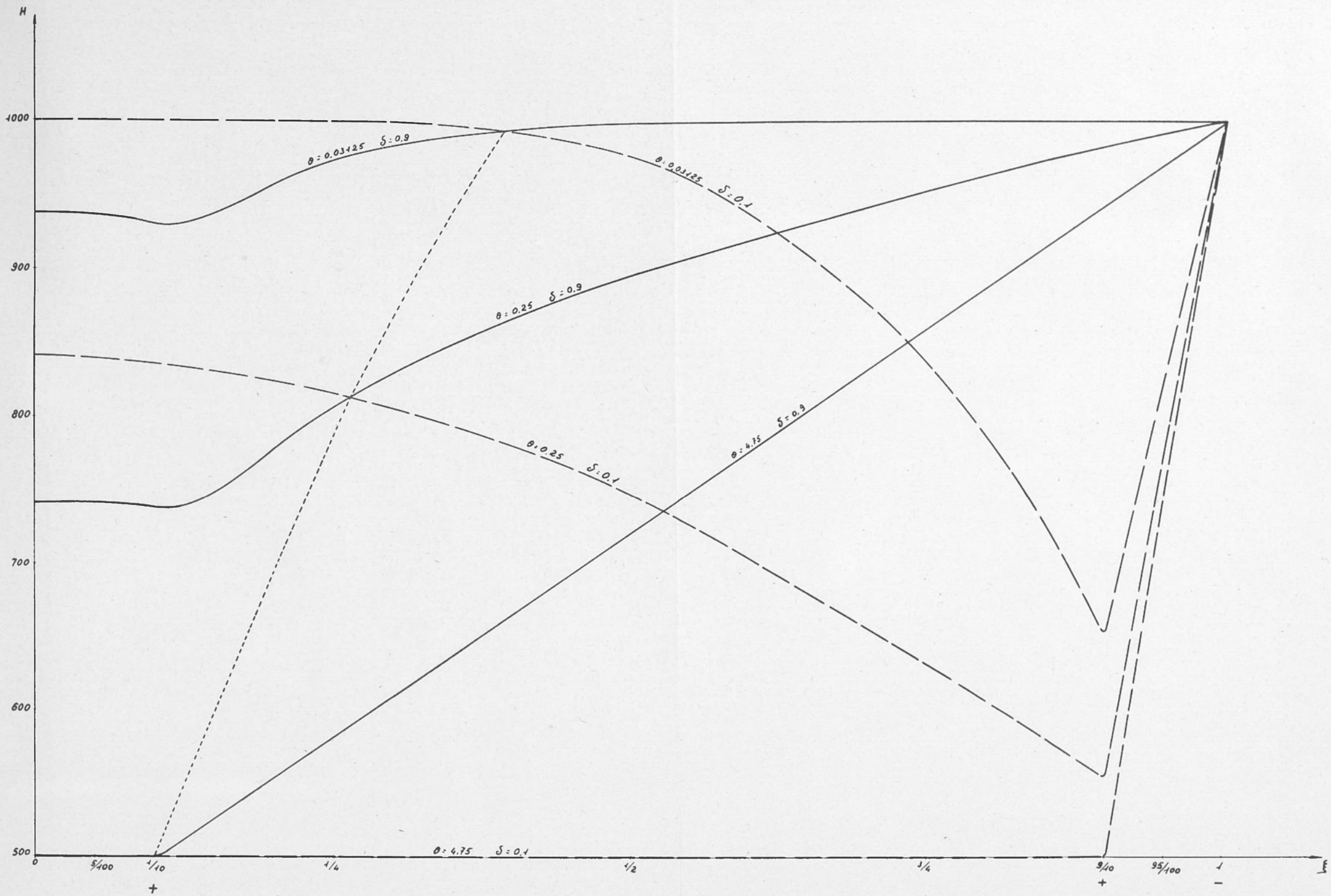


Fig. 9₂

Di conseguenza, per tempi grandi, il « dispositivo bifilare », è più vantaggioso del « mono », salvo nella zona perianodica del mono, in cui il risultato finale è identico nei due casi.

Da quanto detto si deduce che, quando si voglia elettrotrattare una zona il più possibile estesa, è senz'altro da preferirsi il bifilare, a patto di prolungare abbastanza il processo (fino a $4 \pm 5 \tau$), per ottenere un sensibile prosciugamento della zona centrale. Qualora interessi il prosciugamento dell'ambito centrale, da ottenersi in un tempo relativamente piccolo, è da scegliere il monofilare, con anodo o linea anodica convenientemente ubicata.

Un nuovo, più completo dispositivo, è il « monobifilare » (v. Fig. 10₂) con le possibilità, naturalmente, di esclusione dell'anodo centrale o degli anodi laterali, a seconda i problemi da trattare.

Per completare il paragrafo abbiamo voluto ricostruire graficamente quanto riguarda il comportamento nel tempo della « portata catodica »

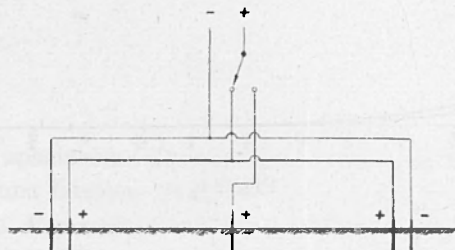


Fig. 10.

e relativa « quantità d'acqua estratta » al catodo in un certo tempo, per i bifilari rettilinei indefiniti:

$$q_k(\theta) = \frac{4 k_e V}{l} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\text{sen } \delta \left(n + \frac{1}{2} \right) \pi}{\delta \left(n + \frac{1}{2} \right) \pi} e^{-\left(n + \frac{1}{2} \right)^2 \pi^2 \theta}$$

$$Q_k(\theta) = \frac{2 k_e V \tau}{l} \left\{ 1 - \frac{\delta}{2} - 2 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\text{sen } \delta \left(n + \frac{1}{2} \right) \pi}{\delta \left(n + \frac{1}{2} \right)^3 \pi^3} e^{-\left(n + \frac{1}{2} \right)^2 \pi^2 \theta} \right\}$$

Questi andamenti di $q_k(\theta)$, $Q_k(\theta)$, sono analoghi naturalmente a quelli già ricostruiti per altre morfologie elettrodiche, salvo che qui mancano i pianerottoli per le q_k (Fig. 11₂, Fig. 12₂).

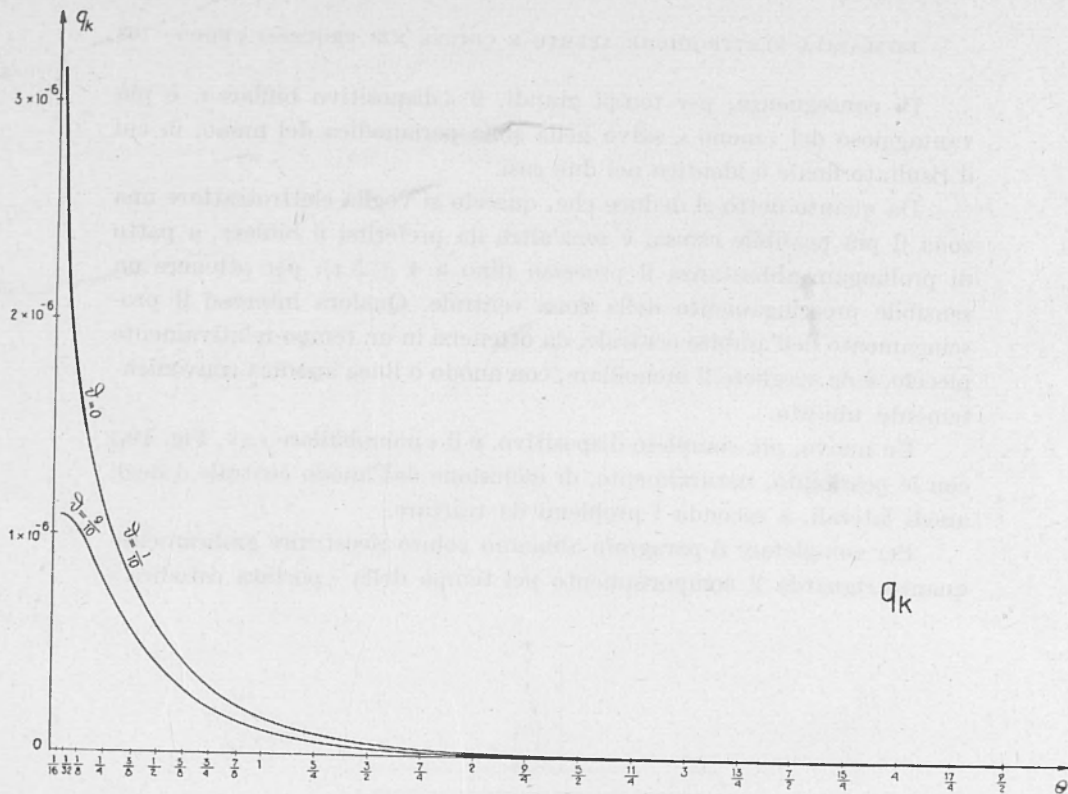


Fig. 11₂

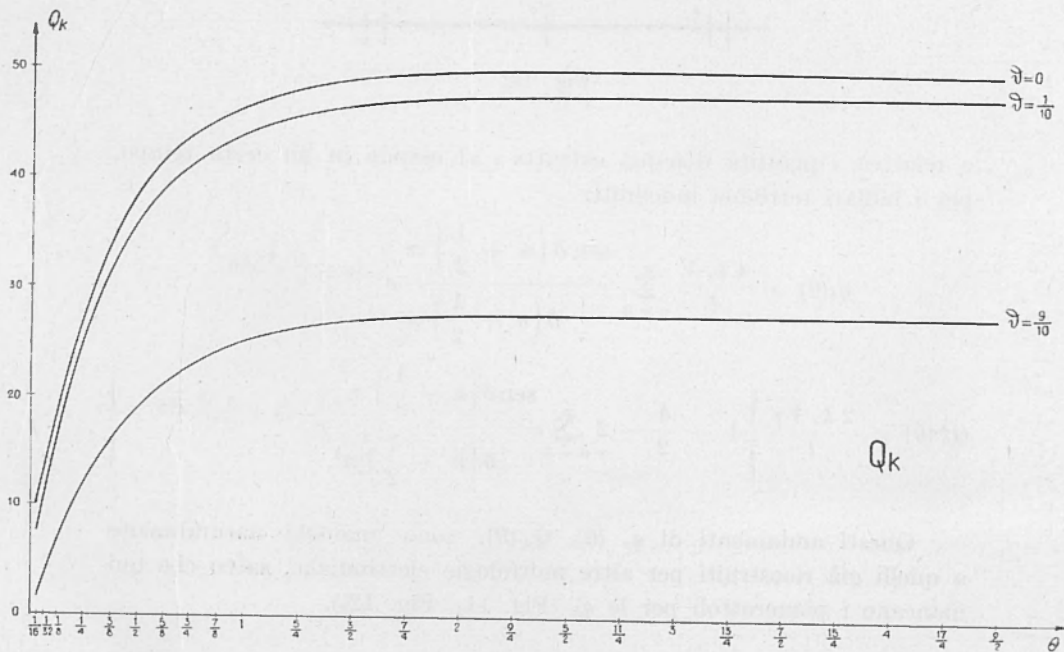


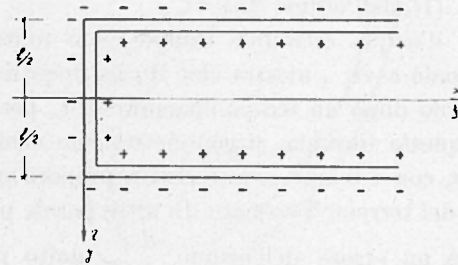
Fig. 12₂

* * *

§ 3. — Esamineremo infine dispositivi polari, pur di frequente uso, bifilari ad « U », elettrodi eteronomi al solito ravvicinati, tali da rassomigliare ad un doppio strato elettrodico (Fig. 1₃).

È una situazione polare questa piuttosto ricorrente e che se non riconosciuta a fondo, può portare a gravi errori applicativi, come vedremo.

Ripercorriamo brevemente il problema generale: in un terreno incoerente umido, siano immersi elettrodi bifilari, (delimitabili in genere

Fig. 1₃

superfici curve), spaziatura (d), piccola rispetto alle loro dimensioni. Stabilita tra essi una tensione elettrica V , ne deriva, in regime stazionario, una differenza di pressione tra gli elettrodi eteronomi H_k , H_A (pressioni catodiche e anodiche):

$$H_k - H_A = \frac{k^*}{k} V \quad , \quad k^*_e, k^* \quad , \quad [3(1)]$$

costanti di Helmholtz e di Darcy.

Coll'asterisco segnaliamo che k_e , k , si riferiscono al terreno interelettrodico, dove, data la sua natura particolare, le costanti possono differire da quelle della parte rimanente del terreno, che si rappresenteranno senza asterisco.

Il tempo necessario affinché in questa zona venga raggiunta la condizione [3(1)], è dell'ordine $t_c = c^* d^2$ (c^* è l'inverso della costante standard di consolidamento, valevole nell'ambito interpolare). In tale tempo t_c , a distanza di qualche multiplo di (d) dagli elettrodi, l'effetto non ha ancora avuto il tempo d'innescarsi, e il terreno si trova nelle condizioni integre di umidità iniziale.

Se « d » è una spaziatura piccola rispetto alle dimensioni del terreno da prosciugare, questo significa che la condizione [3(1)] sarà raggiunta

quando il terreno si trova nelle condizioni indisturbate, a parte una piccola zona vicino ai poli. Siccome anche il tempo in cui avviene la disidratazione è molto grande rispetto a t_c , non si commetterà un grande errore supponendo che la [3(1)] è soddisfatta sin dall'inizio. La teoria così impostata appare corretta solo per tempi dell'ordine t_c in una zona d intorno alle polarità.

Conseguenza di questa impostazione la H_A , calcolata dalla [3(1)], risulterà diversa dalla pressione iniziale. Questa discontinuità iniziale della pressione all'anodo implica che il flusso idrico di partenza sarà infinito, e precisamente v . [1], dell'ordine di $1/\sqrt{t}$.

La quantità d'acqua estraibile rimane però finita, cresce inizialmente, proporzionale a \sqrt{t} , mostra cioè il caratteristico andamento parabolico, esatto solo dopo un tempo maggiore di t_c , per cui calcolando il flusso totale da questa formula, si commetterà un errore (relativo) dell'ordine di $(t_c/\tau)^{1/2}$, con τ tempo caratteristico proporzionale a cl^2 , dimensione orizzontale del terreno d'essicare. In altre parole per l'acqua estratta si commetterà un errore dell'ordine $\frac{d}{l}$, molto piccolo nelle nostre ipotesi.

Si abbia così un terreno in cui infiggiamo una o più coppie di poli eteronomi ravvicinati. Nel terreno, oltre la piccola zona interelettrodica, praticamente non c'è corrente attiva, per cui valgono le semplici equazioni [1]:

$$\Delta H = c \frac{\partial H}{\partial t} ; \quad 3 \quad \vec{q} = -k \text{ grad } H . \quad [3(2)]$$

Alla [3(2)], oltre la condizione iniziale e eventualmente quella all'infinito (in terreno illimitato), si aggiungono le condizioni all'anodo e al catodo.

La pressione catodica H_k è determinata dalla pressione a cui viene estratta l'acqua, mentre l'anodica è data dalla [3(1)].

La quantità d'acqua estraibile conterà di due contributi: un primo che proviene dall'ambito extracatodico, un altro da quello extranodico. Siccome il terreno da trattare si trova, (specie con questo tipo polare), nell'ambito interanodico, a noi interessa solo quest'ultimo.

Se q è il flusso d'acqua per unità di tempo e di superficie elettrodica (portata unitaria):

$$q = k \frac{\partial H}{\partial n} , \quad \text{con } n \text{ normale dall'anodo verso il suolo.} \quad [3(4)]$$

Bifilare a morfologia chiusa qualsiasi.

Consideriamo un terreno racchiuso bifilarmente come in Fig. 2₃.

All'inizio, in questa porzione circoscritta di terreno s'abbia una idropressione H_0 , mentre al catodo mediante l'estrazione dell'acqua

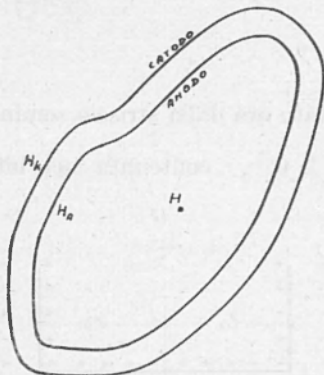


Fig. 2₃

(che si forma) la pressione viene mantenuta ad un livello costante H_k .
Poniamo:

$$H = H_0 - \left(H_0 - H_k + \frac{l_e^*}{h^*} V \right) (1 - F) = H_k - \frac{k_e^*}{k^*} V + \left(H_0 - H_k + \frac{l_e^*}{h^*} V \right) F \quad [3(5)]$$

Il nostro problema diventa: determinare F dall'equazione:

$$\Delta F = c \frac{\partial F}{\partial t} \quad , \quad [3(6)]$$

$$\text{condizione iniziale:} \quad F = 1 \quad , \quad t = 0, \quad [3(7)]$$

$$\text{al contorno:} \quad F = 0 \quad . \quad [3(8)]$$

Da considerazioni generali sulla teoria dell'equazione del calore è noto che la F sarà una funzione che decresce col tempo, da $F = 1$ a $F = 0$, per $t \rightarrow \infty$. Perché la H decresca è quindi necessario che:

$$H_0 - H_k + \frac{l_e^*}{k^*} V > 0 \quad .$$

Questa condizione, nota dalla teoria stazionaria, ed essenziale solo se $H_0 < H_k$, cioè se l'equazione dell'acqua avviene ad una pressione più

alta di quella contenuta nel terreno, esprime semplicemente che la tensione deve superare la « tensione critica »: $(H_0 - H_0) k^*/k_e^*$.

In questa situazione il prosciugamento tenderà al suo « valore limite »:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} H = H_k - \frac{v_e^*}{k^*} V \quad [3(9)]$$

Bifilari ad U.

Il terreno sia limitato ora dalla striscia seminfinita:

$-\frac{l}{2} < x < \frac{l}{2}$, $y \geq 0$, contenuta nel bifilare ad U (Fig. 3₃).

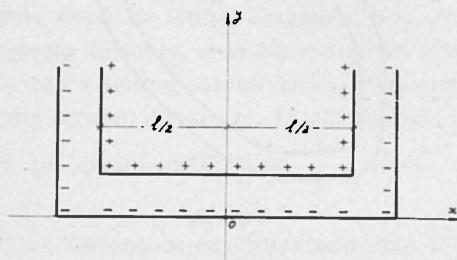


Fig. 3₃

Introdotte le coordinate adimensionali:

$$\xi = 2x/l \quad , \quad \eta = 2y/l \quad , \quad \theta = t/\tau \quad , \quad \tau = cl^2/4 \quad , \quad [3(10)]$$

il problema posto si trasforma nel seguente: determinare una funzione F che soddisfa alla:

$$\frac{\partial^2 F}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 F}{\partial \eta^2} = \frac{\partial F}{\partial \theta} \quad , \quad -1 \leq \xi \leq 1 \quad , \quad \eta \geq 0 \quad , \quad \theta > 0 \quad , \quad [3(11)]$$

con la condizione iniziale:

$$F = 1 \quad , \quad \theta = 0 \quad , \quad [3(12)]$$

e al contorno: $F = 0$, $\xi = \pm 1$; $F = 0$, $\eta = 0$, [3(13)]

a cui s'aggiunge la condizione all'infinito che la funzione si mantenga finita per $\mu = \infty$.

La maniera più facile di risolvere il problema è porre F in forma di prodotto di due funzioni di cui una dipende solo da ξ e θ , l'altra da μ e θ . Posto infatti:

$$F = \varphi(\xi, \theta) f(\eta, \theta) \quad , \quad [3(14)]$$

basterà trovare 2 funzioni φ, f , che soddisfino alle seguenti condizioni.

Per la φ :

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial \xi^2} = \frac{\partial \varphi}{\partial \theta}, \quad -1 \leq \xi \leq 1, \quad \theta \geq 0, \quad [3(11')]$$

$$\varphi = 1, \quad \theta = 0; \quad \varphi = 0, \quad \xi = \pm 1. \quad [3(12')]$$

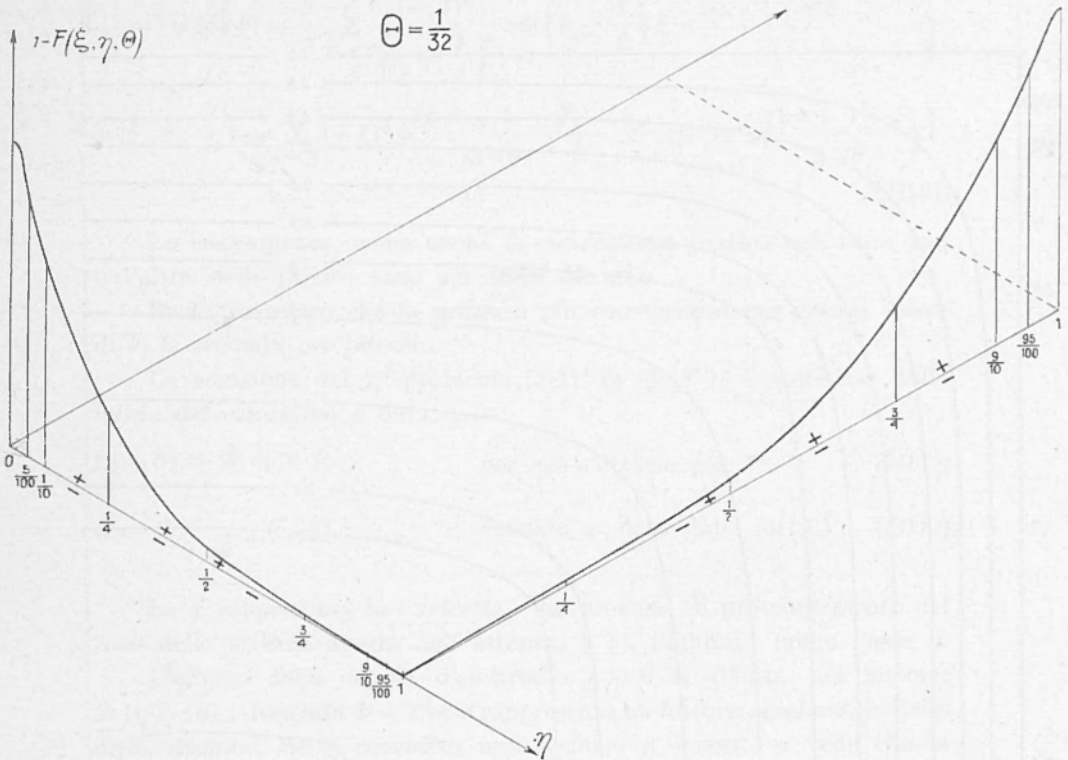


Fig. 3₄

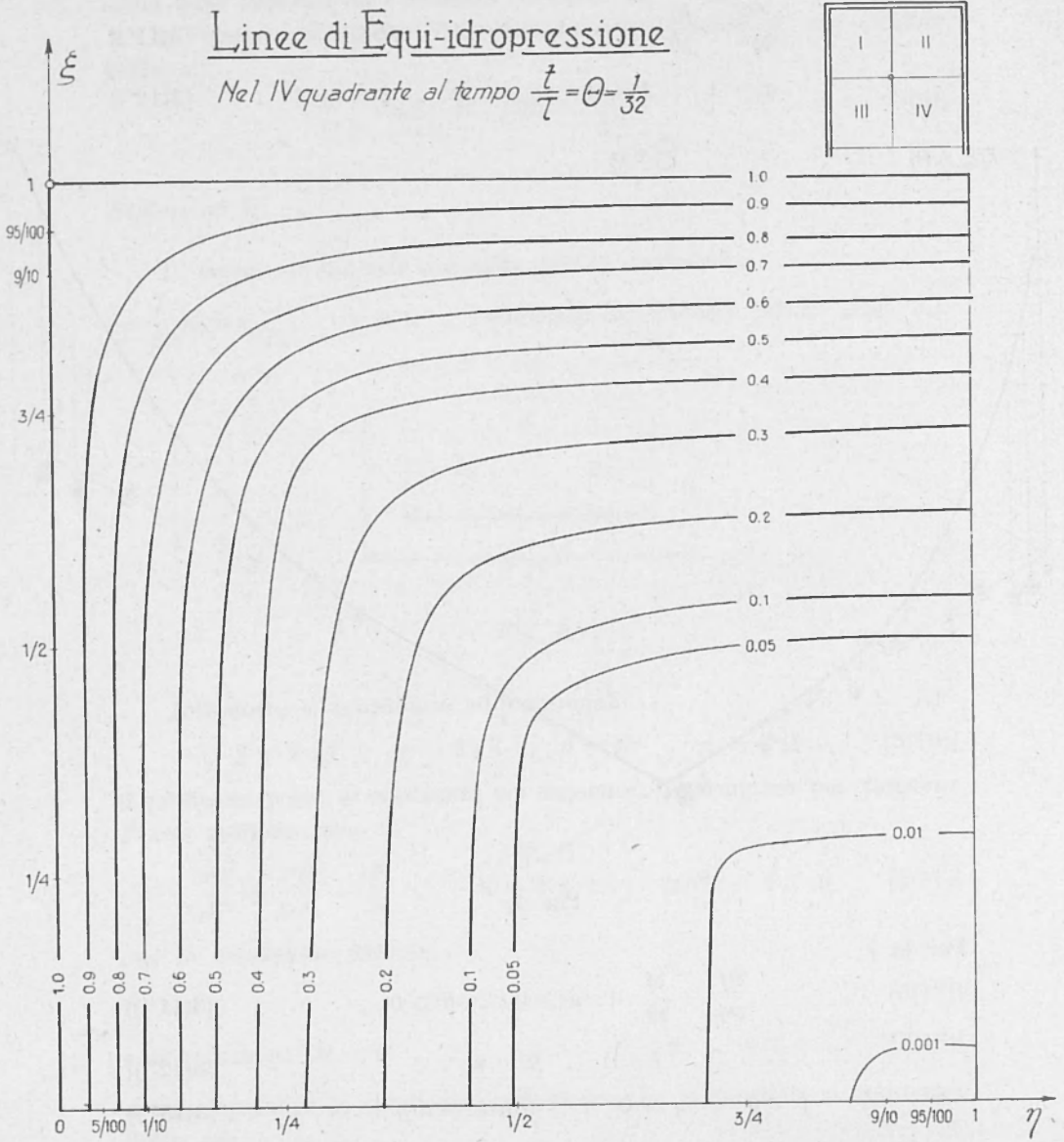
Per la f :

$$\frac{\partial^2 f}{\partial \eta^2} = \frac{\partial f}{\partial \theta}, \quad \eta \geq 0, \quad \theta \geq 0, \quad [3(11'')]$$

$$f = 1, \quad \theta = 0, \quad [3(12'')]$$

$$f = 0, \quad \eta = 0; \quad f \text{ finita per } \eta = \infty. \quad [3(13'')]$$

Si verifica immediatamente che in virtù della definizione [3(14)], la [3(11)] è conseguenza delle [3(11')], [3(11'')], la [3(12)] dalle [3(12')], [3(12'')], la [3(13)] dalle [3(13')], [3(13'')]. Il problema [3(11')], [3(13')] è già stato risolto, la φ attuale coincide con la $(1 - \varphi)$ del § 1).

Fig. 3_s

Indicando come allora con Φ la funzione di Gauss, e con φ il suo complemento:

$$\Phi(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x e^{-u^2} du, \quad \varphi = 1 - \Phi, \quad \text{si ha per } \varphi: \quad [3(15)]$$

$$\varphi(\xi, \theta) = \frac{2}{\pi} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\left(n + \frac{1}{2}\right)^2} \cos\left(n + \frac{1}{2}\right) \xi e^{-\left(n + \frac{1}{2}\right)^2 \pi^2 \theta}$$

$$\varphi(\xi, \theta) = 1 - \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \varphi\left(\frac{2n+1-\xi}{2\sqrt{\theta}}\right) - \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \varphi\left(\frac{2n+1+\xi}{2\sqrt{\theta}}\right) \quad [3(16)]$$

La convergenza, come anche la convenienza pratica nell'usare una o l'altra delle [3(16)] sono già state discusse.

Basta ricordare che la prima è più conveniente per grandi valori di θ , la seconda per piccoli.

La soluzione del 2° problema [3(11'')], [3(13'')] è notissima dalla teoria del calore, ed è data dalla:

$$f(\eta, \theta) = \Phi(\eta/2\sqrt{\theta}), \quad \text{per cui s'ottiene per } F: \quad [3(17)]$$

$$F = \Phi \frac{\eta}{2\sqrt{\theta}} \varphi(\xi, \theta), \quad \text{essendo } \varphi \text{ data dalle [3(16)].} \quad [3(18)]$$

La φ rappresenta la « velocità » del processo di prosciugamento nel caso della striscia aperta agli estremi, § 1), illimitata lungo l'asse y .

L'effetto della coppia d'elettrodi: $\eta = 0$ si riflette nel fattore: $\Phi(\eta/2\sqrt{\theta})$. Essendo $\Phi < 1$ esso rappresenta un fattore acceleratore della disidratazione. Se si considera una sezione: $\eta = \text{cost.}$, si vede che la differenza tra la pressione attuale e quella limite ($H_t \rightarrow \infty$), ha lo stesso andamento, (quale funzione di ξ), a meno d'un fattore, come nel caso lineare del § 1), fattore che per $\theta = 0$, ha il valore uno, e decresce a zero, proporzionalmente a $1/\sqrt{t}$, abbastanza lentamente. Questo decrescere è tanto più rapido quanto più piccolo è η , il che è d'aspettarsi da che l'influenza della coppia d'elettrodi $\eta = 0$ si fa sentire prima.

La velocità con cui decresce la pressione, è quindi data essenzialmente dalla $\varphi(\xi, \theta)$ che, come sappiamo, diminuisce esponenzialmente col tempo. Solo nella zona dei piccoli η , (dell'ordine di 1, cioè $y = l$), si farà sentire la presenza del fattore $\Phi(\eta/2\sqrt{\theta})$ per tempi intorno al « caratteristico »: $cl^2/4$. Esso sarà dell'ordine di grandezza di qualche frazione dell'unità.

Passiamo ora a determinare la quantità d'acqua estraibile per unità di tempo e di superficie catodica.

Dalla [3(4)] si ha immediatamente sull'elettrodo ($\xi = 1$):

$$q = -v \Phi \left(\frac{\eta}{2\sqrt{\theta}} \right) \cdot \left(\frac{\partial \varphi}{\partial \xi} \right)_{\xi=1} , \quad \text{sull'elettrodo } \eta = 0: \quad [3(19)]$$

$$q = v \frac{1}{\sqrt{\pi\theta}} \varphi(\xi, \theta) , \quad \text{con:} \quad [3(19)']$$

$$v = 2 \frac{k}{i} \left(H_0 - H_k + V \frac{k_e^*}{k^*} \right) . \quad \text{Posto:} \quad [3(20)]$$

$$\psi(\theta) = - \left(\frac{\partial \varphi}{\partial \xi} \right)_{\xi=1} , \quad \text{si trae dalla} \quad [3(16)]$$

$$\psi(\theta) = 2 \sum_{n=0}^{\infty} e^{-\left(n + \frac{1}{2}\right)^2 \pi^2 \theta} ; \quad \psi(\theta) = \frac{1}{\sqrt{\pi\theta}} \left(1 + 2 \sum_{n=1}^{\infty} e^{-\pi^2 n^2 / \theta} \right) \quad [3(21)]$$

Consideriamo anzitutto il flusso per unità d'elettrodo ($\xi = 1$) deriva dalla [3(19)]:

$$q = v \Phi(\eta/2\sqrt{\theta}) \psi(\theta) , \quad \xi = \pm 1 \quad [3(22)]$$

Il fattore $2v\psi(\theta)$ ci è noto dal § 1): è il flusso del « rettilineo » mentre, come sopra, il fattore $\Phi(\mu/2\sqrt{\theta})$ rappresenta un fattore che « diminuisce » la quantità d'acqua estratta, diminuzione che, s'è detto, sarà sensibile solo nelle vicinanze di $\mu = 0$. Per distanze superiori, esso si farà sentire solo per tempi dove già il fattore $\psi(\theta)$ è molto piccolo, cioè quando il flusso del caso « lineare-rettilineo » è molto basso. Per $\theta = 0$ si ha il già menzionato andamento proporzionale a $1/\sqrt{\theta}$.

Non deve d'altronde sorprendere la diminuzione rispetto al caso « rettilineo » nonostante l'aumento della velocità d'essiccamento. Infatti l'acqua rimanente viene estratta dalla coppia $\mu = 0$: che dà un contributo più che compensatore della diminuzione accennata, esso è dato da:

$$q = \frac{v}{\sqrt{\pi\theta}} \varphi(\xi, \theta) , \quad \mu = 0 , \quad [3(23)]$$

per cui q , come funzione di ξ , ha l'andamento di $\varphi(\xi, \theta)$, nulla agli estremi, massimo al centro, (massimo che decresce col tempo, all'inizio proporzionale a $1/\sqrt{t}$), poi esponenzialmente.

La « quantità d'acqua totale emessa dall'unità di superficie catodica » sarà data da:

$$Q = \int_0^{\infty} q \, dt = \tau \int_0^{\infty} q \, d\theta$$

Per valutare questi integrali con le [3(22)], [3(23)] dobbiamo servirci delle prime serie delle [3(16)], [3(19)], siccome solo allora l'integrazione termine a termine sono permesse. Ciò richiede il calcolo d'integrali tipo: A , A' :

$$\int_0^{\infty} \Phi(a/\sqrt{\theta}) e^{-b^2 \theta} d\theta \quad ; \quad \int_0^{\infty} e^{-b^2 \theta} \frac{d\theta}{\sqrt{\pi \theta}} \quad . \quad \text{Integrando per parti } A :$$

$$A = \frac{1}{b} \left[1 - \frac{ab}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\infty} e^{-ab(z+1/z)} \cdot z^{-3/2} dz \right] \quad .$$

L'ultimo integrale si può anche scrivere nella forma:

$$\int_0^{\infty} e^{-ab(z+1/z)} \frac{dz}{z} \quad , \quad \text{se si pone } \frac{1}{z} \quad \text{al posto di } z \quad .$$

Si può quindi sostituirvi la semisomma delle 2 espressioni:

$$A = \frac{1}{b^2} \left[1 - \frac{ab}{2\sqrt{\pi}} \int_0^{\infty} \left(\frac{1}{\sqrt{z}} + \frac{1}{z^{3/2}} \right) e^{-ab(z+\frac{1}{z})} dz \right] \quad .$$

Postovi $\frac{1}{\sqrt{z}} - \sqrt{z} = t$, si ha:

$$A = \frac{1}{b^2} (1 - e^{-2ab}) \quad .$$

L'altro integrale A' si calcola immediatamente:

$$A' = \int_0^{\infty} \frac{1}{\sqrt{\pi \theta}} e^{-b^2 \theta} d\theta = 1/b \quad .$$

Integrando termine a termine le [3(22)] con la 1^a espressione della [3(21)] per la $\psi(\theta)$, si perviene alla:

$$Q = \nu \tau \frac{2}{\pi^2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1 - e^{-(n+\frac{1}{2})\pi \eta}}{\left(n + \frac{1}{2}\right)^2} \quad , \quad \xi = \pm 1 \quad , \quad [3(24)]$$

o, sostituendovi la nota formula: $\frac{2}{\pi^2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(n+\frac{1}{2})^2} = 1$, si ha :

$$Q = \nu \tau \left[1 - \frac{2}{\pi^2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{e^{-(n+\frac{1}{2})\pi \eta}}{\left(n + \frac{1}{2}\right)^2} \right] \quad , \quad \xi = \pm 1 \quad . \quad [3(24)']$$

Il 1° termine della [3(24')] rappresenta la quantità d'acqua corrispondente al « rettilineo ». Come si vede per $\eta = 0$ si ha $Q = 0$. Col crescere di η , Q tende esponenzialmente al limite $\nu\tau$: il contributo più basso alla quantità di acqua estraibile è dato dalla zona più vicina all'altro elettrodo.

Consideriamo ora l'elettrodo $\eta = 0$: integrando termine a termine la [3(23)], ponendovi la 1ª delle [3(16)] per la φ , si perviene a:

$$Q = \nu\tau \frac{2}{\pi^2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\left(n + \frac{1}{2}\right)^2} \cos\left(n + \frac{1}{2}\right) x \xi, \quad \eta = 0 \quad [3(25)]$$

Anche questa funzione si annulla per $\xi = l$ e raggiunge un massimo per $\xi = 0$ nel punto centrale.

Da quanto precede risulta che per il prosciugamento la parte angolare del bifilare ad U dà un contributo piuttosto basso. Se si tiene presente che gran parte della corrente passa proprio in questa zona, (è noto che nei punti angolari corrispondono le zone di massima intensità di corrente), si deduce che questa è contemporaneamente la zona delle massime perdite d'energia. Sarà quindi conveniente tagliare le parti degli spigoli (Fig. 4₃).

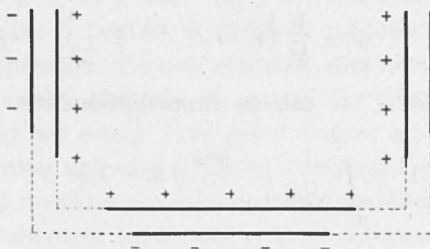


Fig. 4₃

Queste considerazioni non sono state svolte in precedenza, pur facendo uso del bifilare ad U (3).

Si consiglia pertanto modificare il dispositivo elettrodico ad U nel seguente modo:

Deriveremo ancora le formule del flusso idrico per unità di profondità, e unità di tempo, per il sistema totale composto dalla coppia $\eta = 0$ e da 2 coppie laterali di lunghezza (a).

(3) Г. М. Ломизе и А. Нетужил, *Электроосмотическое Водопошение Госэнергоиздат*, 1958, Москва.

In pratica si hanno sempre elettrodi di lunghezza finita: perchè la teoria sia applicabile, sia (a) che la profondità debbono essere almeno dell'ordine di grandezza di l . Indicando con q_a questa grandezza, si ha dalla sua definizione:

$$q_a = \int_0^a q_{x=-l} dy + \int_{-b/2}^{b/2} q_{y=0} dx + \int_0^a q_{x=l} dy \quad ,$$

o, per ragioni di simmetria:

$$q_a = 2 \left(\int_0^{b/2} q_{y=0} dx + \int_0^a q_{x=l} dy \right) = l \left(\int_0^1 q_{\eta=0} d\xi + \int_0^a q_{\xi=1} d\eta \right) \quad [3(26)]$$

con $a = 2 a/l$.

Sostituendovi le espressioni [3(22)], [3(23)], la [3(26)] diventa:

$$q_a = \nu l \left(\frac{1}{\sqrt{\pi\theta}} \int_0^1 \varphi(\xi, \theta) d\xi + \psi(\theta) \int_0^a \Phi\left(\frac{\eta}{2\sqrt{\theta}}\right) d\eta \right) \quad [3(27)]$$

Il calcolo degli integrali richiede l'introduzione delle funzioni $\psi_1(x)$, $\Phi_1(x)$ di cui la prima è già stata definita nel § 1):

$$\left. \begin{aligned} \psi_1(x) &= \frac{2}{\sqrt{\pi}} \left[e^{-x^2} - 2x \int_0^x e^{-u^2} du \right] \\ \Phi_1(x) &= \frac{2}{\sqrt{\pi}} \left[e^{-x^2} + 2x \int_0^x e^{-u^2} du \right] - \frac{2}{\sqrt{\pi}} = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \left\{ \psi(x) - 1 + x \right\} \end{aligned} \right\} \quad [3(28)]$$

Per calcolare gli integrali che compaiono nella [3(27)] ci bastano i seguenti:

$$\begin{aligned} \int_0^1 \psi\left(\frac{2n+1-\xi}{2\sqrt{\theta}}\right) d\xi + \int_0^1 \psi\left(\frac{2n+1+\xi}{2\sqrt{\theta}}\right) d\xi &= \int_{-1}^{+1} \psi\left(\frac{2n+1-\xi}{2\sqrt{\theta}}\right) d\xi = \\ &= 2\sqrt{\theta} \int_{n/\sqrt{\theta}}^{(n+1)/\sqrt{\theta}} \psi(u) du \\ \int_0^a \Phi\left(\frac{\eta}{2\sqrt{\theta}}\right) d\eta &= 2\sqrt{\theta} \int_0^{a/2\sqrt{\theta}} \Phi(u) du \quad . \end{aligned}$$

Osservando che si ha:

$$\psi_1^1(x) = -2\psi(x) \quad , \quad \Phi_1^1(x) = 2\Phi(x) \quad , \quad \text{s'ottiene:} \quad [3(29)]$$

$$2 \int_{n/\sqrt{\theta}}^{(n+1)/\sqrt{\theta}} \psi(u) du = \psi_1(n/\sqrt{\theta}) - \psi_1\left(\frac{n+1}{\sqrt{\theta}}\right)$$

$$2 \int_0^{a/2\sqrt{\theta}} \Phi(u) du = \Phi_1(a/2\sqrt{\theta}) \quad .$$

Posto:

$$\psi_1(\theta) = \int_0^1 \varphi(\xi, \theta) d\xi \quad ,$$

si perviene dalle [3(16)], mediante le formole ora derivate, alle:

$$\psi_1(\theta) = \frac{2}{\pi^2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{\left(n + \frac{1}{2}\right)^2} e^{-(n + \frac{1}{2})^2 \pi^2 \theta}$$

$$\psi_1(\theta) = 1 - \frac{2}{\sqrt{\pi}} \sqrt{\theta} + 2\sqrt{\theta} \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \psi_1(n/\sqrt{\theta}) \quad . \quad [3(30)]$$

Per la quantità d'acqua estratta nell'unità di tempo e unità di profondità si ha quindi:

$$q_a = v l \left[\frac{1}{\sqrt{\pi\theta}} \psi_1(\theta) + \sqrt{\theta} \psi(\theta) \Phi_1\left(\frac{a}{2\sqrt{\theta}}\right) \right] \quad [3(31)]$$

Occorre quindi la tabulazione di 3 funzioni universali ψ , ψ_1 , Φ_1 . Si noti inoltre che la dimensione dei catodi laterali a entra solo nell'espressione di Φ_1 .

Rimane da ricavare la quantità totale d'acqua estraibile (per unità di profondità) Q_a deducendola da Q . In maniera analoga come la [3(26)] si deriva la:

$$Q_a = l \left(\int_0^1 Q_{\eta=a} d\xi + \int_0^a Q_{\xi=1} d\eta \right) \quad [3(32)]$$

Sostituendovi [3(29)], [3(25)], si perviene alla:

$$Q_a = v \tau l \left[\eta + \frac{2}{\pi^2} \sum_{n=1}^{\infty} \left(n + \frac{1}{2}\right)^{-3} e^{-(n + \frac{1}{2})^2 \pi a} \right] \quad [3(33)]$$

Il 1° termine rappresenta l'acqua estratta nel caso lineare « rettilineo » ($2 v\tau a$), il 2° quel di più che viene estratto grazie alla presenza di un ulteriore elettrodo.

Questi risultati relativi al sistema polare ad U , di particolare importanza per quanto concerne le applicazioni, sono riassumibili nella [3(5)], per quel che concerne la pressione $H(\xi, \mu, \theta)$, in cui ricordiamo:

- H_0 idropressione iniziale del terreno umido,
- H_k idropressione costante di prelievo catodico,
- k_e coefficiente elettrogeosmotico, k coefficiente di Darcy,
- V tensione elettrica continua costante,
- $\xi = 2x/l$ ascissa adimensionale, $\eta = 2y/l$ ordinata adimensionale,
- $\tau = cl^2/4$ tempo elettrodico, $\theta = t/\tau$ tempo numerico con:

$$F(\xi, \eta, \theta) = \varphi(\xi, \theta) f(\eta, \theta) ;$$

in cui

$$\varphi(\xi, \theta) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2}{\pi^2} (-1)^n \cos\left(n + \frac{1}{2}\right) \xi \pi \exp\left[-\left(n + \frac{1}{2}\right)^2 \pi^2 \theta\right] / (n + 1/2) \left. \vphantom{\sum} \right\}$$

$$f(\eta, \theta) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\eta/2\sqrt{\theta}} e^{-u^2} du \left. \vphantom{\int} \right\}$$

L'esame della funzione $F(\xi, \eta, \theta)$ ha permesso di mettere in evidenza che nel sistema polare ad U , le zone adiacenti agli angoli hanno la minima efficacia nei riguardi dell'elettroprocesso: in esse infatti la depressione prodotta è minore che nelle altre zone di terreno trattate (v. Fig. 5₃), per tempi non molto grandi, addirittura irrilevante. Allo scopo di mettere in evidenza tali fatti sono state attuate calcolazioni numeriche della funzione: $1 - F(\xi, \eta, \theta)$, cui è proporzionale la depressione prodotta.

Si è assunto $\theta = \frac{1}{32}$, $t = \tau/32$, che per $l = 50$ m, $c = 100$, comporta un tempo di circa 226 giorni (s'è assunto un τ piuttosto grande ai fini dimostrativi dei nostri risultati).

Come può notarsi dalla Fig. 5₃, la depressione è sensibile soltanto per circa la metà dei lati del rettangolo elettrodico adiacenti al centro dei lati stessi, le altre metà (adiacenti agli angoli) hanno efficacia trascurabile.

Associando questo fatto all'altro che nei punti angolari la corrente è massima, si vede subito che, in pratica, è conveniente costruire il bifilare come indicato in Fig. 4₃, abolendo completamente le zone angolari, senza che si perda la efficacia dell'elettroprocesso.

RIASSUNTO

L'A. continua l'esame del dispositivo bifilare elettrodico nel suolo a morfologie diverse, (oltre la cilindrica studiata in precedenza).

Mostra anzitutto l'identità sostanziale dei risultati nei diversi casi. Illustra la differenziazione tra bifilare e monofilare, accennando all'utile impiego di un monobifilare.

Il bifilare ad U infine si potrà applicare vantaggiosamente purchè tagliato agli angoli, altrimenti si avrà perdita d'energia senza riuscire all'idroemungimento angolare.

ABSTRACT

This paper investigates again the electrodic double-row device applied to soils with different morphologies (besides the cylindric one exposed in a preceeding paper).

First of all the substantial identity of results in different cases is shown. Furthermore the differences between double- and single-row devices are exposed, poiting out the useful application of a single-double-row.

The U double-row device may be advantageously applied if only cut in the corners, otherwise energy will be lost without angular water-drainage.