

Una stima del punto di fusione nel mantello della Terra

P. E. VALLE

INTRODUZIONE.

L'andamento della temperatura di fusione nel mantello della Terra è di notevole interesse, specialmente perchè rappresenta un limite superiore della distribuzione attuale della temperatura nel mantello stesso. Uno studio di tale questione, condotto sulla base della teoria della fusione formulata da Lindmann ⁽¹⁾, è stato eseguito da R. J. Uffen ⁽²⁾ nel 1952.

Peraltro i valori forniti da R. J. Uffen devono essere sottoposti a revisione almeno per due ragioni. In primo luogo egli assume che la temperatura di fusione alla profondità di 100 km nell'interno della Terra sia pari a 1800°K. Questa ipotesi, tratta dal cap. VII del trattato « Internal Constitution of the Earth », edito da B. Gutenberg ⁽³⁾, non ha però alcuna base sicura. In secondo luogo egli calcola il rapporto T_s/T_{os} , tra le temperature di fusione a due profondità diverse, eseguendo la media dei valori ottenuti dalle equazioni [7] e [8] del suo lavoro. Ora la relazione [7] è dedotta in base ad ipotesi troppo grossolane per essere corretta.

Ricerche sulla teoria dei solidi e sulla teoria della fusione di Lindmann sono state eseguite abbastanza recentemente dall'autore ⁽⁴⁾ ⁽⁵⁾ ⁽⁶⁾. Da queste ricerche può essere facilmente dedotto un metodo per calcolare il punto di fusione nel mantello della Terra. Il metodo non richiede la conoscenza della densità locale di massa.

Con l'ipotesi, piuttosto verosimile, che la temperatura di fusione alla profondità di 33 km corrisponda al valore medio della temperatura massima delle lave eruttate dai vulcani, il nuovo calcolo, che utilizza gli stessi valori della velocità delle onde sismiche usati da R. J. Uffen, conduce ad un valore del punto di fusione alla profondità di 2898 km, cioè alla base del mantello, pari a 4083°K, in luogo dei 5256°K ottenuti da R. J. Uffen (*).

(*) R. J. Uffen arrotonda questo valore a 5300° K.

È peraltro da ritenersi, come apparirà nel seguito, che i nuovi valori siano ancora troppo elevati di qualche unità percentuale.

LA TEMPERATURA DI FUSIONE NEL MANTELLO DELLA TERRA.

È noto che, se è applicabile la meccanica classica, la teoria della fusione di F. A. Lindmann ⁽⁵⁾ ⁽⁶⁾ conduce alla relazione

$$T_s = C A V_s^{\frac{2}{3}} v^2, \quad [1]$$

nella quale T_s è la temperatura di fusione, A il peso atomico o molecolare della sostanza, V_s il volume atomico o molecolare della fase solida al punto di fusione, v la frequenza massima delle oscillazioni termiche trasversali della fase solida al punto di fusione e C è una grandezza che viene ritenuta costante, ma che probabilmente diminuisce con la pressione.

Tenuto conto che la frequenza massima delle oscillazioni trasversali di agitazione termica è data da

$$v_t = v_l \left(\frac{3 N}{4 \pi V_s} \right)^{\frac{1}{3}}, \quad [2]$$

dove v_t è la velocità delle onde elastiche trasversali ed N il numero d'Avogadro, si ottiene subito

$$T_s = C A \left(\frac{3 N}{4 \pi} \right)^{\frac{2}{3}} v_t^2. \quad [3]$$

Ora, se si ritiene che il prodotto CA rimanga costante nell'intero mantello, indicando con T_{os} la temperatura di fusione alla profondità di 33 km, si ha

$$\frac{T_s}{T_{os}} = \frac{v_s^2}{v_{ot}^2}. \quad [4]$$

I valori delle velocità delle onde trasversali, che compaiono nella precedente relazione, dovrebbero essere valutati al punto di fusione. In questa nota invece vengono utilizzate le velocità locali delle onde sismiche trasversali senza alcuna correzione (*). Da ciò consegue che i valori del rapporto T_s/T_{os} , così calcolati mediante la [4], risultano superiori di qualche unità percentuale, come può essere facilmente verificato.

(*) R. J. Uffen non effettua correzioni.

Allo scopo di assumere per T_{os} un valore plausibile, sono state prese in considerazione le temperature massime delle lave eruttate dai vulcani e riportate nel cap. VI del trattato « Internal Constitution of the Earth » edito da B. Gutenberg (?). Il valore medio di queste temperature, che sono state elencate nella tabella I, è pari a 1450°K. Quindi è stato posto $T_{os} = 1450^\circ\text{K}$.

Tabella I. — TEMPERATURA MASSIMA DELLE LAVE.

Vulcano	Data	Temperatura °K	Osservatore
Kilauea	—	1458	Day e Shepherd
Kilauea	—	1473	Jaggar
Vesuvio	1904	1373	Brun
Vesuvio	1913	1473	Perret
Stromboli	1901	1423	Brun
Etna	1892	1333	Bartoli
Etna	1892	1573	Philipp
Sakura-jima	1914	1321	Kotô
Oshima	—	1473-1573	Tsuboi
Paricutin	—	1473	Zies

Si è già osservato che la relazione [4] è valida in quanto applicabile la meccanica classica. Ciò avviene quando la temperatura di fusione risulta maggiore della temperatura caratteristica relativa alle oscillazioni trasversali o, anche, della temperatura Θ_D di Debye, che, generalmente, è un poco superiore alla precedente.

Per verificare se la suddetta condizione è soddisfatta, nella tabella II sono riportati, in funzione della profondità, i valori della temperatura di Debye calcolati da R. J. Uffen ⁽²⁾ e da F. Birch ⁽⁸⁾.

Il notevole divario tra le due serie di valori deriva probabilmente dal fatto che mentre R. J. Uffen ha eseguito il calcolo con l'ipotesi che il mantello della Terra sia costituito da una sostanza di peso molecolare pari a 140 e ha riferito la temperatura di Debye all'oscillazione dell'intera molecola, F. Birch ha eseguito il calcolo supponendo che il mantello sia costituito da un materiale di peso atomico medio pari a 20 ed

Tabella II. — TEMPERATURA DI DEBYE NEL MANTELLO DELLA TERRA.

Profondità km	Θ_D (Uffen) °K	Θ_D (Birch) °K
100	360	670
600	458	900
1000	537	1060
2600	645	1280

ha riferito la temperatura di Debye alle oscillazioni di un tale atomo. Comunque, le cifre fornite da F. Birch costituiscono, quasi certamente, un limite superiore dell'andamento della temperatura di Debye nel mantello della Terra.

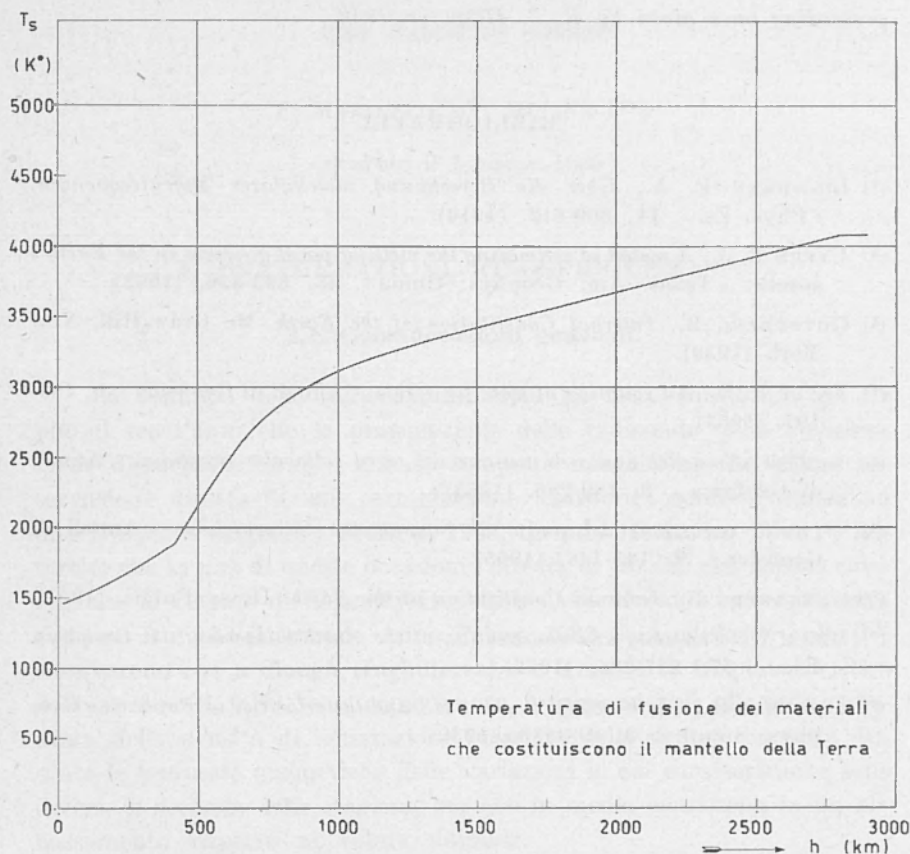
Tabella III. — TEMPERATURA DI FUSIONE NEL MANTELLO DELLA TERRA.

h km	v_t km sec ⁻¹	T_s (equazio- ne [4]) °K	T_s (Uffen) °K	h km	v_t km sec ⁻¹	T_s (equazio- ne [4]) °K	T_s (Uffen) °K
33	4,35	1450	—	1000	6,36	3100	3726
100	4,45	1517	1800	1400	6,62	3358	4104
200	4,60	1621	1944	1800	6,83	3575	4464
300	4,76	1736	2088	2200	7,02	3776	4824
413	4,96	1885	2286	2600	7,21	3983	5148
500	5,28	2136	2646	2800	7,30	4083	5256
600	5,66	2455	2988	2898	7,30	4083	5256
800	6,13	2879	3456	—	—	—	—

La tabella III contiene, in funzione della profondità, le velocità delle onde sismiche trasversali fornite da H. Jeffreys (°) e le temperature di fusione calcolate mediante la relazione [4]. Nella quarta colonna della stessa tabella sono riportate, a titolo di confronto, le temperature di fusione tratte dal lavoro di R. J. Uffen (-).

Il divario tra le due serie di valori è sensibile ed aumenta con la profondità, fino a raggiungere quasi il 30% alla base del mantello.

La figura mostra l'andamento della temperatura di fusione, quale risulta dal nuovo calcolo.



RIASSUNTO

Mediante i valori della velocità delle onde sismiche trasversali, viene effettuata una nuova stima della temperatura di fusione nel mantello della Terra.

I nuovi valori del punto di fusione risultano sensibilmente inferiori ai valori precedentemente forniti da R. J. Uffen nel 1952.

ABSTRACT

A new estimate of the fusion temperature in the Earth mantle is made by means of the speed values of the transversal seismic waves.

The new values of the fusion point are remarkably lower than the preceeding ones given by R. J. Uffen in 1952.

BIBLIOGRAFIA

- (¹) LINDMANN F. A., *Über die Berechnung molekularer Eigenfrequenzen.* « Phys. Zs. », **11**, 609-612. (1910).
 - (²) UFFEN R. J., *A method of estimating the melting-point gradient in the Earth's mantle.* « Trans. Am. Geophys. Union », **33**, 893-896, (1952).
 - (³) GUTENBERG B., *Internal Constitution of the Earth.* Mc Graw-Hill, New York (1939).
 - (⁴) VALLE P. E., *An equation of state for solids.* « Annali di Geofisica », **6**, 183-197, (1953).
 - (⁵) — *Una stima del punto di fusione del ferro sotto alte pressioni.* « Annali di Geofisica », **8**, 189-200, (1955).
 - (⁶) — *Sulla variazione del punto di fusione con la pressione.* « Annali di Geofisica », **9**, 145-148, (1955).
 - (⁷) GUTENBERG B., *Internal Constitution of the Earth.* Dover Public. (1951).
 - (⁸) BIRCH F., *Elasticity and constitution of the Earth's interior.* « J. Geophys. Res. », **57**, 227-286, (1952).
 - (⁹) JEFFREYS H., *The time of PS and SKS and the velocities of P and S.* « Geophys. Suppl. », **4**, 498-533, (1939).
-