

Monocataforesi prosciugate « EGO d'urto »

A. BELLUIGI

Ricevuto il 15-VI-1960

I.

§ 1. - PRELIMINARI.

Ci proponiamo anzitutto l'esame di « dispositivi limiti monogeopolari » a c.c. (corrente continua), (atti ad impieghi in situazioni varie di elettrodeidratazione od altro), con polarità negative al finito, positive all'infinito, modalità operative ad amperaggio o a tensione costanti. Si addivene così all'instaurazione di processi « EGO trans », realizzabili in pratica con estese ampiezze geobipolari, erogazioni di correnti stazionarie o d'urto.

Si è ricordato in (1) come la distribuzione geopotenziale bipolare, funzione delle coordinate, abbia massimi passanti per gli assi di rivoluzione dei poli e suggerisca l'opportunità d'avvalersi, (almeno in molte situazioni), di monopoli (o bipoli ampi), come in altre invece di bipoli stretti (2).

Assumendo due elettrodi lineari (r_0), paralleli indefiniti, distanza reciproca (d), il potenziale $V(P)$, in un punto generico, se x , ($d - x$), sono le rispettive distanze di P da essi, è dato notoriamente da:

$$V = i \ln (d - x)/x \quad (\text{v. Fig. 0})$$
$$V(r_0) = i \ln \left(\frac{d - r_0}{r_0} \right) \quad , \quad V(d - r_0) = i \ln \left(\frac{r_0}{d - r_0} \right) \quad ,$$
$$\varphi_0 = V(r_0) - V(d - r_0) = 2 i \ln \left(\frac{d - r_0}{r_0} \right) \quad ,$$

(1) BELLUIGI A., *Applicazioni Elettrogeocinetiche*, Pubbl. n. 108 dell'Osservatorio Geofisico Sperimentale, Trieste, 1959.

(2) BELLUIGI, A., *Bifilarità elettrodiche aperte e chiuse nei processi EGO*. *Annali di Geofisica*, vol. XIII, Roma, 1960.

da cui:

$$i = \frac{\varphi_0}{2 \ln \left(\frac{d - r_0}{r_0} \right)}, \quad V = \frac{\varphi_0}{2 \ln \left(\frac{d - r_0}{r_0} \right)} \ln \left(\frac{d - x}{x} \right),$$

$$(x_0 < x \leq d - r_0).$$

Ne discende:

$$-\frac{dV}{dx} = E_x = \varphi_0 \frac{d}{x(d-x)} \cdot 2 \ln [(d - r_0)/r_0]$$

Considerando un'ascissa:

$$r_0 \leq x \leq x_c (< d/2), \quad E_x(x_c) = \bar{E}_c,$$

si deriva:

$$E_c = a/x_c (d - x_c), \quad a = \varphi_0 d/2 \ln [(d - r_0)/r_0],$$

da cui:

$$E_c x_c^2 - d E_c x_c + a = 0, \quad x_c = \frac{I}{2 E_c} [E_c \cdot d \pm \sqrt{d^2 \cdot E_c^2 - 4 a E_c}].$$

Ponendo:

$$\varphi_0 = 150, \quad \bar{a} = 200, \quad r_0 = a, \quad a = 3854, \quad E_c(r_0) = 6,5 \text{ V/cm.},$$

e così si ricostruisce per punti, la Fig. 0, che rispecchia una distribuzione di campo pur di minima disuniformità, a causa degli elettrodi cilindrici, o a dimensioni unidimensionali prevalenti.

Valgano i seguenti simboli:

- \bar{j} = vettore densità di corrente continua (c.c.) nel suolo omogeneo umido;
- I = intensità totale di c.c. immessa galvanicamente (tramite elettrodi) nel terreno, (usata talvolta anche per \bar{j});
- \bar{q} = vettore densità di flusso liquido, (o flusso per unità di sezione);
- q = portata catodica o flusso per unità di tempo e di sezione d'elettrodo;
- K = quantità generica di liquido estraibile al tempo t ;
- Q = « portata » per unità di volume del suolo;
- W = quantità estraibile nell'unità di volume al tempo t ;
- H = pressione geoidrostatica generica interstiziale;

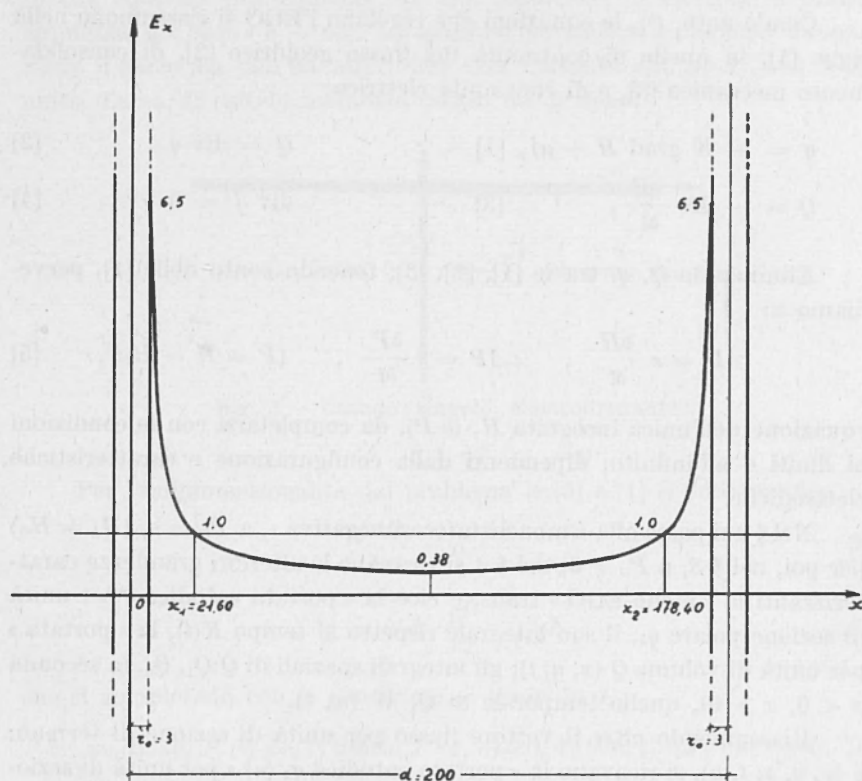


Fig. 0 - Campo geoelettrico con geometria bipolare cilindrica.

- H_0 = pressione geoidrostatica iniziale ($t = 0$);
 H_k = pressione geoidrostatica al catodo,
 $P = H - H_0$ pressione differenziale: per $t = 0$, $H = H_0$ ($P = 0$);
 $P_0 = H_e - H_0$ pressione differenziale al catodo;
 k = coefficiente di permeabilità idraulica;
 k_e = coefficiente di permeabilità elettrosmotica;
 a = distanza tra due elettrodi eteronomi, (o base);
 ρ = resistività elettrica del suolo,
 $\mu = K_e \rho$ coefficiente elettrofisico mediamente invariante;
 $C = \gamma_v m_{vc} K^{-1}$ coefficiente di consolidamento [sec. cm.^{-2}];
 γ_a = peso specifico dell'acqua tallurica interstiziale;
 m_{cv} = coefficiente di compressibilità specifica.

Com'è noto, ⁽³⁾, le equazioni che regolano l'EGO si riassumono nella legge [1], in quelle di continuità del flusso geoidrico [2], di consolidamento meccanico [3], e di continuità elettrica:

$$q = -K \operatorname{grad} H + \mu j, \quad [1] \qquad Q = \operatorname{div} q, \quad [2]$$

$$Q = -Kc \frac{\partial H}{\partial t}, \quad [3] \qquad \operatorname{div} j = 0. \quad [4]$$

Eliminando Q , q , tra le [1], [2], [3], tenendo conto delle [4], perveniamo a:

$$\Delta H = c \frac{\partial H}{\partial t}, \quad \Delta P = c \frac{\partial P}{\partial t}, \quad (P = H - H_0), \quad [5]$$

equazione nell'unica incognita H , ($o P$), da completarsi con le condizioni ai limiti e all'infinito, dipendenti dalla configurazione e caratteristiche elettrodoiche.

Nel § 2 si passa alla « monocataforesi-negativa », a $P_0 = 0$, ($H_k = H_0$) per poi, nel § 3, a $P_0 \geq 0$; nel § 4 si ricavano le ulteriori grandezze caratterizzanti la « mono-EGO » trans, e cioè la « portata catodica » per unità di sezione polare q_k , il suo integrale rispetto al tempo $K(t)$, la « portata » per unità di volume $Q(x, a, t)$; gli integrali spaziali di $Q: Q_1, Q_2$, (a seconda $x < 0, x > 0$), quello temporale di $Q, W(w, t)$.

Riassumendo oltre il vettore flusso per unità di sezione di terreno: $q(x, y, z; t, a)$, si ricavano la « portata catodica $q_k(a)$ » « per unità di sezione polare, la quantità di liquido estraibile nel tempo t : $k = \int q_k dt$, nonché la « portata per unità di volume e di terreno $Q(x, y, z, a)$, e il corrispondente integrale nel tempo $W = \int Q dt$, quantità di liquido estraibile nel tempo t .

§ 2. - GEOCATAFORESI, UNIDIMENSIONALE MONOPOLARE A PRESSIONE DIFFERENZIALE CATODICA NULLA.

Si abbia una « configurazione monogeopolare », (v. fig. 1), a catodo piano verticale indefinito, anodo similare parallelo all'infinito: (normali al piano della figura);

⁽³⁾ BELLUIGI A., *La non stazionarietà dei fenomeni EGO*. Geofisica Pura e Applicata, vol. 40 (1958/II), pp. 97-110, Milano.

⁽³⁾ BELLUIGI A., *Aspetti diversi applicativi dell'EGO trans*. Annali di Geofisica, vol. XI, n. 3-4, 1958.

⁽³⁾ BELLUIGI A., *Pressioni EGO in situazioni diverse d'idroprelievo catodico*. Boll. Geofisica Teorica e Applicata, n. 2, 1959, Trieste.

(il che equivale praticamente ad una postazione di elettrodi a grande ampiezza, a « base » $a \rightarrow \infty$). La tensione elettrica al generatore energizzante il suolo sia tale da imprimere una corrente continua (c.c.) I per unità d'area di catodo metallico infisso nel terreno.

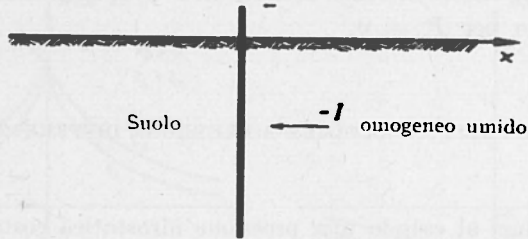


Fig. 1 - Catodo singolo elettrodrenante.

Per l'unidimensionalità del problema le [5] e [1] si scriveranno:

$$\frac{\partial^2 P}{\partial x^2} = c \frac{\partial P}{\partial t}, \quad [6]$$

$$q = -k \frac{\partial P}{\partial x} + \mu I, \quad [7]$$

che si completano con le condizioni ai limiti in P :

$$P(-\infty, t) = 0, P(+\infty, t) \text{ finita}, P(x, 0) = 0, P(-0, t) = P(+0, t) = 0, \quad [8]$$

una pressione differenziale continua, con valore nullo sul catodo (v. App. 1).

Per ogni punto x , e ogni tempo t , la presente mono-EGO negativa comporta $P = 0$, ossia la pressione differenziale ovunque permane nulla: V. [9] App. 1.

Se $H_k = H_0$, pur pronunciandosi nel tempo l'EGO, il fenomeno non ha alcun effetto sulla pressione geoidrointerstiziale che resta quella che era all'inizio.

Poichè il flusso catodico si ricava dalla:

$$q_k = q_{-0} - q_{+0} = \mu I - k \left[\left(\frac{\partial P}{\partial x} \right)_{-0} - \left(\frac{\partial P}{\partial x} \right)_{+0} \right],$$

(che dà il salto di q al catodo), tenendo presente che per $x < 0$ la corrente è nulla, e per $x > 0$ essa vale $(-I)$ si trova per la « portata » catodica q_k :

$$q_k = \mu I, \quad [10]$$

ulteriore grandezza pure indipendente dal tempo.

La mono-EGO ($P = 0$) si svolge dunque nella stazionarietà [10], con transfert costante di fluido dal mezzo idratato verso il pozzo catodico, (implicando questa monocataforesi una polarità eteronoma all'infinito, condizionante tali proprietà).

Si tratta di vedere ora cosa accade con $P \geq 0$, ricavando le relative q_k come già fatto per $P = 0$.

§ 3 - GEOCATAFORESI MONOPOLARE A PRESSIONE DIFFERENZIALE DIVERSA DA ZERO.

Si mantenga al catodo una pressione idrostatica costante $P_0 \neq 0$, diversa da quella propria H_0 del terreno. L'EGO rimane governata dalla [6], e le condizioni [8] si traducono (v. App. 2), in:

$$\begin{aligned} P(t, -\infty) = 0, \quad P(t, +\infty) \text{ finita}, \\ (P - 0, t) = P(+0, t) = P_0, \quad (P(x, 0) = 0, \end{aligned} \quad [11]$$

con le soluzioni:

$$\begin{aligned} P(x, t) = P_0 \operatorname{erf} c \left(\frac{|x|}{2} \sqrt{\frac{c}{t}} \right), \quad (-\infty < x < 0); \\ P(x, t) = P_0 \operatorname{erf} c \left(\frac{x}{2} \sqrt{\frac{c}{t}} \right), \quad (0 \leq x < +\infty) \end{aligned} \quad [13]$$

$P(x, t) = -P(-x, t)$, simmetria rispetto all'asse P : (v. Fig. 2):

$$\frac{\partial P}{\partial x} = \mp P_0 \sqrt{\frac{c}{\pi t}} e^{-cx^2/4t}, \quad (x \geq 0), \quad \text{ossia:}$$

Con $P_0 > 0$, $P(x, t)$ decresce se x va da $(0$ a $+\infty)$, aumenta se x va da $(-\infty$ a $0)$. Con $P_0 < 0$, $P(x, t)$ si comporta in modo simmetrico (v. Fig. 2).

Poichè:

$$\frac{\partial P}{\partial t} = \frac{|x|}{2} P_0 \sqrt{c/\pi t^3} \cdot \exp(-cx^2/4t),$$

se $P_0 > 0$, $\frac{\partial P}{\partial t} > 0$, per ogni x, t , $P(x, t)$ cresce col tempo;

se $P_0 < 0$, $\frac{\partial P}{\partial t} < 0$, $P(x, t)$ decresce col tempo per $x \neq 0$. Per $x = 0$

invece $P(x, t)$ è costante ed uguale a P_0 .

Potrebbe interessare conoscere entro quale escursione pericatodica si conserva $P(x, t)$ sensibile, con effettiva variazione della pressione da H_0 . Se i nostri piezometri non sono in grado di mettere in evidenza variazioni

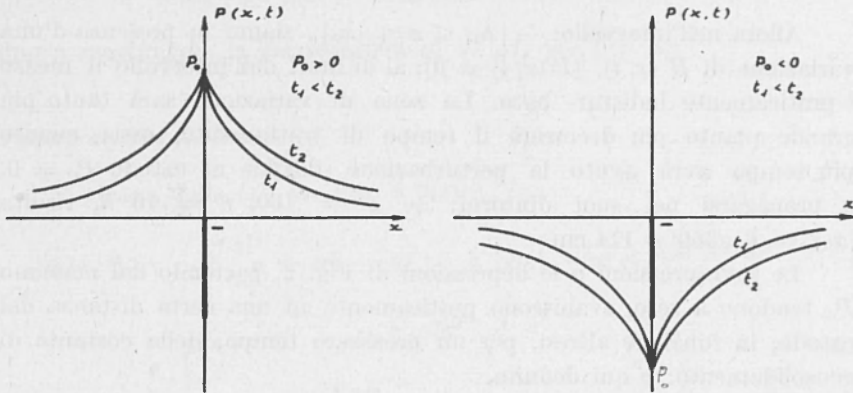


Fig. 2 - Comportamento spazio-temporale della pressione differenziale geoidrologica monocataforetica.

idropieziche minori di un prefissato valore α , potremo considerare nulla la pressione differenziale $P(x, t)$ quando si abbia:

$$P(x, t) = P_0 \operatorname{erf} c \left(\frac{|x|}{2} \sqrt{\frac{c}{t}} \right) < \alpha.$$

Si deve ricavare, fissato un dato tempo per quali x vale la precedente disequazione. La funzione ($\operatorname{erf} c \xi$) è decrescente da 1 a 0, al variare di ξ tra (0 e ∞), pertanto se ($\alpha \geq P_0$), la ($\operatorname{erfc} < \alpha/P_0$) è sempre soddisfatta; se $\alpha < P_0$ esiste uno ed un solo valore di $\xi = \xi_0$, (dipendente da α e P_0), al di là del quale la disequazione conserva la sua validità.

Conosciuto: $\xi_0 = |x_0| \sqrt{c/4t}$, la x_0 rappresenta la semiampiezza della zona in cui un'effettiva variazione di $H(x, t)$ è rilevabile; al di fuori di questa il terreno può considerarsi idrologicamente indisturbato.

Con $\alpha = 10^{-2}$, $P_0 = 500$, dovremo allora trovare i valori di $\xi = \frac{|x|}{2} \sqrt{c/t}$, per cui si abbia:

$$\operatorname{erf} c \left(\frac{|x|}{2} \sqrt{\frac{c}{t}} \right) < 0,2 \cdot 10^{-4}, \text{ ovvero, poichè } (\operatorname{erf} c \xi = 1 - \operatorname{erf} \xi),$$

$$\operatorname{erf} \left(\frac{|x|}{2} \sqrt{\frac{c}{t}} \right) > 0,99998.$$

Ciò avviene (v. tabelle « erf ») quando sia $\xi \geq 3$, nel nostro caso quando sia:

$$\frac{|x|}{2} \sqrt{c/t} \geq 3, \text{ per cui } |x_0| = 6 \sqrt{t/c}.$$

Allora nell'intervallo: $-|x_0| \leq x \leq |x_0|$, siamo in presenza d'una variazione di $H(x, t)$, ($P(x, t) \neq 0$); al di fuori dell'intervallo il mezzo è praticamente indisturbato. La zona di variazione sarà tanto più grande quanto più decorrerà il tempo di trattamento, ossia quanto più tempo avrà avuto la perturbazione iniziale al catodo $P_0 \neq 0$, a propagarsi nei suoi dintorni: se $c = 100$, $r = 10$ h, risulta $|x_0| = 6 \sqrt{360} = 114$ cm.

Le sovrappressioni o le depressioni di Fig. 2, partendo dal massimo P_0 tendono a zero, svaniscono praticamente ad una certa distanza dal catodo, in funzione altresì, per un prefissato tempo, della costante di consolidamento: c qui definita.

Portata catodica monopolare.

Analogamente a quanto fatto per la [10], può dedursi q_k dal salto di q al catodo, o, più semplicemente, applicando la trasformata L al salto

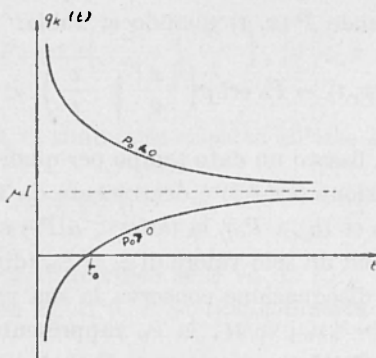


Fig. 3 - Portata catodica monopolare $P_0 \geq 0$.

catodico, che per la [13] diviene:

$$\bar{q}_k = \frac{\mu I}{s} - k \left[\left(\frac{\partial P}{\partial x} \right)_{-0} - \left(\frac{\partial P}{\partial x} \right)_{+0} \right] = \frac{\mu I}{s} - 2 k P_0 \sqrt{c/s},$$

da cui, con L^{-1} , si perviene in (Fig. 3) a:

$$q_k(t) = \mu I - 2 k P_0 \sqrt{c/\pi t} \rightarrow \mu I, (t = \infty). \quad [14]$$

Partendo da $(-\infty)$, a seconda ($P_0 \geq 0$), $q_k(t) \rightarrow \mu I$.

Con $H_k < H_0$ si pronuncia un certo « tempo critico » t_0 : o tempo d'innescò:

$$t_0 = 16 c K^2 (H_k - H_0)^2 / \pi \mu I^2, \text{ affinché } q_k(t) > 0,$$

fino a raggiungere la stazionarietà $q_k = \mu I$, per $t \rightarrow \infty$.

Vettore densità di flusso.

Si ricava dalla [1], (v. Fig. 3 bis):

$$q(x, t) = -k \frac{\partial P}{\partial x} + \mu I = \mu I + K |P_0| \sqrt{c/\pi t} e^{-c/4t (x-a)^2}, \quad [14']$$

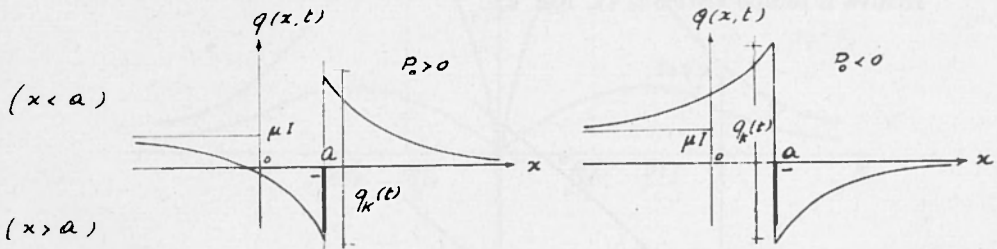
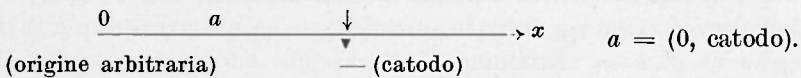


Fig. 3 bis - Flusso geoidrico pericatódico con $P_0 \geq 0$.

con riferimento ad origine arbitraria in 0:



La densità di flusso generica $q(x, t)$ si riduce al solo addendo stazionario per a sufficientemente piccolo:

$$\exp. [-c (x - a)^2 / 4 t] < \frac{a}{k |P_0|} \sqrt{\pi t / c},$$

da cui:

$$x - a < 2 \sqrt{t/c} \sqrt{\ln \left(\frac{k |P_0|}{a} \sqrt{c/\pi t} \right)}.$$

Esemplificando: $K = 10^{-6}$, $|P_0| = 500$, $c = 100$, $t = 100$ h, $a = 10^{-6}$, si ricava: $x - a = 150$ cm.

§ 4. - GRANDEZZE IDRICHE INTEGRALI.

Mediante le relazioni stabilite nei §§ 2 e 3, e le equazioni fondamentali del processo, è immediato dedurre le espressioni per tutte le grandezze idriche interessanti il mono-EGO trans.

In primo luogo la quantità d'acqua catodica estratta dopo un determinato tempo t è data da:

$$K(t) = \int_0^t q_k(t) d\tau,$$

$$K(t) = \mu It, \text{ se } P_0 = 0, \quad k(t) = \mu It - 4kP_0 \sqrt{ct/\pi}, \text{ se } P_0 \neq 0. \quad [15]$$

Le $K(t)$ differiscono tra di loro per il termine $(-4kP_0 \sqrt{ct/\pi})$, e si ritrova il tempo critico t_0 (v. Fig. 4).

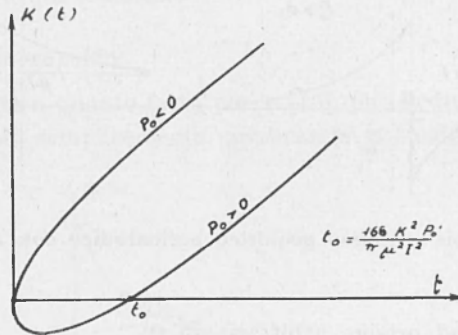


Fig. 4 - Acqua tellurica estratta al catodo con $P_0 \geq 0$.

Dalla (3) si può dedurre altresì la «portata unitaria», per unità di volume di terreno. Infatti applicando ad essa la « L », si ha:

$$\bar{Q}(x, s) = -kcs \bar{P}(x, s). \text{ Per } P_0 = 0, \bar{Q}(x, s) = 0, \text{ quindi: } [16]$$

$$Q(x, t) \equiv 0, \quad (-\infty < x < +\infty, t > 0), \text{ ossia:}$$

L'idrodistribuzione nel suolo con $P_0 = 0$ non viene alterata dall'EGO limite monopolare, in accordo con il fatto che il processo si svolge in regime di stazionarietà.

Per $P_0 \neq 0$, avvalendosi delle [12] le [16], applicando l'operatore L , diventano:

$$\bar{Q}(x, s) = -kcs P_0 e^{x\sqrt{cs}}, \quad (-\infty < x < 0), \quad (0 < x < +\infty),$$

da cui con L^{-1} si ha per $Q(x)$, distribuzione spaziale della portata unitaria volumetrica, nei diversi tempi d'elettrotrattamento:

$$Q(x, t) = - \frac{k}{2\sqrt{\pi}} \cdot \begin{cases} P_0 |x| \\ P_0(x) \end{cases} \cdot c/t \sqrt{c/t} \cdot e^{-cx^2/4t} \quad [17]$$

Le portate unitarie volumetriche di terreno $Q(x, t)$ accusano andamenti spazio-temporali tipo Fig 5 con massimi $Q(t)$ decrescenti al crescere di t , e massimi ridotti $Q(x)$ sempre più distanziabili dal catodo.

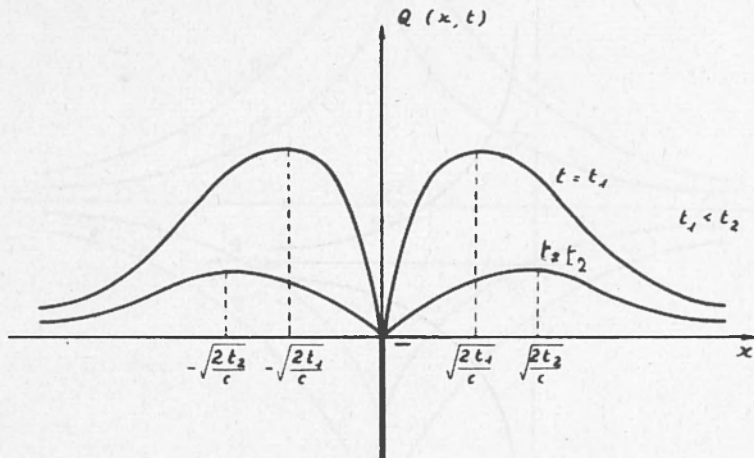


Fig. 5 - Portate spazio-temporali volumetriche.

I massimi di $Q(x, t)$ cadono in corrispondenza dei punti $\pm \sqrt{2t/c}$: con il decorrere del tempo, tendono a spostarsi verso valori sempre più grandi di x , mentre rimangono assai prossimi al catodo per tempi piccolissimi

Il valore comune dei due massimi simmetrici: $- kP_0 c/t \sqrt{2\pi e}$ tende a zero al crescere di t . Analogo andamento presenta ogni altro valore della funzione, anche considerando $P_0 < 0$, e quindi le curve $Q(x, t)$ sono simmetriche rispetto all'asse x .

Fluido estraibile dalle regioni delimitate dal catodo singolo.

Per $P_0 = 0$ è ovunque nullo; per $P_0 \neq 0$, dette \bar{Q}_1, \bar{Q}_2 le « L » delle disidratazioni volumetriche, si avrà:

$$\bar{Q}_1 = \int_{-\infty}^0 \bar{Q}(x, s) dx = - kcP_0 \int_{-\infty}^0 e^{x\sqrt{cs}} dx = - kP_0 \sqrt{c/s}, \quad (x < 0)$$

$$\bar{Q}_2 = \int_0^{\infty} \bar{Q}(x, s) dx = - kcP_0 \int_0^{\infty} e^{-x\sqrt{cs}} dx = - kP_0 \sqrt{c/s}, \quad (x > 0)$$

da cui, con L^{-1} , s'ottiene:

$$Q_1(t) = Q_2(t) = -kP_0 \sqrt{c/\pi t}, \quad x \leq 0. \quad [18]$$

Le portate totali di liquido estraibile, (con $P_0 > 0$), dalle due regioni: ($x < 0$), ($x > 0$) sono identiche $Q_1 = Q_2$, al crescere di t esse decrescono fino ad annullarsi: Fig. 6.

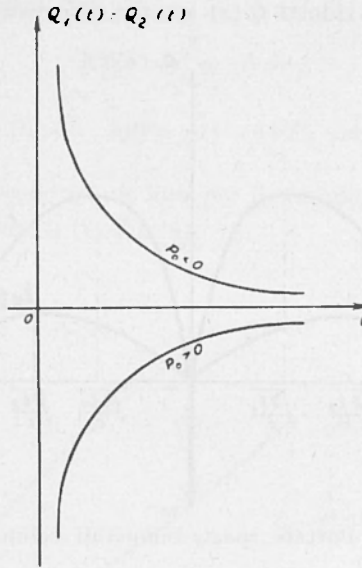


Fig. 6 - Portate temporali monocatodiche.

Il liquido emungibile invece nel tempo t per unità di volume di terreno, si deduce integrando membro a membro la [3] rispetto al tempo:

$$W(x, t) = \int_0^t Q(x, \tau) d\tau = -kcP(x, t),$$

da cui per la [13]:

$$\left. \begin{aligned} W(x, t) &= -kcP_0 \int_{\frac{|x|/2\sqrt{c/t}}{\infty}}^{\infty} e^{-u^2} du, \quad (-\infty < x \leq 0) \\ W(x, t) &= -kcP_0 \int_{\frac{x/2\sqrt{c/t}}{\infty}}^{\infty} e^{-u^2} du, \quad (0 \leq x < +\infty) \end{aligned} \right\} [19]$$

Aumentando la durata i suscritti integrali crescono, tendendo a: $\sqrt{\pi}/2$, nei limiti integrali $(0, \infty)$.

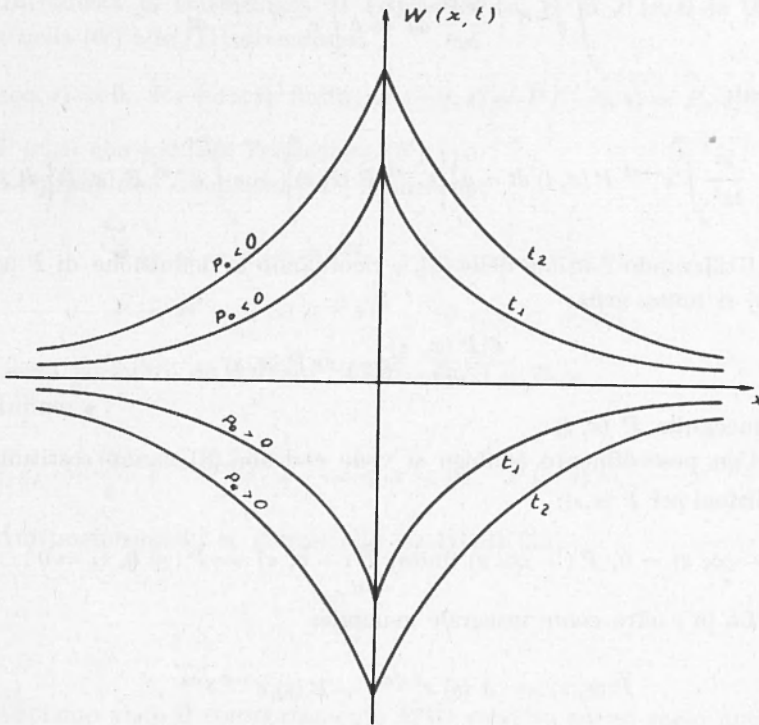


Fig. 7 - Liquido estraibile nell'unità di volume spaziale, a seconda le durate.

Pertanto la quantità di liquido recuperabile per unità di volume, al tempo t , non può superare il limite:

$$W(x, \infty) = -kcP_0 \frac{\sqrt{\pi}}{2}. \quad [20]$$

APPENDICE I.

Introdotta la trasformata di Laplace « L » della funzione P :

$$\bar{P}(x, s) = \int_0^{\infty} e^{-st} P(x, t) dt,$$

e integrando rispetto a t i membri della [6], moltiplicati per e^{-st} , otteniamo:

$$\int_0^{\infty} e^{-st} \cdot \frac{\partial^2 P}{\partial x^2} dx = c \int_0^{\infty} e^{-st} \frac{\partial P}{\partial t} dt,$$

da cui:

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} \int_0^s e^{-st} P(x, t) dt = c \left\{ \left[e^{-st} P(x, t) \right]_0^s + s \int_0^s e^{-st} P(x, t) dt \right\}.$$

Utilizzando l'ultima delle [8], e ricordando la definizione di $P(x, s)$, la [6] si muta nella:

$$\frac{d^2 P(x, s)}{dx^2} = cs \bar{P}(x, s), \quad [6']$$

nell'incognita $\bar{P}(x, s)$.

Con procedimento analogo si vede che alle [8] vanno sostituite le condizioni per $\bar{P}(x, s)$:

$$\bar{P}(-\infty, s) = 0, \bar{P}(+\infty, s) \text{ finita}, \bar{P}(-0, s) = \bar{P}(+0, s) = 0. \quad [8']$$

La [6'] offre come integrale generale:

$$\bar{P}(x, s) = A(s) e^{x\sqrt{cs}} + B(s) e^{-x\sqrt{cs}},$$

con $A(s)$, $B(s)$, funzioni della variabile s , da determinarsi utilizzando le [8'].

In base alla I^a delle [8] e alla condizione che $\bar{P}(x, s)$ è nulla sul catodo ($x = 0$), si ha che nell'intervallo:

$$-\infty < x \leq 0, \quad \bar{P}(x, s) \equiv 0.$$

La condizione che $\bar{P}(x, s)$ sia finita per $x = +\infty$ comporta $A(s) = 0$ infine l'annullarsi di $\bar{P}(x, s)$ al catodo comporta ancora $B(s) = 0$.

Concludendo il nostro problema ammette soltanto la soluzione identicamente nulla:

$$\bar{P}(x, s) \equiv 0, \quad (-\infty < x < +\infty).$$

In corrispondenza avremo per ogni punto x ed ogni tempo t :

$$P(x, t) = 0, \quad (-\infty < x < +\infty; t > 0). \quad [9]$$

APPENDICE II.

Introdotta la trasformata di Laplace $\bar{P}(x, s)$ di $P(x, t)$ la [6] si muta nella [6'] e le [11] diventano:

$$\bar{P}(-\infty, s) = 0, \bar{P}(+\infty, s) \text{ finita}, \bar{P}(-0, s) = \bar{P}(+0, s) = P_0/s, [11']$$

con $\bar{P}(x, s)$ che soddisfa l'equazione [6'].

Le prime due condizioni [11'] forniscono:

$$\bar{P}(x, s) = A(s) e^{x\sqrt{cs}}, \quad (-\infty < x < 0);$$

$$\bar{P}(x, s) = B(s) e^{-x\sqrt{cs}}, \quad (0 < x < +\infty),$$

e la terza permette di scrivere: $A(s) = B(s) = P_0/s$.

Infine:

$$P(x, s) = \frac{P_0}{s} e^{-x\sqrt{cs}}, \quad (-\infty < x < 0), \quad P(x, s) = \frac{P_0}{s} e^{-x\sqrt{cs}}.$$

Antitrasformando si giunge alle risolventi [13].

II.

§ 5.

Abbiamo visto il comportamento EGO relativo ad un suolo umido, energizzato tramite due elettrodi eteronomi piano-paralleli, infissi verticalmente nel suolo, quando al catodo si mantiene costantemente una pressione idrostatica uguale a quella dell'acqua interstiziale del suolo[2].

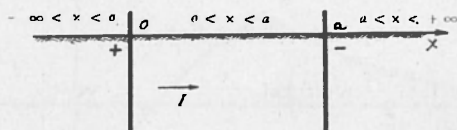


Fig. 1₂ - Geobipolo drenante al catodo.

Vediamo ora cosa accade quando al catodo si mantenga una pressione diversa da quella ambiente: una geocataforesi unidimensionale perciò bipolare a pressione differenziale catodica non nulla.

La disposizione elettrodica è schematizzata nella Fig. 1₂, 1'₂, (con I corrente per unità di sezione degli elettrodi).

L'equazione fondamentale del processo rimane la [6], completata con nuove condizioni ai limiti:

$$\left. \begin{aligned} P(\pm \infty, t) &= 0; & P(-0, t) &= P(+0, t) \\ P(a-0, t) &= P(a+0, t) &= P_0 &= H_k - H_0 \neq 0 \\ \left(\frac{\partial P}{\partial x}\right)_{-0} &- \left(\frac{\partial P}{\partial x}\right)_{+0} &= \mu I/k; & P(x, 0) &= 0 \end{aligned} \right\} [21]$$

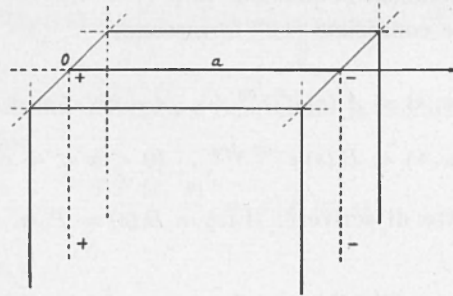


Fig. 1'₂ - Geobipolarità monodimensionale.

Si ottengono le seguenti espressioni (v. App. III) per la:

Pressione differenziale P(x, t): Fig. 1₂.

Ambito $(-\infty < x < 0)$: extranodico:

$$\begin{aligned} P(x, t) &= P_0 \operatorname{erf} c \left(-\frac{x-u}{2} \sqrt{c/t} \right) + \\ &+ \frac{\mu I}{k} \sqrt{\frac{t}{\pi c}} \left[e^{-c/4t(x-2a)^2} - e^{-c/4t x^2} \right] - \\ &- \frac{\mu I}{2k} \left[x \operatorname{erf} c \left(-\frac{x}{2} \sqrt{c/t} \right) - (x-2a) \operatorname{erf} c \left(-\frac{x-2a}{2} \sqrt{c/t} \right) \right]. \end{aligned}$$

Ambito $(0 < x < a)$: interelettrodico:

$$\begin{aligned} P(x, t) &= P_0 \operatorname{erf} c \left(\frac{a-x}{2} \sqrt{c/t} \right) + \\ &+ \frac{\mu I}{k} \sqrt{\frac{t}{\pi c}} \left[e^{-c/4t(x-2a)^2} - e^{-c/4t x^2} \right] + \\ &+ \frac{\mu I}{2k} \left[x \operatorname{erf} c \left(\frac{x}{2} \sqrt{c/t} \right) - (2a-x) \operatorname{erf} c \left(\frac{2a-x}{2} \sqrt{c/t} \right) \right]. \end{aligned} \quad \left. \vphantom{P(x, t)} \right\} [25]$$

Ambito $(a < x < +\infty)$: extracatodico:

$$P(x, t) = P_0 \operatorname{erf} c \left(\frac{x-a}{2} \sqrt{c/t} \right).$$

La casistica $P_0 \neq 0$ va da $P_0 > 0$ a $P_0 < 0$, a causa d'abbassamento di falda per l'idrospulsione catodica: v. Fig. 2₂, 3_{2a}, (3_{2t}, 4₂.

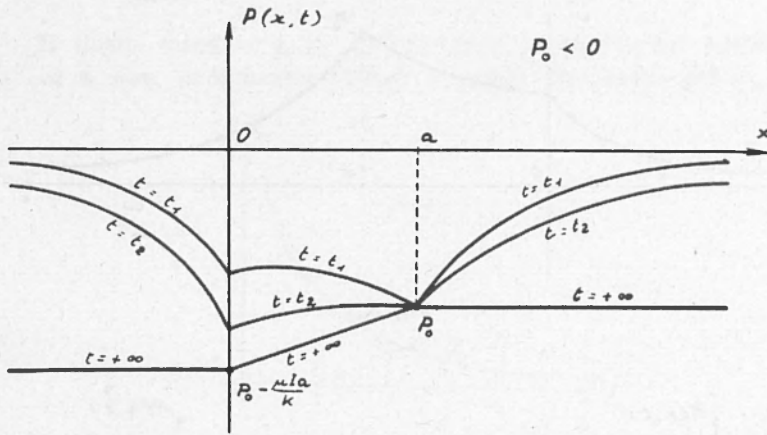


Fig. 2₁.

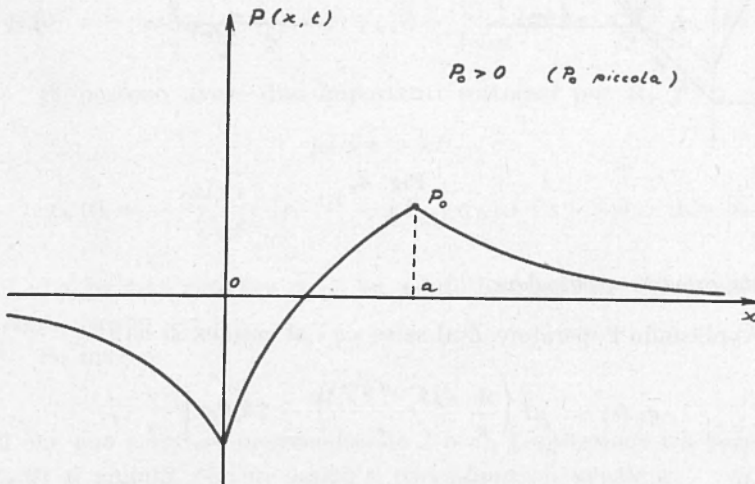
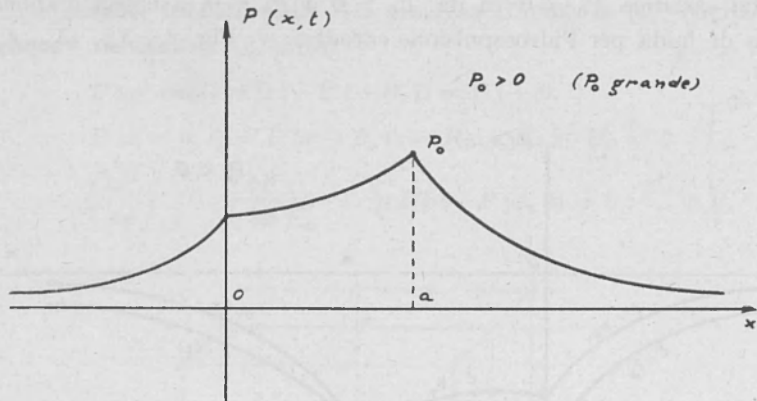
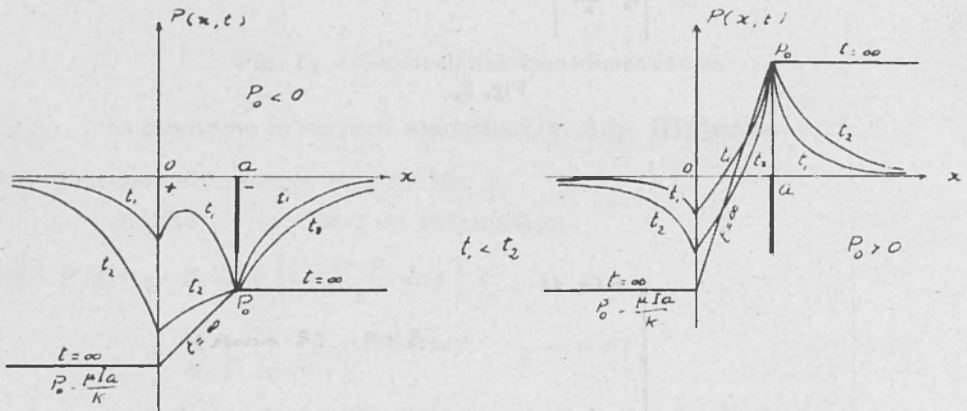


Fig. 3_{2a} - Evoluzioni spazio-temporali dell'idropressione differenziale.

Fig. 3_{2b}Fig. 4₂

Portata catodica geobipolare.

Applicando l'operatore L al salto « q » al catodo, si ha:

$$\bar{q}_k(s) = \mu I \left(\frac{1}{s} - \frac{e^{-a\sqrt{cs}}}{s} \right) - 2kP_0 \sqrt{\frac{c}{s}},$$

da cui:

$$q_k(t) = 2 \frac{\mu I}{\sqrt{\pi}} \operatorname{erf} \left(\frac{a}{2} \sqrt{\frac{c}{t}} \right) - 2kP_0 \cdot \sqrt{\frac{c}{\pi t}}. \quad [26]$$

Nello studio della funzione [26], distinguiamo due casi:

a) $P_0 < 0$: (v. Fig. 5₂):

$$q_k(0) = +\infty, \quad q_k(+\infty) = 0, \quad q'_k(t) < 0.$$

Il flusso catodico $q_k(t)$ decrescerebbe mantenendosi positivo da $(+\infty)$ a zero, andamento analogo a quello riscontrato per $P_0 = 0$,

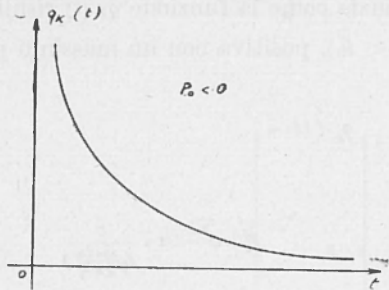


Fig. 5₂ - Portate catodiche geobipolari (tempi d'attivazione EGO).

salvo il fatto che, per $P_0 < 0$, $q_k(t)$ risulta maggiore, in quanto il 2° termine della [26] è positivo.

b) $P_0 > 0$:

$$q_k(0) = -\infty, \quad q_k(+\infty) = 0, \quad q'_k(t) = \frac{-1}{t\sqrt{\pi t}} (\mu I \sqrt{\tau} e^{-\tau/t} - kP_0 \sqrt{c}).$$

Si possono avere due importanti sottocasi per $P_0 > 0$:

$$\mu I \sqrt{\tau} > kP_0 \sqrt{c}:$$

$$q'_k(t) = -\frac{\mu I \sqrt{\tau}}{\sqrt{\pi t^3}} [e^{-\tau/t} - kP_0 \sqrt{c} / \mu I \sqrt{\tau}] > 0, \quad (t > 0).$$

La portata catodica $q_k(t)$ va asintoticamente da un valore $(-\infty)$, a zero, (segno -).

Se invece:

$$\mu I \sqrt{\tau} > kP_0 \sqrt{c},$$

(il che può accadere incrementando I o a), l'espressione tra parentesi in $q'_k(t)$ si annulla per un tempo t , (sovrallineato), uguale a:

$$\bar{t} = \tau / \ln \left(\sqrt{\frac{\tau}{c} \frac{\mu I}{kP_0}} \right) > 0,$$

importando cioè:

$$q'_k(t) > 0, \quad 0 < t < \bar{t}; \quad q'_k(t) < 0, \quad \bar{t} < t < +\infty.$$

In corrispondenza $q_k(t)$ cresce con t , da $(-\infty)$ a $q_k(\bar{t})$, per $(0 < t < \bar{t})$, decresce da $q_k(t)$ a zero per $(\bar{t} < t < +\infty)$; quindi in \bar{t} la portata assume il suo massimo, necessariamente positivo, con grafico del tipo di Fig. 6₂.

La Fig. 6₂ evidenzia come la funzione $q_k(t)$ risulti negativa, (o parzialmente tale per $\bar{t} < t_0$), positiva con un massimo per $\bar{t} > t_0$, tendente poi a zero.

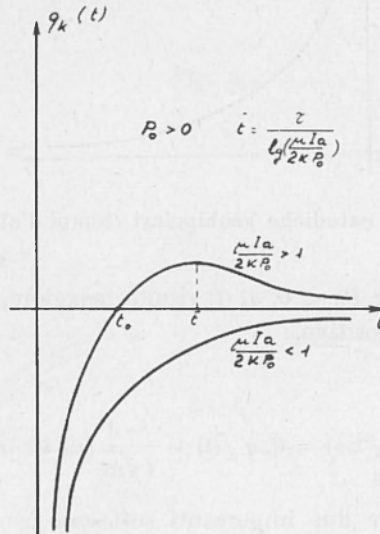


Fig. 6₂

È ovvio poi che il tempo critico t_0 è la soluzione (unica) dell'equazione:

$$\frac{\mu I}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\sqrt{\pi/t_0}} e^{-u^2} du - k P_0 \sqrt{c/\pi t_0} = 0. \quad [27]$$

§ 6. - QUANTITÀ TOTALE D'ACQUA CATORICA: $K(t)$.

Le seguenti grandezze idriche nelle situazioni geobipolari si deducono con procedimenti analoghi a quelli usati nel § 3.

Per la « quantità totale » d'acqua $K(t)$ estraibile al catodo nel tempo t abbiamo:

$$K(t) = \mu I \int_0^t [1 - \operatorname{erf} c \sqrt{\tau/\xi}] d\xi, \quad (P_0 = 0)$$

$$K(t) = \mu I \int_0^t [1 - \operatorname{erf} c \sqrt{\tau/\xi}] d\xi - 2kP_0 \sqrt{\frac{c}{\pi}} \int_0^t \frac{d\xi}{\sqrt{\xi}}, \quad (P_0 \neq 0)$$

v. Figg. 7₂, 8₂.

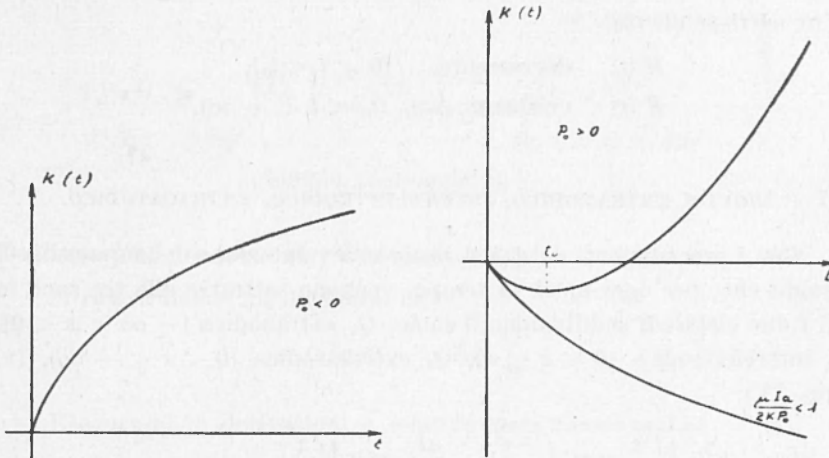


Fig. 7₂ e 8₂ - Quantità totale d'acqua catodica geobipolare.

Per $P_0 = 0$ si ha:

$$K(t) = \mu I [\operatorname{erf} \sqrt{\tau/t} \cdot (t + 2\tau) + \sqrt{\tau t} e^{-\tau/t} - \tau \sqrt{\pi}] \quad [28]$$

mentre per $P \geq 0$:

$$K(t) = \mu I [(t + 2\tau) \operatorname{erf} \sqrt{\tau/t} + \sqrt{\tau t} e^{-\tau/t} - \tau \sqrt{\pi}] - 2kP_0 \sqrt{\frac{c}{\pi t}}. \quad [29]$$

Tenendo conto che è:

$$K'(t) = q_k(t) = I\mu \operatorname{erf} \sqrt{\tau/t} > 0, \quad (P_0 = 0)$$

$$K'(t) = q_k(t) = I\mu \operatorname{erf} \sqrt{\tau/t} - 2kP_0 \sqrt{c/\pi t}, \quad (P_0 \neq 0)$$

si vede che $K(t)$ cresce da $K(0) = 0$, a $K(\infty) = +\infty$, per $P_0 = 0$.

Se $P_0 \geq 0$, ricordando quanto ottenuto nel § precedente circa $q_k(t)$, deduciamo:

$$k'(t) < 0, k(t) \text{ crescente}, \quad (P_0 < 0, q_k(t) > 0),$$

mentre se $P_0 < 0$ si ha:

$$k'(t) < 0, k(t) \text{ decrescente}, \quad (\mu I \sqrt{\tau} < kP_0 \sqrt{c}, q_k(t) < 0)$$

e, sempre con $P_0 < 0$.

$$k'(t) < 0, \quad (0 < t < t_0, \quad \text{se } \mu I \sqrt{\tau} > kP_0 \sqrt{c}, q_k(t) < 0)$$

$$k'(t) > 0, \quad (t_0 < t < +\infty), \quad \text{se } \mu I \sqrt{\tau} > kP_0 \sqrt{c}, q_k(t) > 0$$

e, in corrispondenza:

$$K(t) \text{ decrescente}, \quad (0 < t < t_0),$$

$$K(t) \text{ crescente}, \quad (t_0 < t < +\infty).$$

§ 7 - LIQUIDI EXTRANODICO, INTERELETTRODICO, EXTRACATODICO.

Con i procedimenti del § 3 si risale alla valutazione delle quantità di liquido che, per ogni unità di tempo, vengono sottratte alle tre zone in cui i due elettrodi suddividono il suolo, Q_1 extranodica ($-\infty < x < 0$), Q_2 interelettrica ($0 < x < a$), Q_3 extracatodica ($0 < x < +\infty$), (v. App. IV):

$$\left. \begin{aligned} Q_1(t) &= -kP_0 \sqrt{\frac{c}{\pi t}} \exp\left(\frac{-\tau}{t}\right) - \frac{\mu I}{2} \operatorname{erf} 2 \sqrt{\frac{\tau}{t}} \\ Q_2(t) &= -kP_0 \sqrt{\frac{c}{\pi t}} \cdot \left(-\exp\left(\frac{-\tau}{t}\right) \right) + \frac{\mu I}{2} \left(\operatorname{erf} 2 \sqrt{\frac{\tau}{t}} - \operatorname{erf} \sqrt{\frac{\tau}{t}} \right) \\ Q_3(t) &= -kP_0 \sqrt{\frac{c}{\pi t}}, \quad (\text{addendo monopolare}). \end{aligned} \right\} [30]$$

Confrontando queste grandezze con quelle relative a $P_0 = 0$, si vede che le [30] esprimono funzioni maggiori delle analoghe con $P_0 = 0$, quando sia $P_0 < 0$; minori quando sia $P_0 > 0$, tendenti tutte a zero, con $t \rightarrow \infty$.

Flusso generico $q(x, t)$; *portata volumetrica* $Q(x, t)$; *acqua estraibile per unità di volume in ;n dato tempo* $W(x, t)$.

Ritorniamo alla q data da:

$$q = -k \frac{\partial P}{\partial x} x + \mu I.$$

Ora, tenendo conto della [25] ponendo:

$$\frac{\mu I}{2} \left[\operatorname{erf} c \left(-\frac{x}{2} \sqrt{c/t} \right) - \operatorname{erf} c \left(-\frac{x-2a}{2} \sqrt{c/t} \right) \right] = F,$$

si ha:

$$\left. \begin{aligned} q(x, t) &= -kP_0 \sqrt{\frac{c}{\pi t}} \exp \cdot \left[-\frac{c}{4t} (x-a)^2 \right] - F, & (-\infty < x < a), \\ q(x, t) &= \mu I - kP_0 \sqrt{\frac{c}{\pi t}} \exp \cdot \left[-\frac{c}{4t} (x-a)^2 \right] - F, & (0 < x < a), \\ q(x, t) &= -kP_0 \sqrt{\frac{c}{\pi t}} \exp \cdot \left[-\frac{c}{4t} (x-a)^2 \right], & (a < x < +\infty), \end{aligned} \right\} [31]$$

(addendo monopolare).

Deidratazione per unità di volume e di tempo.

Si ricava dalla [25] mediante la:

$$Q(x, t) = -kc \frac{\partial P}{\partial t}.$$

Eseguendo le derivazioni e relative sostituzioni si ha:

$$\left. \begin{aligned} Q(x, t) &= -ckP_0 \frac{x-a}{2t\sqrt{\pi t}} \cdot e^{-\left(\frac{x}{a}-1\right)^2 \frac{\tau}{t}} + \\ &+ \frac{\mu I}{a} \sqrt{\frac{\tau}{\pi t}} \cdot \left[e^{-\left(\frac{x}{a}\right)^2 \cdot \frac{\tau}{t}} - e^{-\left(\frac{x}{a}-2\right)^2 \cdot \frac{\tau}{t}} \right], & (-\infty < x < 0), \\ Q(x, t) &= -ckP_0 \frac{|x-a|}{2t\sqrt{\pi t}} \cdot e^{-\left(\frac{x}{a}-1\right)^2 \frac{\tau}{t}} + \\ &+ \frac{\mu I}{a} \sqrt{\frac{\tau}{\pi t}} \cdot \left[e^{-\left(\frac{x}{a}\right)^2 \cdot \frac{\tau}{t}} - e^{-\left(\frac{x}{a}-2\right)^2 \cdot \frac{\tau}{t}} \right], & (0 < x < a), \\ Q(x, t) &= -ckP_0 \frac{|x-a|}{2t\sqrt{\pi t}} \cdot e^{-\left(\frac{x}{a}-1\right)^2 \frac{\tau}{t}}, & (a < x < +\infty), \end{aligned} \right\} [32]$$

(addendo monopolare).

Notiamo che, essendo per: $-\infty < x < a$, $|x| < |x - 2a|$, si ha sempre:

$$\frac{\mu I}{a} \sqrt{\frac{\tau}{\pi t}} \cdot \left[e^{-\left(\frac{x}{a}\right)^2 \cdot \frac{\tau}{t}} - e^{-\left(\frac{x}{a} - 2\right)^2 \cdot \frac{\tau}{t}} \right] > 0,$$

mentre il 1° termine delle relazioni scritte per $Q(x, t)$ risulta negativo se $P_0 > 0$, positivo se $P_0 < 0$.

Pertanto se $P_0 > 0$, $Q(x, t)$ risulta minore di quella corrispondente a $P_0 = 0$, se $P_0 < 0$, $Q(x, t)$ risulta maggiore di quella per $P_0 = 0$.

Nella zona extracatodica ($a < x$) poi, la $Q(x, t)$ si riduce per $I = 0$, all'effetto puramente idraulico.

Il confronto col caso monopolare, v. [17], ($-\infty < x < +\infty$), porta a notare che la $Q(x, t)$, del dipolo differisce dalla $Q^{(m)}(x, t)$ per un termine > 0 , se $-\infty < x < a$, coincide con questa se $a < x < +\infty$, in ogni caso la $Q(x, t)$ è minore del geobipolo.

La « perdita totale di liquido per unità di volume », dopo invece un tempo t dall'inizio del trattamento elettrico, è legata a $Q(x, t)$ da:

$$W(x, t) = \int_0^t Q(x, t) dt,$$

e sarà possibile quindi dedurle integrando le [32], per cui:

$$\left. \begin{aligned} W(x, t) = & -kcP_0 \operatorname{erf} c \left(\frac{|x-a|}{2} \sqrt{\frac{c}{t}} \right) - \\ & - \mu I \sqrt{\frac{ct}{\pi}} \left[e^{-\frac{c}{4t}(x-2a)^2} - e^{-\frac{c}{4t}x^2} \right] + \\ & + \frac{\mu Ic}{2} \left[x \operatorname{erf} c \left(-\frac{x}{2} \sqrt{\frac{c}{t}} \right) + (x-2a) \operatorname{erf} c \left(-\frac{x-2a}{2} \sqrt{\frac{c}{t}} \right) \right]; \\ & \qquad \qquad \qquad (-\infty < x < 0) \\ \\ W(x, t) = & -kcP_0 \operatorname{erf} c \left(\frac{|x-a|}{2} \sqrt{\frac{c}{t}} \right) - \\ & - \mu I \sqrt{\frac{ct}{\pi}} \left[e^{-\frac{c}{4t}(2a-x)^2} - e^{-\frac{c}{4t}x^2} \right] - \\ & - \frac{\mu Ic}{2} \left[x \operatorname{erf} c \left(\frac{x}{2} \sqrt{\frac{c}{t}} \right) - (2a-x) \operatorname{erf} c \left(\frac{2a-x}{2} \sqrt{\frac{c}{t}} \right) \right]; \\ & \qquad \qquad \qquad (0 < x < a) \\ \\ W(x, t) = & -kcP_0 \operatorname{erf} c \left(\frac{|x-a|}{2} \sqrt{\frac{c}{t}} \right); \qquad (a < x < +\infty) \\ & \text{(addendo monopolare)} \end{aligned} \right\} [33]$$

dove il termine:

$$(-2kcP_0/\sqrt{\pi}) \operatorname{coerf} \left[\frac{|x-a|}{2} \sqrt{\frac{c}{t}} \right] \geq 0, \text{ a seconda } P_0 \geq 0.$$

Il 2° e 3° termine della $W(x, t)$, come integrale del 2° termine positivo di $Q(x, t)$ forniscono un valore positivo. *Con considerazioni analoghe a quelle fatte per $Q(x, t)$ si deduce che $W(x, t)$ nella geobipolarità (I cost.) è sempre minore della $W(x, t)$ della monopolarità (I cost.), da cui differisce per un termine positivo.*

APPENDICE III

Con L la [6] si muta nella [6'], e la [21] diventa:

$$\begin{aligned} \bar{P}(\pm \infty, s) &= 0, \bar{P}(+0, s) - \bar{P}(-0, s) \\ \bar{P}(a-0, s) &= \bar{P}(a+0, s) = P_0/s \\ \bar{P}'(+0, s) &= \mu I/ks + \bar{P}'(-0, s) \end{aligned} \quad \left. \vphantom{\begin{aligned} \bar{P}(\pm \infty, s) &= 0, \bar{P}(+0, s) - \bar{P}(-0, s) \\ \bar{P}(a-0, s) &= \bar{P}(a+0, s) = P_0/s \\ \bar{P}'(+0, s) &= \mu I/ks + \bar{P}'(-0, s) \end{aligned}} \right\} [21']$$

L'integrale generale della [6'] è ancora del tipo

$$\bar{P}(x, s) = A(s) e^{x\sqrt{cs}} + B(s) e^{-x\sqrt{cs}},$$

ed è subito visto che la prima della [21'] comporta:

$$\begin{aligned} \bar{P}(x, s) &= A(s) e^{x\sqrt{cs}}, \text{ se } -\infty < x < 0 \\ \bar{P}(x, s) &= B''(s) e^{x\sqrt{cs}}, \text{ se } a < x < +\infty, \end{aligned}$$

mentre è:

$$\bar{P}(x, s) = A'(s) e^{x\sqrt{cs}} + B'(s) e^{-x\sqrt{cs}}, \text{ se } 0 < x < a,$$

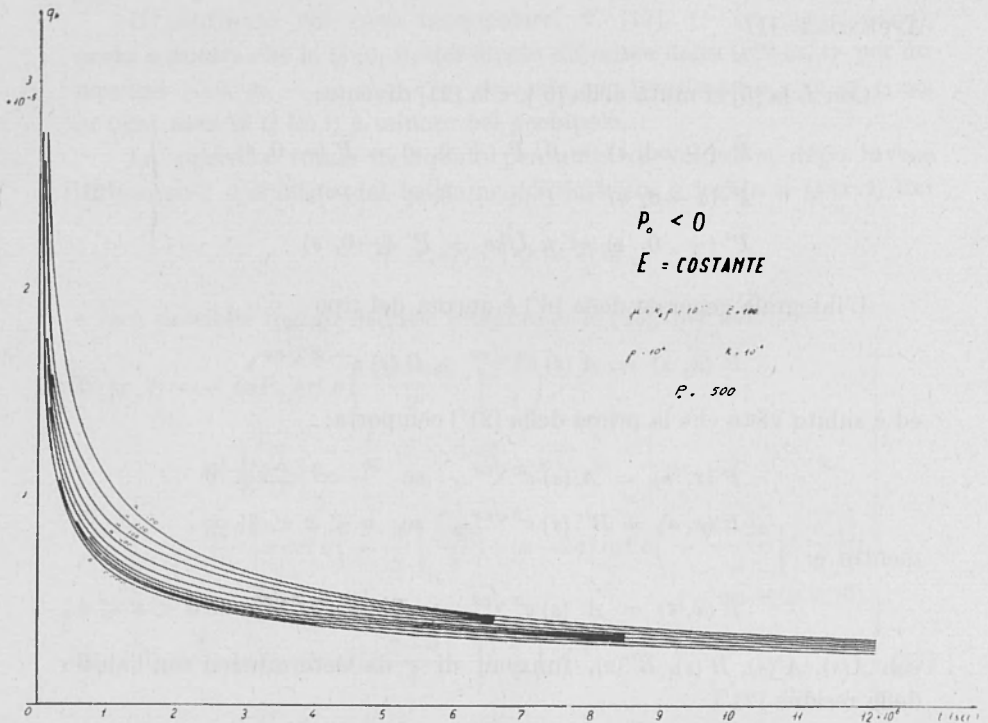
con $A(s), A'(s), B'(s), B''(s)$, funzioni di s da determinarsi con l'ausilio delle residue [21'].

Tenendo conto di esse, si giunge facilmente alle:

$$\begin{aligned} A' + B' &= A, \quad A' - B' = A + \frac{\mu I}{k} \frac{1}{s\sqrt{cs}}, \\ A' e^{a\sqrt{cs}} + B' e^{-a\sqrt{cs}} &= \frac{P_0}{s}, \\ B'' &= \frac{P_0}{s} e^{a\sqrt{cs}}, \end{aligned} \quad \left. \vphantom{\begin{aligned} A' + B' &= A, \quad A' - B' = A + \frac{\mu I}{k} \frac{1}{s\sqrt{cs}}, \\ A' e^{a\sqrt{cs}} + B' e^{-a\sqrt{cs}} &= \frac{P_0}{s}, \\ B'' &= \frac{P_0}{s} e^{a\sqrt{cs}}, \end{aligned}} \right\} [22]$$

che comportano:

$$\begin{aligned}
 A &= \frac{P_0}{s} e^{-a\sqrt{cs}} + \frac{\mu I}{2k} \cdot \frac{1}{s\sqrt{cs}} \cdot (e^{-2a\sqrt{cs}} - 1), \\
 A' &= \frac{P_0}{s} e^{-a\sqrt{cs}} + \frac{\mu I}{2k} \cdot \frac{1}{s\sqrt{cs}} \cdot e^{-2a\sqrt{cs}}, \\
 B' &= -\frac{\mu I}{2k} \cdot \frac{1}{s\sqrt{cs}}, \quad B'' = \frac{P_0}{s} e^{a\sqrt{cs}}.
 \end{aligned} \quad [23]$$



$$\begin{aligned}
 & q_k(a, t) \\
 P_0 = -500 \quad E = 100 \quad \mu = 10^{-1} \quad \rho = 10^4 \quad k = 10^{-6} \\
 a = 100, 200, 300, 400, 500, 600, 700, 800, 1.000, 10.000
 \end{aligned}$$

Fig. 9₂ - Geocataforesi a « base bipolare » variabile: $q_k(a, t)$. — (EGO a tensione costante).

Mediante le [23] è possibile allora scrivere, con facili calcoli:

$$\left. \begin{aligned} \bar{P}(x, s) &= \frac{P_0}{s} e^{-(x-a)\sqrt{cs}} - \frac{\mu I}{k} \cdot \frac{1}{s\sqrt{cs}} \cdot \text{sen } h(a\sqrt{cs}) e^{(x-a)\sqrt{cs}}, & (-\infty < x < 0), \\ \bar{P}(x, s) &= \frac{P_0}{s} e^{(x-a)\sqrt{cs}} - \frac{\mu I}{k} \cdot \frac{1}{s\sqrt{cs}} \text{sen } h[(a-x)\sqrt{cs}] e^{-a\sqrt{cs}}, & (0 < x < a), \\ \bar{P}(x, s) &= \frac{P_0}{s} e^{- (x-a)\sqrt{cs}}, & (a < x < +\infty). \end{aligned} \right\} [24]$$

Antitrasformando, si ha subito l'espressione della pressione differenziale ($P(x, t)$).

APPENDICE IV.

Si hanno per le trasformate di Laplace della Q_1, Q_2, Q_3 le relazioni:

$$\begin{aligned} \bar{Q}_1(s) &= \int_{-\infty}^0 \bar{Q}(x, s) dx = -kcs \int_{-\infty}^0 \bar{P}(x, s) dx, \\ \bar{Q}_2(s) &= \int_0^a \bar{Q}(x, s) dx = -kcs \int_0^a \bar{P}(x, s) dx, \\ \bar{Q}_3(s) &= \int_0^{+\infty} \bar{Q}(x, s) dx = -kcs \int_a^{+\infty} \bar{P}(x, s) dx, \end{aligned}$$

da cui, ricordando la [24]:

$$\begin{aligned} \bar{Q}_1(s) &= -kcs \int_{-\infty}^0 \left[\frac{P_0}{s} e^{(x-a)\sqrt{cs}} - \frac{\mu I}{k} \cdot \frac{1}{s\sqrt{cs}} \cdot \text{sen } h(a\sqrt{cs}) e^{(x-a)\sqrt{cs}} \right] dx, \\ \bar{Q}_2(s) &= -kcs \int_0^a \left[\frac{P_0}{s} e^{(x-a)\sqrt{cs}} - \frac{\mu I}{k} \cdot \frac{1}{s\sqrt{cs}} e^{-a\sqrt{cs}} \cdot \text{sen } h[(a-x)\sqrt{cs}] \right] dx, \\ \bar{Q}_3(s) &= -kcs \int_a^{+\infty} \frac{P_0}{s} e^{(x-a)\sqrt{cs}} dx. \end{aligned}$$

Effettuando le integrazioni, si giunge alle formole:

$$\bar{Q}_1(s) = -kP_0 \sqrt{\frac{c}{s}} \cdot e^{-a\sqrt{cs}} + \frac{\mu I}{s} \operatorname{sen} h(a\sqrt{cs}) e^{-a\sqrt{cs}}$$

$$\bar{Q}_2(s) = -kP_0 \sqrt{\frac{c}{s}} (1 - e^{-a\sqrt{cs}}) + \frac{\mu I}{s} e^{-a\sqrt{cs}} (1 - \cos h(a\sqrt{cs})),$$

da cui antitrasformando, e ponendo ancora $\tau = ca^2/4$, si hanno le $Q_{1,2,3}$.

§ 8.

Richiamandoci alla [26] ritenendo la « portata » catodica funzione della base « a », in condizioni di tensione costante (E cost.) si ha:

$$q_k(a) = \frac{\mu E}{\rho a} \operatorname{erf}\left(\frac{a}{2} \sqrt{\frac{c}{t}}\right) - 2kP_0 \sqrt{\frac{c}{\pi t}}, \quad (0 \leq a < +\infty)$$

$$q_k(0) = \left(\frac{\mu E}{\rho} - 2kP_0\right) \sqrt{\frac{c}{\pi t}}; \quad q_k(\infty) = -2k_0 \sqrt{\frac{c}{\pi t}},$$

$$\frac{dq_k}{da} = \frac{\mu E}{\rho a^2} \cdot \left[\frac{a}{\sqrt{\pi}} \sqrt{\frac{c}{t}} \exp\left\{-\left(\frac{a}{2} \sqrt{\frac{c}{t}}\right)^2\right\} - \operatorname{erf}\left(\frac{a}{2} \sqrt{\frac{c}{t}}\right) \right],$$

oppure con l'introduzione della ausiliaria σ :

$$\sigma = \frac{a}{2} \sqrt{\frac{c}{t}}, \quad (0 \leq \sigma < +\infty),$$

$$\frac{dq_k}{da} = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \cdot \frac{\mu E}{\rho a} \cdot f(\sigma), \quad f(\sigma) = \sigma e^{-\sigma^2} - \int_0^\sigma e^{-u^2} du,$$

$$f(0) = 0, \quad f(\infty) = -\frac{\sqrt{\pi}}{2}, \quad f'(\sigma) = -2\sigma^2 \cdot e^{-\sigma^2} < 0,$$

La $f(\sigma)$ decresce da 0 a $-\sqrt{\pi}/2$, mantenendosi costantemente negativa, (o nulla, per $\sigma = 0$), quindi: $dq_j/da < 0$, per ogni a ; $q_j(a)$ decresce con l'ingrandirsi di « a », con E costante.

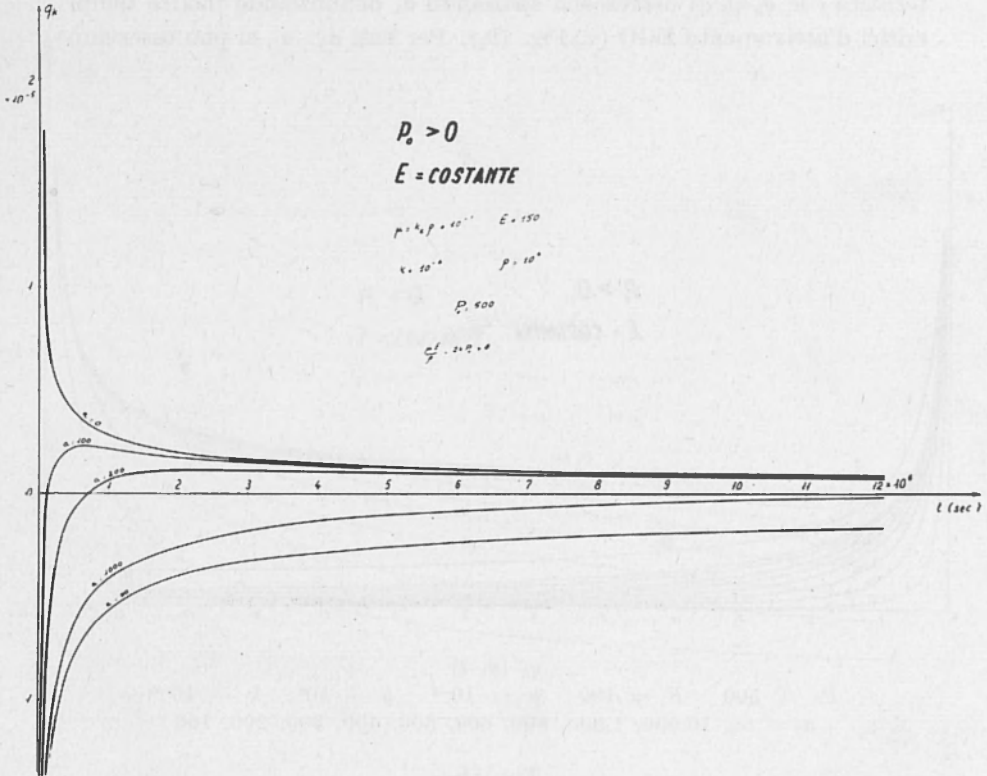
Per:

$$P_0 < 0, \quad \frac{\mu E}{\rho} - 2kP_0 > 0, \quad -2kP_0 > 0,$$

si delinea un fascio di curve $q_k(t, a)$, con la convessità rivolta verso l'origine (v. Fig. 9₂), tali che, per E costante, t costante, la portata catodica s'impiccolisce ampliando la base « a » geobipolare, fino alla base monopolare, (o infinita).

Incrementando la base geobipolare a tensione costante, $H_k < H_0$, la portata catodica $q_k(t, a)$ diminuisce (specie per piccoli t), in accordo

con le leggi classiche dell'idrodinamica. Si ottengono comunque le stesse q_k incrementando le basi « a », (entro limiti ben stabiliti della famiglia di curve $a = 0, a = \infty$), prolungando gli elettrotrattamenti nei tempi $t_n > t_{n-1} > \dots > t_3 > t_2 > t_1$ (minimo per il monopolo), per $a_n > a_{n-1} \dots > a_1$.



$$\begin{aligned}
 & q_k(a, t) \\
 P_0 = 500 \quad E = 150 \quad \mu = 10^{-1} \quad \rho = 10^4 \quad k = 10^{-6} \\
 & a = 0; 100; 200; 1000; \infty
 \end{aligned}$$

Fig. 10₂.

Le portate massime catodiche monopolari s'estinguono nel tempo più rapidamente di quelle bipolari, con smorzamento in tutti i casi polari a carattere rapido.

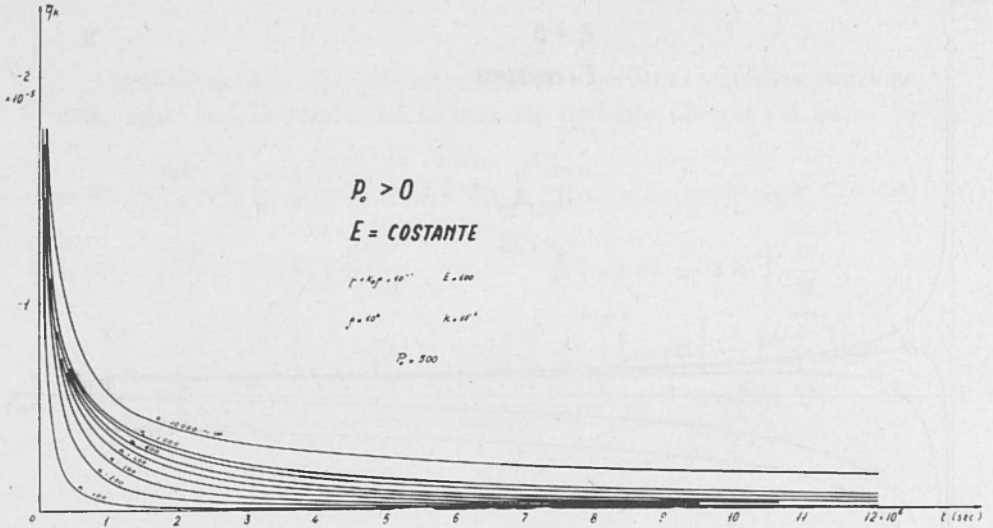
Se $P_0 > 0, E$ cost. si registreranno, per $q_k(t, a)$ tre casi distinti, a seconda che:

$$\left(\frac{\mu E}{\rho} - 2 k P_0 \leq 0 \right),$$

denuncianti famiglie di curve sempre comprese nei limiti indicati da:

$$q_k(t, 0), q_k(t, \infty).$$

Purchè $P > 0$, $E \text{ cost.} > 2 k P_0 \varrho/\mu$, fino ad una base « a_c caratteristica » le $q_k(t, a)$ decrescono spaziando a , denunciando inoltre tempi critici d'attivamento EGO (v. Fig. 10₂). Per basi $a > a_c$, si può osservare



$$q_k(a, t)$$

$$P_0 = 500 \quad E = 100 \quad \mu = 10^{-1} \quad \varrho = 10^4 \quad k = 10^{-6}$$

$$a = \infty, 10.000, 1.000, 800, 600, 500, 400, 300, 200, 100$$

Fig. 11₂

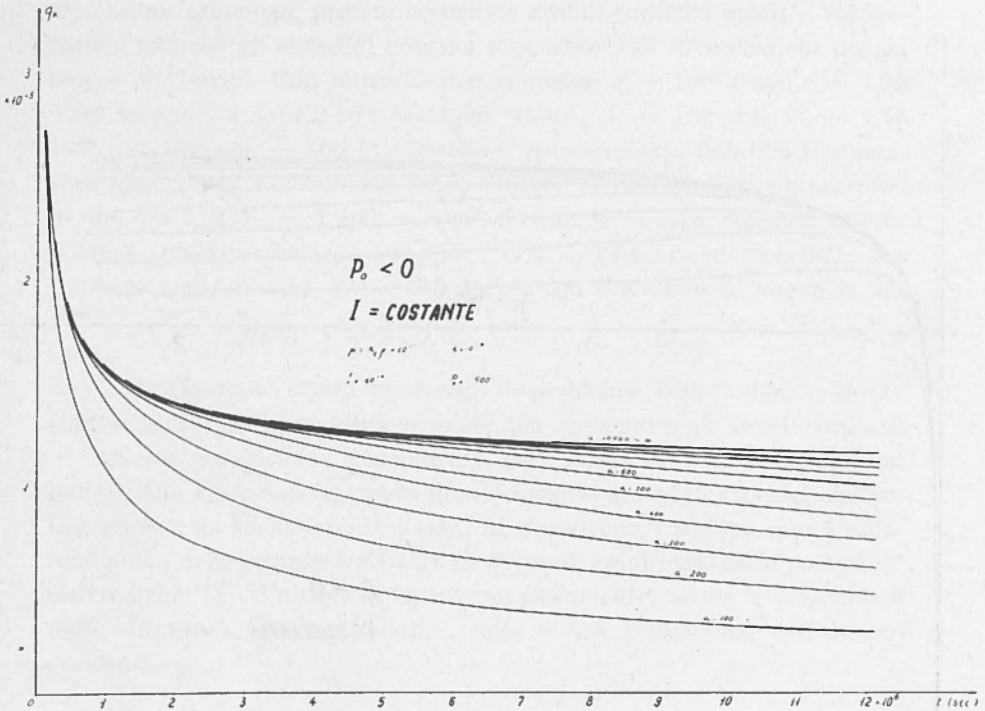
una profilazione temporale di « portata negativa » fino al limite inferiore $q_k(t, \infty)$. A cominciare perciò d'una calcolabile spaziatura polare « a_c » nelle condizioni suesposte, non si constatano più portate estrattive, ma, in ogni istante, una « portata negativa », il cui aumento in valore assoluto con la base (a), sta a denotare un ritardo di affioramento del liquido al catodo.

Alla diminuzione di q_k con l'incrementante spaziatura polare « a » ($E \text{ cost.}$), corrisponde un ritardo progressivo dei « tempi critici » d'arrivo del liquido, d'inumidimento nella regione catodica.

Questo panorama geogrodistributivo diventa permanente (v. Fig. 11₂), fermo restando $P_0 > 0$, se $E \text{ cost.} \leq 2 k P_0 \varrho/\mu$, indipendentemente dalla spziatura polare, anzi quanto maggiore è questa, tanto più pro-

cede lento l'inumidimento. Converterà in ogni caso operare se E è cost., con piccoli o nulli P_0 per non elevare troppo le tensioni alimentatrici o meglio ancora in condizioni di $P_0 < 0$.

Le stesse situazioni di ripetono, salvo invertire i rapporti di crescita



$$q_k(a, t)$$

$$P_0 = -500 \quad I = 10^{-4} \quad \mu = 10^{-1} \quad k = 10^{-6}$$

$$a = \infty, 10.000, 1.000, 900, 800, 700, 600, 500, 400, 300, 200, 100$$

Fig. 12₂ - Geocataforesi a « base bipolare » variabile: $q_k(a, t)$ (EGO ad amperaggio costante)

o decrescenza di q_k rispetto alle variazioni di « a », operando invece che con tensione E costante, con amperaggi I costante (v. Fig. 12_a).

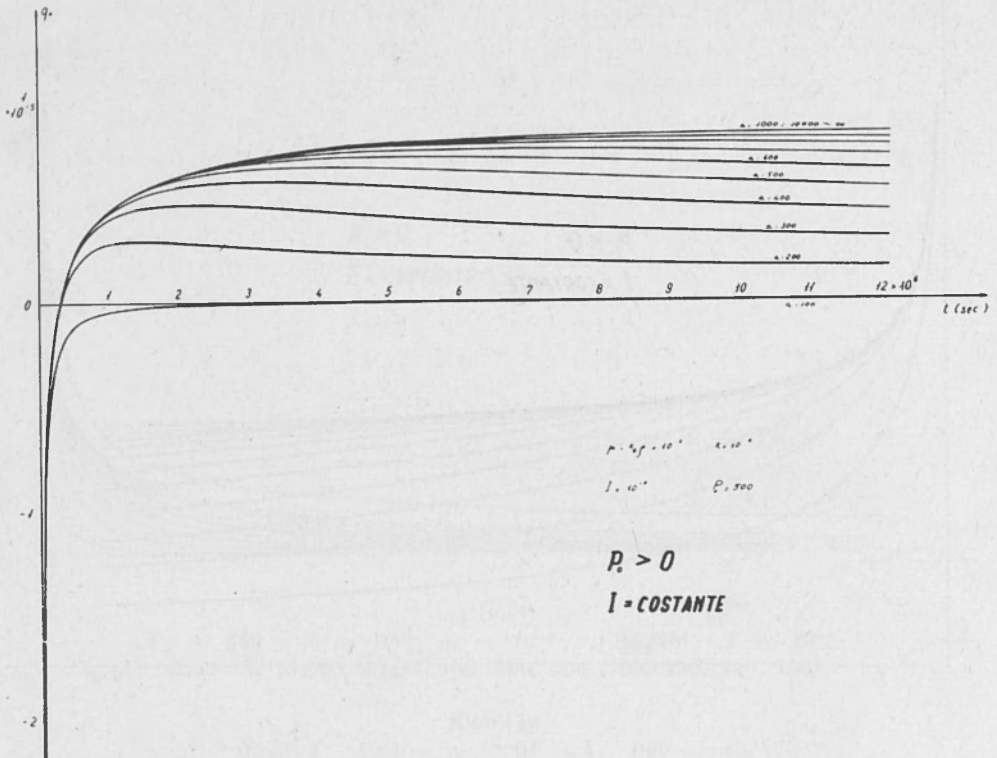
Per $k = 10^{-6}$, $\rho = 10^4$, $E = 100$, $I = 10^{-4}$, $\bar{P} \geq 0$, si ha la correlazione:

$$[q_k(t)]_{I = \text{cost.}} = 10^{-2} \cdot a \cdot [q_k(t)]_{E = \text{cost.}}, \text{ e cio\`e:}$$

$I(a)$ cost. comporta per $a \rightarrow \infty$, $E = \infty$; $E(a)$ cost. invece comporta, per $a \rightarrow \infty$, $E = 0$.

I dispositivi che s'approssimano al monopolare, (quest'ultimo incluso), si dimostrano pertanto i più redditizi dal punto di vista della « produttività q_k », con I cost., sia $P \geq 0$ (v. Fig. 13₂).

Senonchè sorge l'esigenza dei « limiti termoelettrostazionari » (4), che bisogna soddisfare per non attenuare o distruggere l'EGO.



$$q_k(a, t).$$

$$P_0 = 500 \quad E = 150 \quad \mu = 10^{-1} \quad \rho = 10^4 \quad k = 10^{-6}$$

$$a = \infty, 10.000, 1.000, 900, 800, 700, 600, 500, 400, 300, 200, 100$$

Fig. 13₂.

Ciò premesso si potrà tener conto delle prassi dei « tempi limiti dinamici », sopportabili dagli elettrodi, con apporto di corrente in eccesso per addivenire a « carichi d'urto », (o in tempi brevissimi), fermi restando

(4) BELLUIGI, A., *Campi termoelettrostazionari in suoli umidi uniformi*. Metano 1959, n. 12 Padova.

i dispositivi monopolari o equivalenti, spesso più agevoli dei bipolari, (specie se questi ultimi a carattere geometrico bifilare).

I «tempi limiti dinamici» decrescono molto rapidamente con il sovraccarico (m) di corrente, (per cui $J_m = mJ$): essi risultano proporzionali ai «tempi propri polari», T_0 , (che aumentano con il quadrato delle dimensioni principali, per cui occorrono grandi superfici polari o refrigerazioni affinché gli elettrodi possano sopportare tali sovraccarichi per un tempo più lungo). Conlettrodo sferico medio: $\sigma = 10^{-4}$ s/cm; $c = 1,75$ watt sec/cm³; $\lambda = 1,2 \cdot 10^{-2}$ watt/cm °C sec, $\rho_0 = 100$ cm, $T_0 = 1,75 \cdot 100^2 / 1,25 \cdot 10^{-2}$ sec. = 400 h; cosicchè il riscaldamento fino alla temperatura stazionaria richiede un lungo tempo. Il sovraccarico ammissibile in una ora è: $t_g/T_0 = 1/400 = \pi/m^4$, da cui: $m = 5,15$, e poichè questa polarità comporta un (c.l.s.) = 150 V/8 A. = 19 A., la sovracorrente per 1 h sarà $(J_m)_1 = 5,65 \cdot 19 = 110$ A; per 2 h ricavando di nuovo m da:

$$2/400 = \pi^2/4 m^4, (J_m)_2 = 87 \text{ A.} < (J_m)_1.$$

I *geomonopoli d'urto* risolvono il problema delle «*durate EGO*» contraendole praticamente a piacere, per conseguire gli stessi risultati.

Questa *valutazione comparativa delle possibili geobipolarità*, (dai bifilari, fino ai monopoli), trova il suo compimento negli specifici elettrotrattamenti da *stazionarie a d'urto*. Si rimuovono l'aspetto spesso anti-economico delle «*durate*» EGO, e la dannosa empiricità delle postazioni elettrodeiche. Quest'ultima si ripercuote fortemente, anche a prescindere dalle «*durate*» e «*rendimenti*», sulla stessa consistenza dell'elettrogeocinesi.

CONCLUSIONE.

Abbiamo ricavato le formule relative ai geomonopoli e ai geobipoli, in condizioni diverse d'alimentazione elettrica e di pressione differenziale al catodo d'idroestrazione.

Dalle grandezze EGO, per il geobipolo, sono deducibili naturalmente al limite, per basi infinite, quelle ricavate direttamente dal geomonopolo.

Anzi è da rilevare che nelle espressioni che danno $P(x, t)$, $q_k(t)$, $K(t)$, $q(x, t)$, $Q(x, t)$, W , compare un termine additivo proprio del monopolo, quindi al limite, per ampiezza interelettrodica $a \rightarrow \infty$, resta solamente questo termine diverso da zero.

Le formule relative al geomonopolo sono limiti, in pratica si applicano quelle relative al geobipolo, con «basi a» sufficientemente grandi.

Il confronto critico di queste situazioni geopolari suggerisce le più convenienti da adottare nelle applicazioni a seconda i casi, eliminando le aprioristiche tendenze preferenziali, (quali ad es. i dispositivi bifilari, quelli a distanziamento polare arbitrario). Anzi le attuali nostre ricerche teorico-sperimentali sono state proprio consigliate per apportare un contributo chiarificatore su questo argomento.

Le analisi fatte si riferiscono ad EGO a base elettrodica variabile, a tensione o a corrente costanti, in situazioni diverse di idroprelievo catodico, rispetto al livello idrogeostatico. Particolarmente attenzione si è avuta nell'esame della « portata » per unità di sezione catodica: $q_k(t, a)$, al variare di t e di a , in quanto l'esame delle altre grandezze non aggiungerebbe nulla di nuovo.

Dal nostro esame grafico-analitico risulta che, fermo restando la tensione E di alimentazione, $H_k < H_0$, (pompaggio avanzato), la portata q_k diminuisce aumentando il distanziamento polare a , conforme alle leggi dell'elettrodinamica.

La famiglia di curve ($q_k t, a$) (parametro variabile a tra 0 e ∞), si svolge, nel tempo, compresa tra $q_k(t, 0)$, $q_k(t, \infty)$, con concavità verso l'alto, andamento asintotico a zero al crescere di t , e asintotico all'ordinata al diminuire di t , andamento tipo iperbolico (Fig. 9₂).

Per un determinato tempo, l'escursione tra $q_k(t, 0)$, $q_k(t, \infty)$, è piccola, specie per tempi piccoli o grandi, e siccome si opera sempre redditiziamente per $t \ll \tau$, (tempo caratteristico $ca^2/4 = \tau$), si deduce che, in ultima analisi le differenze q_k relative ai vari tipi di geopoli non sono eccessive. Non è lo stesso per le differenze operative e d'esercizio relative all'impiego dei vari tipi di geopoli (massime per i geobifilari).

Operando con pompaggio catodico ($P_0 > 0$), (permanendo nell'assunzione di una tensione alimentatrice costante), si possono avere tre modalità diverse, in correlazione col valore della stessa tensione legata alla pressione differenziale catodica.

Dalle Figg. 10₂ sono ben visibili queste influenze agli effetti estrattivi e di rendimento EGO.

Si potrà avere perciò un'effettiva estrazione idrica a partire da certi « tempi critici », emungimento però tanto minore quanto è maggiore la base a , fino a pervenire ad un limite di « inumidimento catodico » o dell'ambito subcatodico, o ad una esclusiva igrodistribuzione subcatodica, (v. Fig. 11₂).

La EGO a corrente I costante sia per $P_0 < 0$ che per $P_0 > 0$ (v. Fig. 12) denunciano portate $q_k(t, a)$ che aumentano all'aumentare della base a , fino al limite monopolare, in cui si hanno, nel tempo, i massimi q_k .

Con tensione costante, aumentando la base a , al posto dei massimi, si trovano i minimi q_K .

La casistica dei valori $P_0 \neq 0$, se I è cost. è più semplice che per E cost. fin dall'inizio si può avere sempre una « portata catodica » tanto maggiore quanto maggiore è l'ampiezza eteropolare, mentre possono riapparire anche qui i « tempi critici », a causa del tempo necessario a che l'acqua tellurica elettroconvogliata risalga nel tubo catodico.



Fig. 14 - Elettrometro con autoregolazione di misure di « portata »: (collettore di frazione).

È ovvio che teoricamente la *modalità operativa I cost.* comporta una *netta superiorità produttiva del monopolo sul bipolo*, e per E cost. avviene il contrario. Ma per definire la convenienza o meno del tipo di dispositivo polare da adottare, necessita circostanziare le condizioni operative di energizzazione e di pompaggio, come abbiamo ampiamente dimostrato.

La modalità I cost. potrebbe sembrare, a prima vista, del tutto preclusa, in quanto i gruppi elettrogeneratori per basi grandi dovrebbero erogare tensioni elevatissime, il che contravviene, tra l'altro, alla riconosciuta necessità di limitare i carichi limiti termoelettrostrazionari. Senonchè, *ferme restando le normali predeterminate tensioni funzionali è possibile innalzare gli amperaggi a « valori d'urto », riducendo adeguata-*

mente i tempi d'erogazione. Siamo all'avvento di nuove prassi d'EGO d'urto (per I cost., in tempi brevissimi con i normali elettrogeneratori).

Abbiamo risolto così uno dei problemi che maggiormente tormenta, dall'inizio, le possibilità d'applicazione EGO, soggette attualmente a troppo onerose durate d'esercizio.

Pur in condizioni non ideali di sperimentazione, la teoria qui svolta ha trovato conferma in Laboratorio, con elettrosometri a minimo volume (cm $25 \times 20 \times 20$), elettrodi estesi e paralleli, per soddisfare le condizioni imposteci nella teoria a carattere unidimensionale: (v. Fig. 14₂).

L'argillite sabbiosa esaminata, satura d'acqua, a reazione alcalina, posta nell'apparecchiatura elettroedometrica è stata tenuta, durante il processo, sotto un carico idrico costante (cm 2,5 dall'anodo in alto).

I risultati della sperimentazione a 40 Volt, (tensione costante), hanno confermato in pieno la teoria, distanziando le polarità (*a*) progressivamente da cm 10 a cm 13, a cm 16 a cm 19, (durate 5 h, 10 h). L'escursione dell'ampereaggio è apparsa minima da 0,30 A (cm 10) a 0,22 A (cm 19). I risultati ad ampereaggio costante, (0,4 A), pure soddisfacenti, a causa delle alte escursioni della tensione elettrica d'alimentazione (da 41 a 80 Volt), hanno richiesto debite correzioni.

RIASSUNTO

Abbiamo teorizzato un nuovo dispositivo da noi introdotto riguardante la «monocatoforesi prosciugante», un «geomonopolo» da preferirsi in alcuni casi al noto «geobipolo».

Si delineano con ciò nuove prassi elettrogeomagnetiche «EGO d'urto», riducendo al minimo i tempi d'erogazione della corrente impulsiva impressa al suolo.

Uno dei problemi che maggiormente incide sulle convenienze applicative EGO, (attualmente ad alte durate d'esercizio), è risolto.

ABSTRACT

The theory is given about a new device, which has been first used by us, dealing with «dewatering mono-cataphoresis», i. e., a «geo-monopole» which in some aspects has to be preferred to the well known «geo-bi-pole».

By this theory new electro-geo-osmotical methods are indicated: «Schock-EGO»; which reduce to a minimum the duration of electrical pulse current applied to the ground. Therefore one of the major problems which affects the convenience of using EGO-method (actually, now, long duration are necessary) has been solved.