

**Periodi di oscillazione libera dei conci centrali di una diga  
e loro relazione  
con le caratteristiche elastiche del calcestruzzo**

M. C. SPADEA

Ricevuto il 15 Aprile 1965

**RIASSUNTO.** — Nella nota viene confermato il prezioso aiuto dato dai sismografi (vibrografi) nel problema concernente le variazioni delle caratteristiche elastiche delle grandi dighe di sbarramento.

Sono state effettuate esperienze presso le dighe di Pieve di Cadore, Val Gallina, Ambiesta, Barcis, Vodo e Mis. I valori, osservati e calcolati, per i periodi delle oscillazioni trasversali (uni-bi-trinodali) sono in perfetto accordo.

Dette esperienze sono state eseguite a bacino idrico pressochè pieno.

Se ne deduce che esperienze e controlli sistematici dei periodi delle oscillazioni libere dei conci di una diga, possono rivelare tempestivamente eventuali possibili variazioni delle caratteristiche elastiche dei conci stessi.

**SUMMARY.** — That paper confirms the precious helps of the seismograph (vibrograph) in the study of the variations of the large dam's elastic characteristics.

Experiences are been performed on the dams at Pieve di Cadore, Val Gallina, Ambiesta, Barcis, Vodo and Mis. The values, observed and calculated, obtained for the periods of the oscillations (uni-bi-trinodal) yield perfectly well.

Systematic experiences and control of the periods of the free transversal oscillations of the dam's sections, can reveal possible eventual variations of their elastic characteristics in the time.

In questa nota vengono riportate ulteriori applicazioni di un metodo che permette la determinazione e il controllo delle caratteristiche elastiche dei conci di una diga, in base alla conoscenza dei periodi delle oscillazioni libere trasversali destinate da piccole esplosioni provocate alla base delle dighe stesse (<sup>1</sup>) in sponda destra e sinistra del fiume.

Ci limitiamo a considerare le oscillazioni trasversali, intese come onde di flessione («flexuralwaves»).

Una sbarra prismatica fissa ad un estremo, piegata perpendicolarmente alle sue generatrici e abbandonata a se stessa, esegue vibrazioni trasversali parallele approssimativamente alla sua base.

Indichiamo con  $AA' BB'$  un elemento della sbarra vibrante e  $A_0B_0$  sia la linea che non subisce allungamento.

Nella Fig. I sono segnate le forze in gioco; prendiamo l'asse  $x$  parallelo alla base della sbarra e l'asse  $y$  parallelo alle generatrici non deformate.

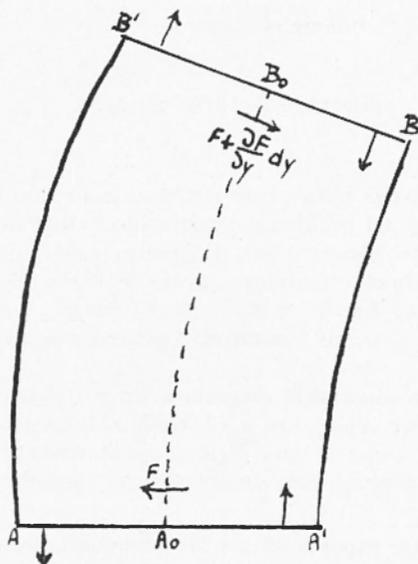


Fig. I

L'elemento considerato è sottoposto allo sforzo  $Xdy$ , dove

$$X = - \frac{\partial F}{\partial y} . \quad [1]$$

Se  $\rho$  è la densità dell'elemento ed  $s$  la sua sezione trasversale, la massa è  $\rho s dy$ . Sostituendo nella [1] si ottiene:

$$X = \rho s \frac{\partial^2 x}{\partial t^2} , \quad [2]$$

dove, come è noto  $\frac{\partial^2 x}{\partial t^2}$  è l'accelerazione del movimento.

L'equazione di equilibrio dinamico può essere scritta in altro modo: la coppia di forze dovuta alle tensioni tangenziali, è rappresentata dall'espressione  $- Fdy$ ; se  $C$  è la coppia flettente in  $AA'$ , le due coppie in  $AA'$  e  $BB'$  danno  $-\frac{dC}{dy} \cdot dy$ , mentre la coppia d'inerzia dovuta alla rotazione dell'elemento è data da  $q \cdot dy \cdot I \frac{\partial^2 \alpha}{\partial t^2}$ , dove  $I$  è il momento d'inerzia della sezione retta rispetto alla normale al piano in  $A_0$ ,  $\alpha = \frac{\partial x}{\partial y}$  è l'angolo di rotazione di una sezione intorno al suo centro; da tutto questo ne consegue l'equazione:

$$-F - \frac{\partial C}{\partial y} = q \cdot I \frac{\partial^2 x}{\partial y \partial t^2} \quad [3]$$

Eliminando  $F$  fra le [2] e le [3], tenendo conto della [1], e ricordando che  $-C = E \cdot I \cdot \frac{\partial^2 x}{\partial y^2}$  ( $E$  modulo di Young) si ottiene:

$$q \cdot s \frac{\partial^2 x}{\partial t^2} + E \cdot I \cdot \frac{\partial^4 x}{\partial y^4} = q \cdot I \cdot \frac{\partial^4 x}{\partial y^2 \partial t^2} \quad .$$

Quando il valore di  $E$  è elevato, si è provato che per i solidi il termine a secondo membro della precedente equazione è trascurabile rispetto agli altri; per cui si può scrivere:

$$q \cdot s \frac{\partial^2 x}{\partial t^2} + E \cdot I \frac{\partial^4 x}{\partial y^4} = 0 \quad , \quad [4]$$

equazione differenziale a derivate parziali, che dà l'allungamento  $x$  di un punto della sbarra, in funzione di  $y$  e di  $t$ .

Se  $T$  è il periodo e  $\lambda$  la lunghezza d'onda di una oscillazione, ponendo nella [4]

$$x = x_0 \sin 2\pi \left( \frac{t}{T} - \frac{y}{\lambda} \right) ,$$

si ottiene:

$$\lambda^2 = 2\pi T \sqrt{\frac{E \cdot I}{qs}} \quad .$$

Indicando con  $v$  la velocità di propagazione dell'oscillazione trasversale considerata, essendo come è noto  $\lambda = vT$ , si ha:

$$v^2 = \frac{2\pi}{T} \sqrt{\frac{E \cdot I}{qs}} \quad , \quad [5]$$

cioè la velocità delle onde trasversali in una sbarra, varia in ragione inversa della radice quadrata del periodo.

Per un sistema di onde stazionarie della forma:

$$x = u \sin (\omega t + \varphi) , \quad \omega = \frac{2\pi}{T} ,$$

dove  $u$  è funzione di  $y$ , le condizioni per la loro formazione si ottengono ponendo:

$$\beta^4 = \frac{s \cdot u}{E \cdot I} \omega^2 , \quad [6]$$

e sostituendo quindi la [6] nella [4] si arriva ad una equazione differenziale di quarto ordine:  $\frac{\partial^4 u}{\partial y^4} = \beta^4 \cdot u$ , il cui integrale generale è della forma:

$$u = c_1 e^{\beta y} + c_2 e^{-\beta y} + c_3 \sin \beta \cdot y + c_4 \cos \beta \cdot y , \quad [7]$$

che esprime l'ampiezza delle oscillazioni delle successive sezioni della sbarra. Le costanti  $c_1, c_2, c_3, c_4$  vengono determinate dalle condizioni meccaniche imposte alla sbarra vibrante.

L'eliminazione di queste quattro costanti conduce all'equazione:

$$\cosh \vartheta + \cos \vartheta + 1 = 0 \quad [8]$$

dove

$$\vartheta = \beta \cdot l . \quad [9]$$

Prendendo in considerazione la [6], a mezzo della [8], si ottiene

$$T = \frac{2\pi}{\vartheta^2} \cdot l^2 \sqrt{\frac{\rho \cdot s}{E \cdot I}} , \quad [10]$$

dove il fattore  $\sqrt{\frac{E}{\rho}}$  rappresenta la velocità di propagazione delle onde longitudinali.

Il periodo  $T$  dipende quindi dalla natura della sostanza di cui è costituita la sbarra, mentre il fattore  $\sqrt{\frac{I}{s}}$  dipende dalle dimensioni della sua sezione trasversale e dalla sua forma. Se la sezione è rettangolare, per  $I$  si ha:

$$I = \int x^2 \cdot ds = \frac{ab^3}{12} , \quad [11]$$

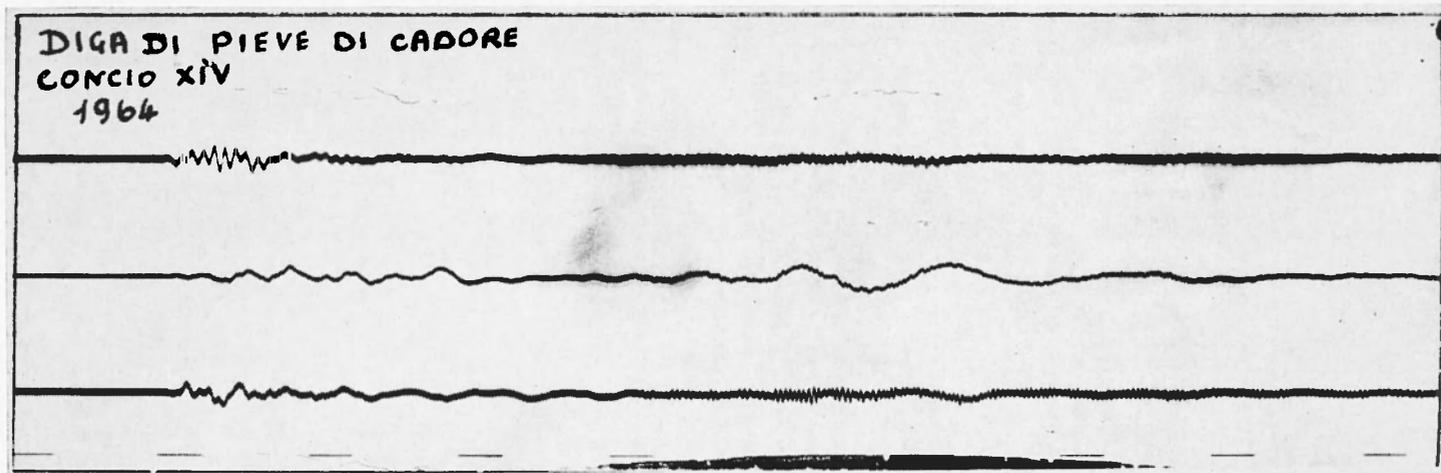


Fig. 1 - Registrazione vibrografica ottenuta nel concio centrale a quota coronamento della diga di Pieve di Cadore.

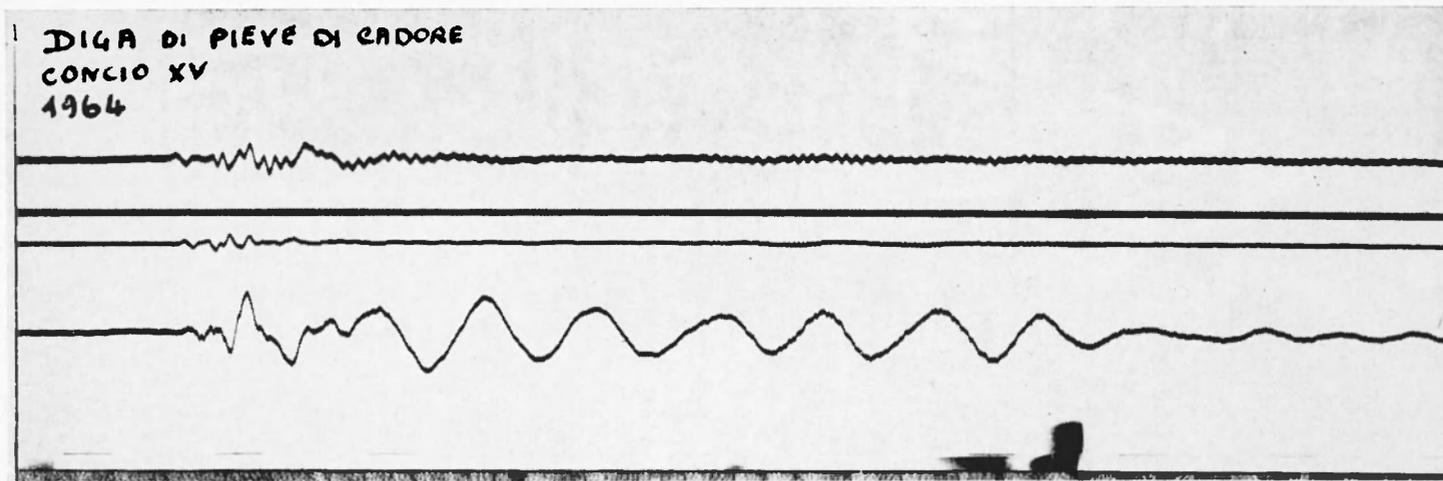


Fig. 1a - Registrazione vibrografica ottenuta a quota 682 del concio XIV della diga di Pieve di Cadore.

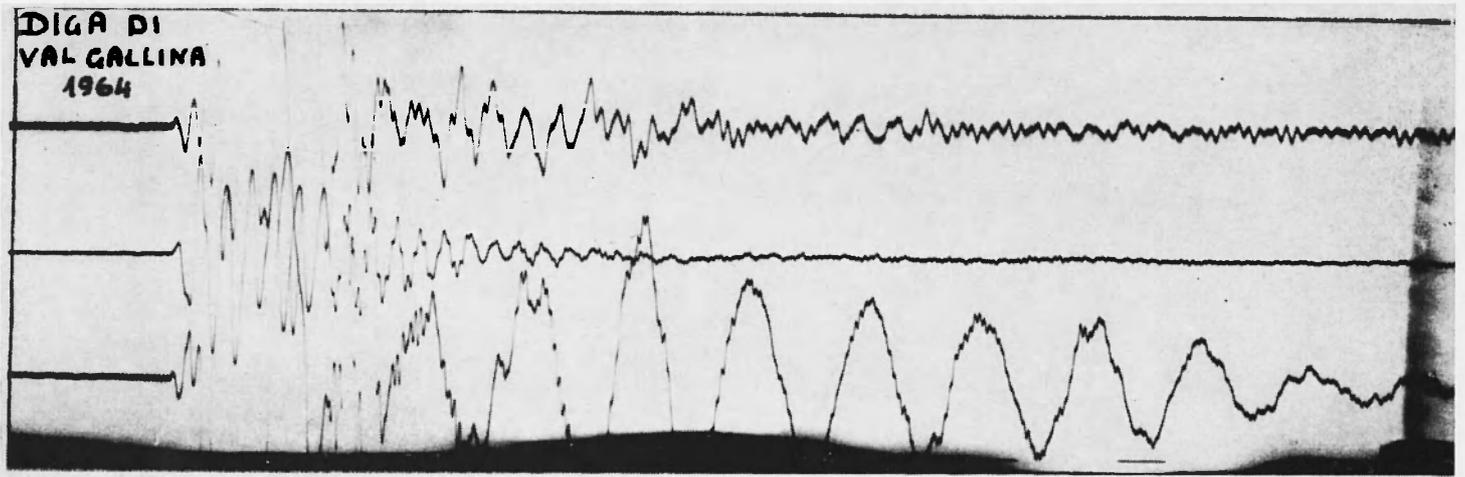


Fig. 2

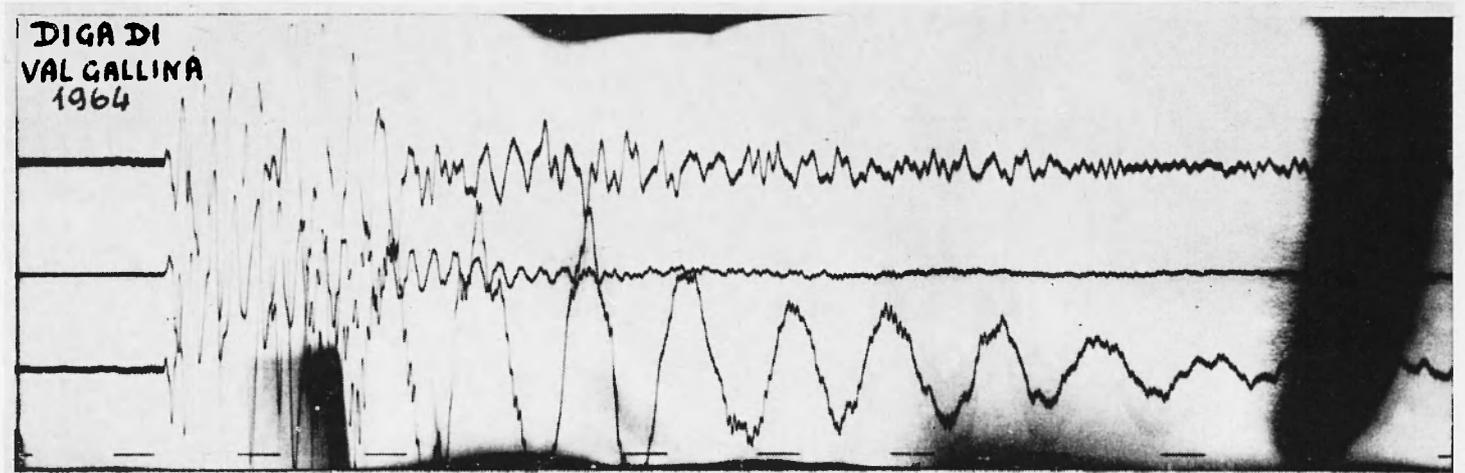


Fig. 2a

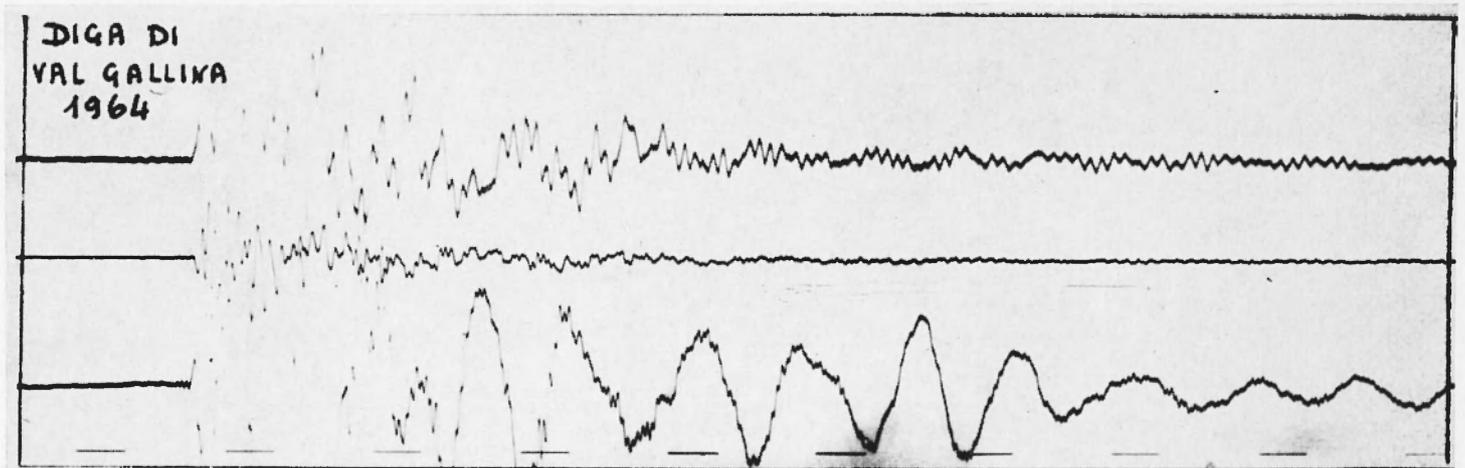


Fig. 2b - Le tre registrazioni vibrografiche sono state ottenute, adoperando piccole cariche esplosive di peso diverso, sul cono centrale della diga di Val Gallina.

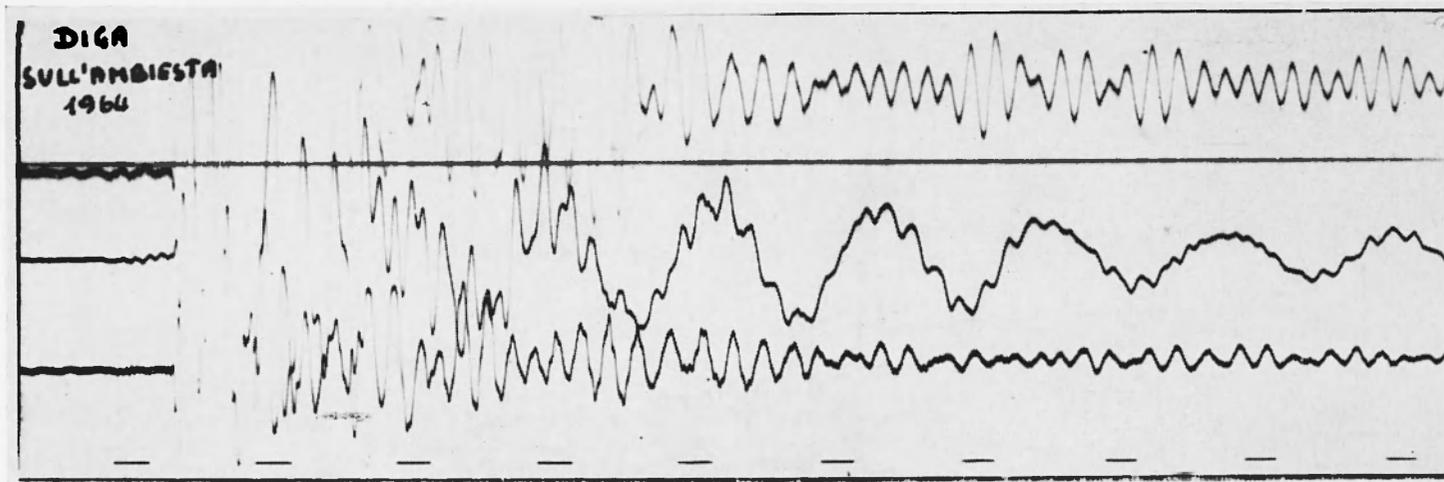


Fig. 3

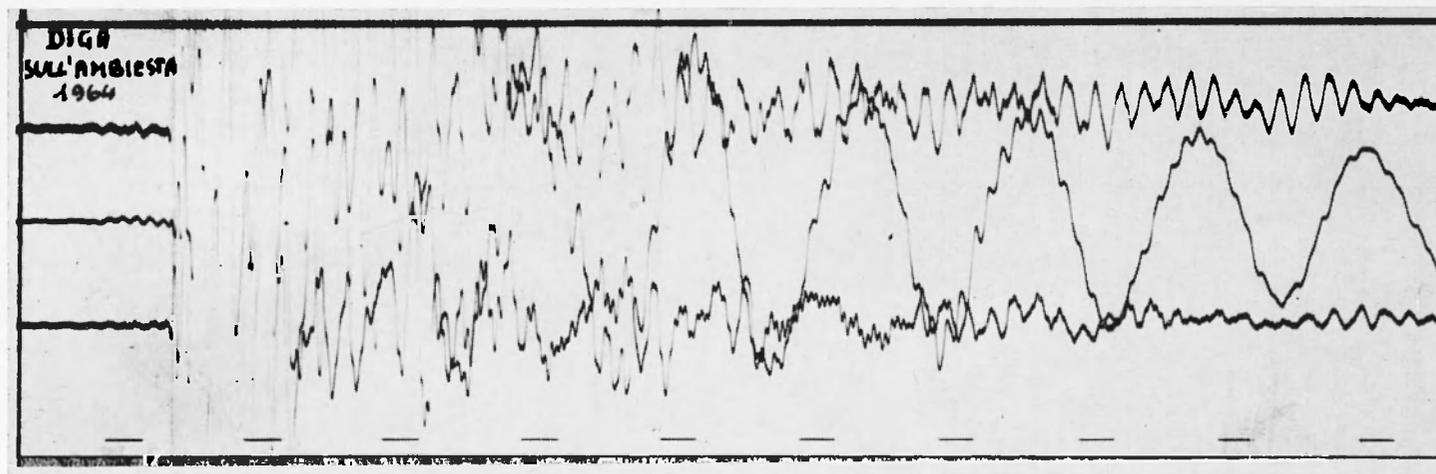


Fig. 3a - Le due registrazioni vibrografiche sono state ottenute con cariche esplosive di diverso peso, sul concio centrale della diga dell'Ambiesta.

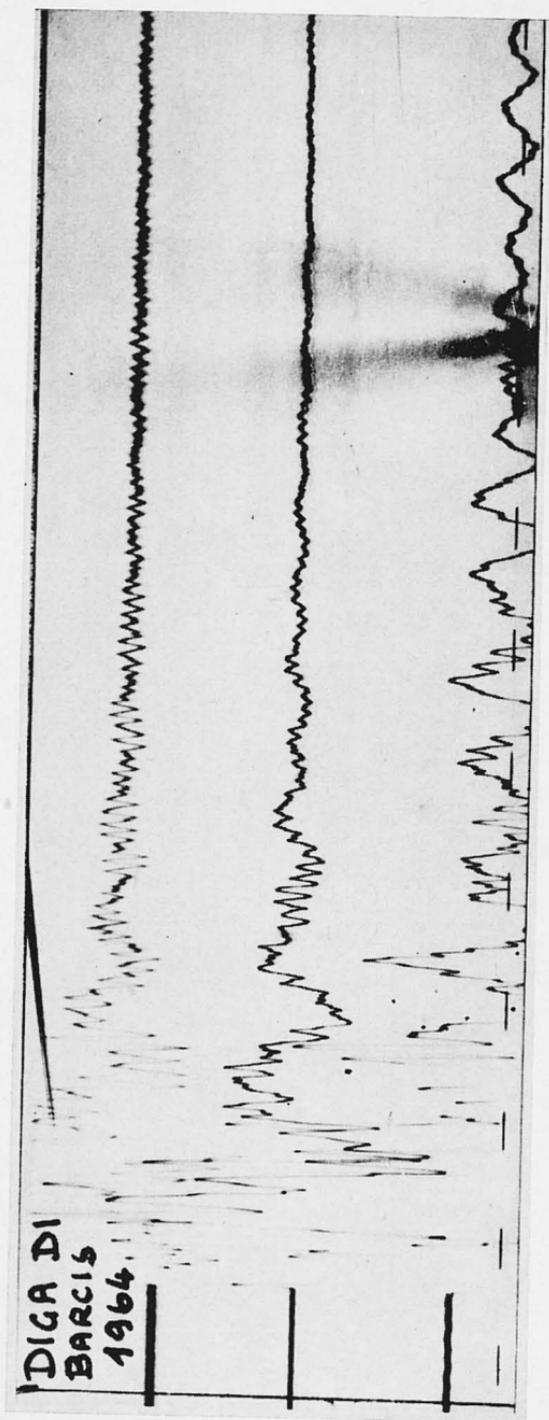


Fig. 4 - Vibrogramma ottenuto sul concio centrale della diga di Barcis.

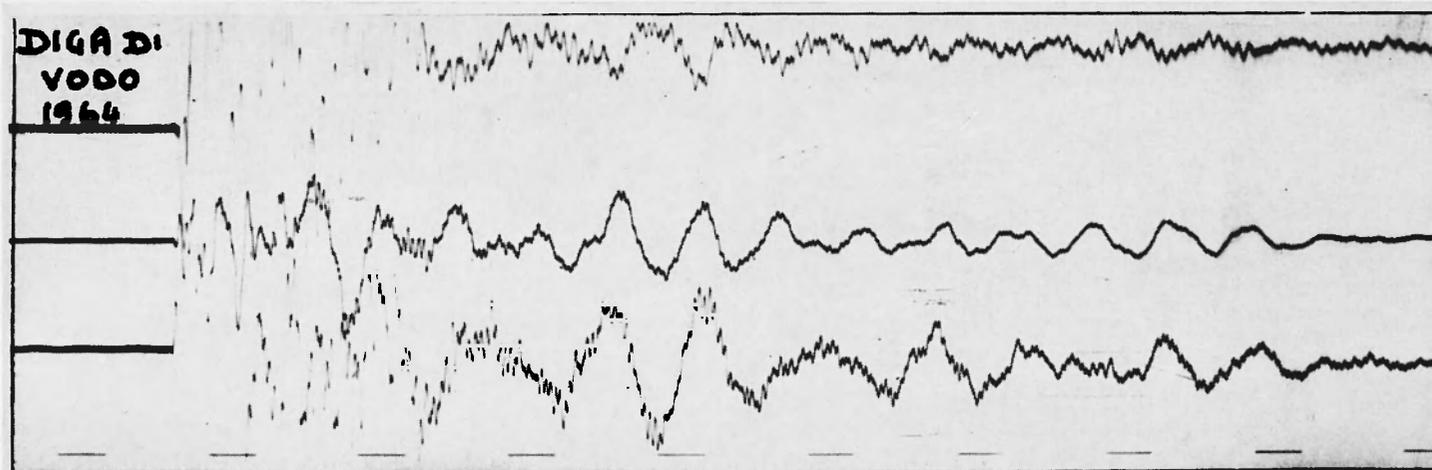


Fig. 5

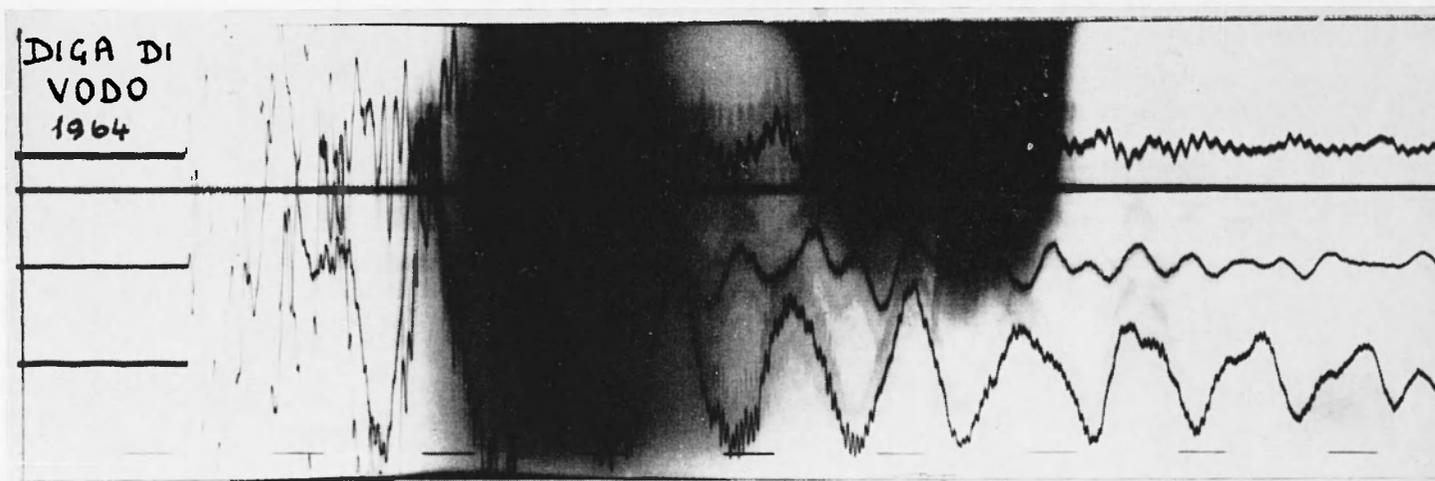


Fig. 5a - I due vibrogrammi sono stati registrati sul concio centrale della diga di Vodo, facendo esplodere le cariche esplosive a destra e a sinistra del fiume.

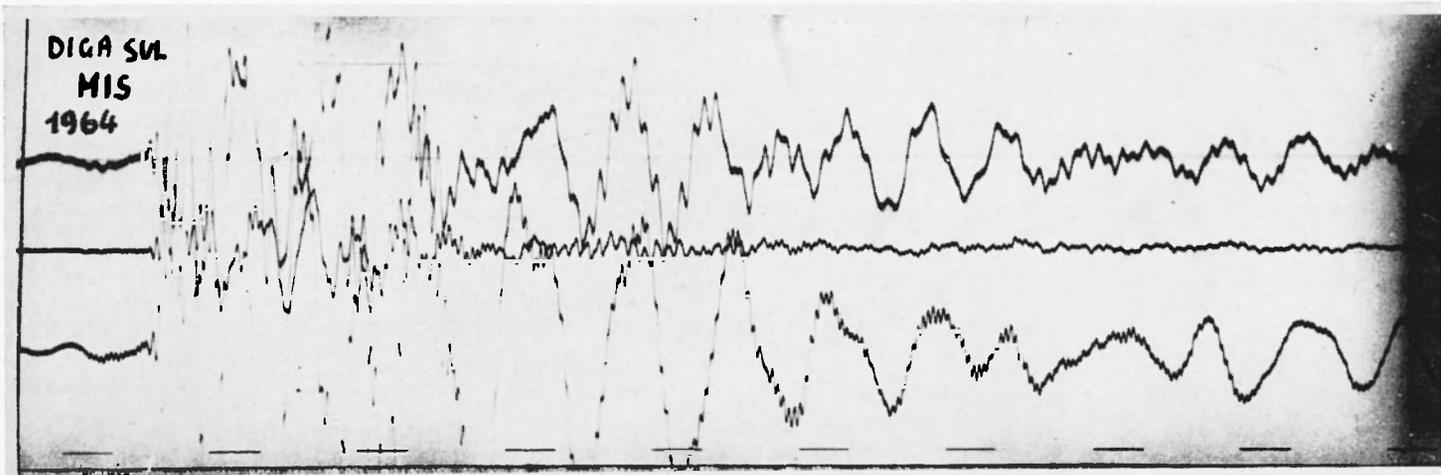


Fig. 6

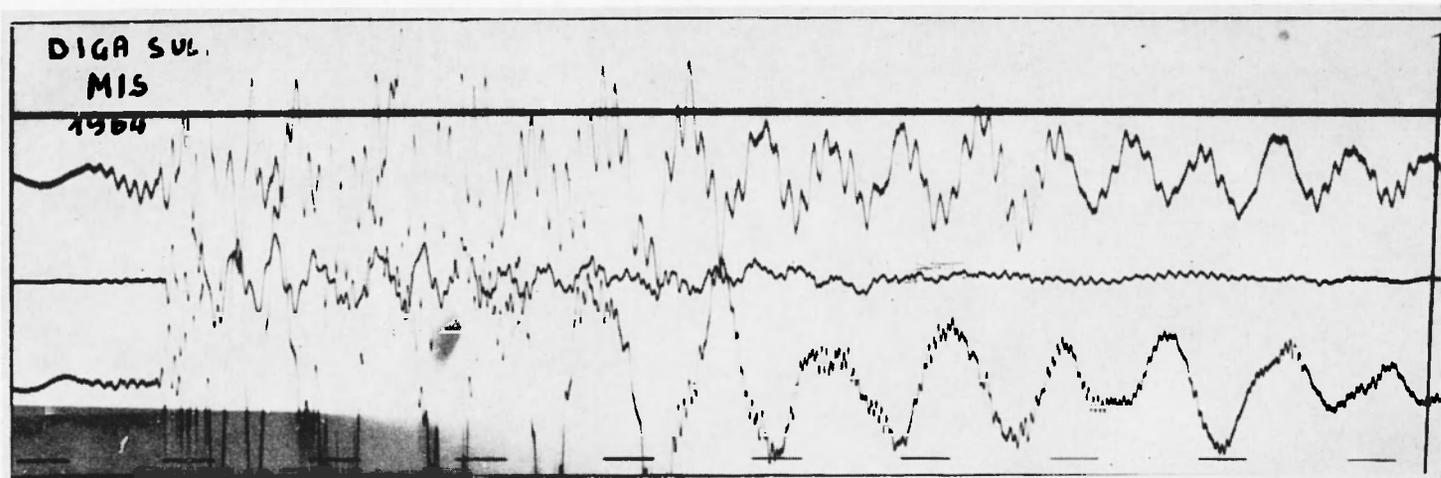


Fig. 6a - I due vibrogrammi sono stati registrati sul conccio centrale della diga sul torrente Mis, adoperando cariche di diverso peso.

dove  $a$  e  $b$  sono rispettivamente la larghezza e lo spessore della sbarra: in definitiva si ottiene per  $I$ :

$$I = \frac{sb^2}{12} . \tag{12}$$

Dalla [8], con opportune sostituzioni, si giunge alla formula finale per il periodo  $T$ :

$$T = \frac{4\pi \sqrt{3}}{\vartheta^2} \cdot \frac{l^2}{b} \cdot \frac{1}{\sqrt{\frac{E}{\rho}}} , \tag{13}$$

dove  $\vartheta$  è una delle soluzioni della [8].

Le soluzioni della [8] sono:

$$1,19 \frac{\pi}{2} ; \quad 2,98 \frac{\pi}{2} ; \quad 5 \frac{\pi}{2} ; \quad 7 \frac{\pi}{2} , \dots \dots \dots (2k + 1) \frac{\pi}{2} ,$$

radici ordinate in ordine di grandezza crescente.

2. - Nel caso di una diga, come è già stato rilevato <sup>(1)</sup>, dobbiamo evidentemente tener conto del fatto che un concio ha molto difficilmente una sezione regolare (simile ad esempio alla sbarra rettangolare su citata) non essendo mai lo spessore costante, in quanto va diminuendo dal coronamento alla base. Naturalmente l'ordine di grandezza può considerarsi attendibile.

Abbiamo eseguito esperienze presso quasi tutte le dighe dell'ENEL per determinare la frequenza dei conci centrali, o confrontarne i risultati ottenuti in esperienze precedenti.

Sono state provocate piccole esplosioni a valle della diga, registrate con un vibrografo; delle chiare registrazioni ottenute, alcune vengono riportate nelle Figg. 1, 1a, 2, 2a, 2b, 3, 3a, 4, 5, 5a, 6, 6a. In questi vibrogrammi l'inizio delle registrazioni coincide con l'arrivo delle onde longitudinali. Dando un valore medio alla velocità di dette onde  $\left( \sqrt{\frac{E}{\rho}} = 5.400 \text{ m/sec.} \right)$ , valore ottenuto in seguito a moltissime esperienze eseguite, conosciuta la densità del calcestruzzo, possiamo determinare il modulo di Young proprio del calcestruzzo.

Tutto ciò ci ha permesso di calcolare le eventuali variazioni delle caratteristiche elastiche del calcestruzzo ed inoltre di controllare il comportamento delle dighe esaminate, proprio da questo punto di vista.

Nei vibrogrammi riportati la componente orizzontale è quella che registra chiare ed ampie oscillazioni con periodi relativamente lunghi, mentre la componente a 90° le accenna appena. Queste oscillazioni sono le oscillazioni trasversali proprie di ciascun concio considerato.

Quando i periodi di oscillazione dei concii sono molto grandi ( $\gg 1$ ), lo strumento da noi usato non riesce a registrarle: ecco perché, in genere, sono più facilmente visibili e quindi determinabili i periodi delle binodali e trinodali.

3. - Le dighe presso le quali sono state eseguite le esperienze di cui la nota è oggetto, sono quelle di Pieve di Cadore, Val Gallina, Ambiesta, Barcis, Vodo e Mis.

Le caratteristiche proprie del concio centrale di ciascuna diga sono riportate nella sotto indicata Tabella I:

Tabella I

Dighe	Altezza media del concio centrale	Spessore medio
Pieve di Cadore	60 metri	16,5 metri
Val Gallina	85 »	10.2 »
Ambiesta	65 »	3.8 »
Barcis	45 »	3.4 »
Vodo	45 »	2.0 »
Mis	92 »	5.5 »

Nella Tabella II sono riportati i valori dei periodi osservati e calcolati nel Settembre 1964 a seguito delle eseguite esperienze.

Tabella II

Dighe	Periodo Uninodale		Periodo binodale		Periodo trinodale	
	calc.	oss.	calc.	oss.	calc.	oss.
Pieve di Cadore concio XIV (q. 682)	0 <sup>s</sup> .25	0 <sup>s</sup> .20	0 <sup>s</sup> .04	0 <sup>s</sup> .04		
Val Gallina			0 <sup>s</sup> .13	0 <sup>s</sup> .13		
Ambiesta			0 <sup>s</sup> .20	0 <sup>s</sup> .21		
Barcis			0 <sup>s</sup> .11	0 <sup>s</sup> .11		
Vodo			0 <sup>s</sup> .19	0 <sup>s</sup> .20	0 <sup>s</sup> .066	0 <sup>s</sup> .07
Mis			0 <sup>s</sup> .28	0 <sup>s</sup> .27		

Per quanto concerne la diga di Pieve di Cadore, le registrazioni sono state effettuate anche sul concio XV (preso come centrale). La uninodale qui registrata, sembra di periodo lievemente inferiore a quello calcolato, il quale risulta pure dalle registrazioni eseguite nel concio XIV (q. 682).

Questa lieve differenza di periodo può essere senz'altro attribuita ad una interazione fra i conci laterali, i quali ovviamente non possono considerarsi completamente liberi e possono quindi, di conseguenza, oscillare anche con un leggero sfasamento, soprattutto quando gli spostamenti superano certi valori — escono cioè dai veri e propri *micromovimenti* (Fig. 1, e 1a).

Concludendo, il confronto fra i valori osservati e quelli calcolati, porta ad un accordo veramente notevole, accordo che sussiste anche con i valori precedentemente ottenuti<sup>(2)</sup>; eseguendo quindi tali esperienze periodicamente e sempre con le stesse modalità, si può avere un utile quanto interessante controllo delle caratteristiche elastiche del calcestruzzo e quindi di eventuali variazioni subite da detto mezzo nel tempo.

#### BIBLIOGRAFIA

- (<sup>1</sup>) CALOI P., *Sui periodi di oscillazione libera dei conci di una diga e sulle loro relazioni con le caratteristiche elastiche del calcestruzzo*. « L'Energia Elettrica », XXXIII, 12 (1956).
- (<sup>2</sup>) CALOI P., *Aspetti della dinamica di rocce, calcestruzzo ed acque*. « Annali di Geofisica », XV, 2-3 (1962).
-