

Osservazioni sul comportamento di una apparecchiatura geoelettrica a corrente commutata per misure di resistività

M. BERNABINI

Ricevuto il 20 Novembre 1965

RIASSUNTO. — Si descrive un'apparecchiatura a corrente commutata a 10 Hz per misure di resistività. Vengono riportate le varie prove effettuate sull'apparecchiatura per determinarne sia le approssimazioni di misura che le caratteristiche di impiego. Vengono valutati alcuni effetti induttivi legati all'impiego della corrente alternata, con un metodo per successive approssimazioni; si dimostra che nei casi interessanti le misure fatte con l'apparecchiature in esame, tali effetti sono trascurabili.

SUMMARY. — A square-wave, 10 c/s, equipment suitable for resistivity measurements is described, with the various tests performed in order to determine both measurement accuracy and working characteristics. Also, mention is made of a method "for successive approximations", employed in order to evaluate some inductive effects involved when alternating current is used. It is concluded that these effects can be neglected in the normal working field of the equipment.

1. — PREMESSE.

I metodi geoelettrici sono senza dubbio tra i metodi della geofisica applicata di più frequente e largo impiego; in particolare si debbono ricordare al riguardo quelli basati sulla determinazione della resistività dei terreni, conosciuti con il nome di « sondaggi elettrici verticali ed orizzontali ».

In questi ultimi anni tali metodi si sono notevolmente diffusi ed affermati anche nelle indagini a piccola e piccolissima profondità effettuate per la risoluzione di problemi di vario tipo, geologici in senso stretto, geominerari, geoidrologici, di ingegneria civile (connessi per es. alla creazione di bacini sia idroelettrici sia per irrigazione, nonché alla progettazione ed alla esecuzione di fondazioni) ecc.

L'affermazione delle tecniche geofisiche di indagine è senza dubbio dovuta da un lato alla diffusione della conoscenza dei metodi stessi tra un sempre maggior numero di tecnici, dall'altro alla loro economicità rispetto ad altri tipi di indagine.

Nella pratica applicazione dei sondaggi elettrici per indagini a piccole profondità, nella scelta delle apparecchiature da utilizzare, hanno la massima importanza oltre che le approssimazioni ottenibili, anche la rapidità di misura, la facilità di lettura e la leggerezza e semplicità di installazione degli strumenti stessi nelle varie stazioni.

In tali casi, infatti, il tempo impiegato nello spostamento degli elettrodi di corrente è spesso quasi trascurabile; assume invece un peso notevole nell'economia generale di una campagna geoelettrica una riduzione dei tempi dedicati alle misure ed agli spostamenti dell'intera attrezzatura da un sondaggio al successivo.

Risultano quindi in genere preferibili strumenti a lettura diretta, abbastanza sensibili, in modo da richiedere una potenza ridotta nel generatore (a tutto vantaggio della leggerezza) ed a corrente alternata o commutata, per poter evitare l'uso di elettrodi impolarizzabili.

Una apparecchiatura di questo tipo è stata impiegata dall'Istituto di Geofisica Mineraria dell'Università di Roma a partire dal 1959 in molte indagini geoelettriche a piccola profondità.

Sono state eseguite molte centinaia di sondaggi elettrici (*) con stese massime comprese tra 60 e 400 metri tra gli elettrodi di corrente. È stata effettuata preliminarmente, e ad intervalli nel tempo, una messa a punto dello stesso strumento e delle tecniche di misura sia in laboratorio che in campagna.

Nella presente nota, dopo una descrizione dello strumento, saranno indicati i metodi utilizzati per la taratura dello strumento stesso e per la determinazione dei suoi limiti di applicabilità.

Particolare sviluppo sarà dato ad un calcolo di prima approssimazione dell'entità di alcuni effetti induttivi legati all'impiego della corrente alternata; le espressioni ricavate permettono di escludere la influenza di almeno alcuni degli effetti induttivi sulle misure eseguite in campagna, quando la distanza tra gli elettrodi eccitatori non eccede certi limiti, funzioni delle caratteristiche del suolo e della frequenza usata. A questi criteri ci si è attenuti nell'esecuzione dei sondaggi.

(*) Lo scrivente ha preso parte in molti casi alle operazioni di campagna ed ha effettuato (da solo o in collaborazione) o diretto la interpretazione di tutti i sondaggi elettrici eseguiti dall'Istituto.

I risultati delle misure sono stati per la quasi totalità dei casi molto soddisfacenti. Inoltre si sono ottenuti rendimenti medi di più di 10 sondaggi a giornata di lavoro di campagna, con stendimenti variabili tra i 100 e 200 m, e con una squadra composta da 3-4 persone.

2. - DESCRIZIONE DELLO STRUMENTO.

L'apparecchiatura in questione è il « Resistivity System » della casa Texas Instruments di Houston (U.S.A.). Essa consta di due parti staccate racchiuse in cassette di dimensioni $36 \times 24 \times 22$ cm: il generatore di segnale ed il voltmetro.

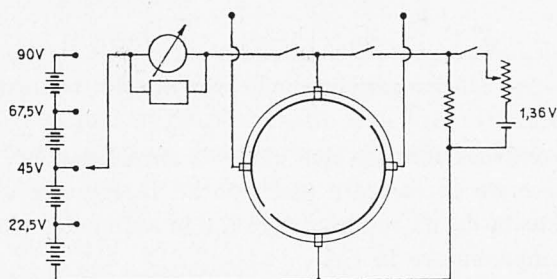


Fig. 1 - Schema semplificato del circuito del generatore di segnale.

Nel generatore di segnale due batterie a secco da 45 V, in serie, forniscono la corrente continua che, misurata con un milliamperometro dotato di 8 portate (da 0,1 a 300 mA), viene successivamente commutata da un commutatore meccanico a tamburo rotante in un'onda quadra a circa 10 Hz. Il commutatore può anche essere alimentato da un circuito contenente una pila campione a mercurio (1,35 V); in tal modo si può ottenere all'uscita del generatore una tensione ad onda quadra di valori prefissati. Lo schema semplificato del generatore è indicato nella Fig. 1.

Il voltmetro, di tipo elettronico, permette misure di tensioni alternate su 8 portate da 0,0003 a 1 Volt.

Il circuito comprende tre doppi triodi (2 valvole 12AY7 e una valvola 12AU7). Le 2 griglie della prima valvola sono collegate all'ingresso dell'apparecchio tramite due condensatori che bloccano eventuali tensioni continue; il particolare circuito (vedi Fig. 2) permette un ingresso bilanciato ed una prima amplificazione del segnale. Tra la prima e la seconda valvola è inserito un partitore di tensione cui corrispon-

dono le diverse portate dello strumento. Il secondo doppio triodo è utilizzato per due normali stadi di amplificazione, collegati tra loro da un partitore continuo di tensione, regolabile dall'esterno, per la calibrazione dello strumento. Tra la seconda e la terza valvola è inserito un filtro passa-basso.

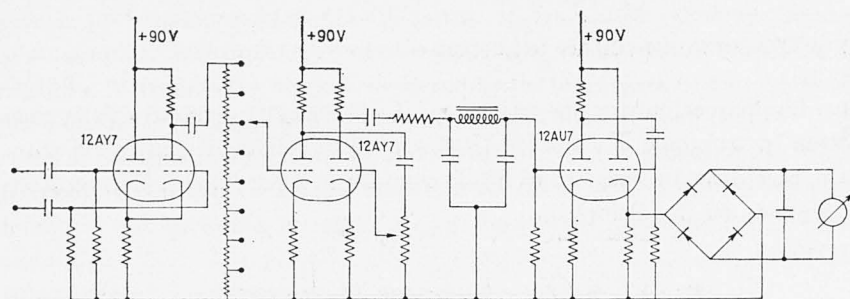


Fig. 2 - Schema semplificato del circuito del voltmetro.

L'ultima valvola fornisce due stadi di amplificazione, il primo di tensione, il secondo di corrente (del tipo ad inseguitore catodico). La corrente rettificata da un raddrizzatore a due semionde, viene misurata con un milliamperometro in c.c.

Nelle Figg. 1 e 2 non sono riportati, per semplicità, i circuiti di controllo delle tensioni delle batterie e pile di alimentazione.

Il voltmetro deve essere calibrato di frequente, collegando l'ingresso del voltmetro con l'uscita del generatore di segnale, nel quale sia stato chiuso il circuito contenente la pila campione.

Nota la tensione fornita dal generatore, si effettua la calibrazione regolando il partitore continuo di tensione inserito nei circuiti della seconda valvola.

3. - PROVE E CONTROLLI SULL'APPARECCHIATURA.

Come già detto, sono state effettuate sull'apparecchiatura una serie di prove sia per tarare gli strumenti sia per valutare l'effettiva rispondenza dell'apparecchiatura stessa nelle più svariate condizioni di impiego.

Alcune prove sono state eseguite in laboratorio, utilizzando alcune delle attrezzature dell'Istituto tra le quali si ricordano un generatore di segnale mod. 202 ed un voltmetro elettronico mod. 3400 A della Hewlett-Packard, un oscillografo a raggi catodici Tectronix mod. 321, e due attenuatori da 600Ω , 0-80 db costruiti dall'Istituto.

Si riportano qui di seguito i criteri seguiti nell'impostazione delle varie prove ed i risultati delle prove stesse.

a) *Prove eseguite sul generatore di segnale.*

Sono state controllate le forme d'onda e le frequenze del segnale prodotto dal generatore. Il segnale è un'onda quadra, distorta nelle zone ove avviene la commutazione. Se i contatti striscianti si adattano bene al tamburo rotante, si ha un piccolo intervallo di corrente nulla ($1/40$ di semiperiodo) e una distorsione per le extracorrenti di apertura e chiusura del circuito. Se i contatti sono imperfetti, si possono avere in ogni commutazione distorsioni della durata massima di circa $1/20$ di periodo.

La frequenza dell'onda quadra è stata controllata mediante interferenza con un'altra onda quadra di periodo noto e variabile a piacere; in normali condizioni di funzionamento essa può variare tra 8 e 12 Hz, in funzione della tensione della batteria di alimentazione e degli attriti dei contatti.

b) *Prove eseguite sul voltmetro.*

È stato preliminarmente effettuato un controllo dell'approssimazione dello strumento su tutto l'intervallo di misura, con segnali ad onda quadra e sinusoidale da 10 Hz, mediante il confronto con il voltmetro Hewlett-Packard. Tarato il voltmetro della Texas Instruments in esame sul valore di 60 mV, si è constatato che dai valori più bassi misurabili della tensione del segnale fino a 300 mV, le differenze massime delle letture ai due voltmetri non superavano il 2% del valore letto. Al di sopra dei 300 mV, le differenze aumentavano fino a raggiungere una differenza del 10% sul valore di 1 V. Controllata con l'oscillografo la forma d'onda nei vari stadi di amplificazione del voltmetro della Texas Instruments (T. I.) si è constatato che per valori di ingresso superiori ai 300 mV all'uscita della prima valvola i segnali sinusoidali assumevano aspetto trapezoidale, cioè risultavano tagliati.

Controlli analoghi sono stati ripetuti con onde sinusoidali di diverse frequenze. Da 7 a 12 Hz la risposta del voltmetro è stata, entro l'approssimazione strumentale, uguale alla risposta per onde sinusoidali di 10 Hz. Sopra i 12 Hz le letture fatte al voltmetro T.I. indicavano la presenza di una attenuazione che cresceva rapidamente con la frequenza. Si è constatato inoltre che per una data frequenza, tale attenuazione era

anche funzione della posizione sulla scala dell'ago del voltmetro T.I., indipendentemente dal fondo scala adoperato, almeno per tensioni di ingresso inferiori a 300 mV.

Come riferimento si è considerata l'attenuazione relativa alla posizione di centro scala dell'ago (lettura 65 su fondo scala 100) (*). I diversi valori di tali attenuazioni di riferimento per le varie frequenze sono indicati, in decibel nella Figura 3.

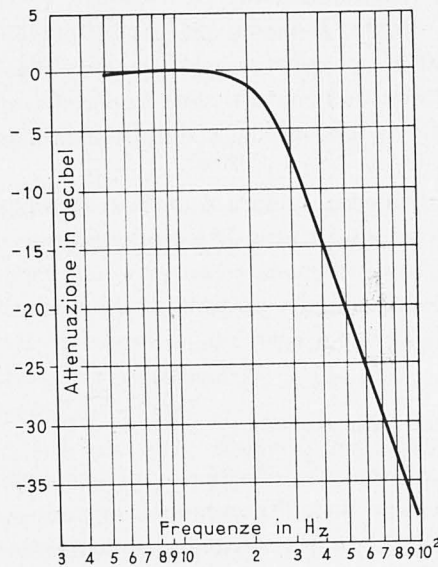


Fig. 3 - Diagramma delle attenuazioni (in db) in funzione delle frequenze del segnale di ingresso nel voltmetro per la posizione dell'ago dello strumento sul centro della scala.

Nella Figura 4 sono riportati, per le diverse frequenze, gli scarti percentuali delle attenuazioni riscontrate per le diverse posizioni dell'ago sulla scala (fondo scala 100), rispetto al valore dell'attenuazione relativo alla posizione dell'ago sulla lettura 65.

Gli scarti crescono rapidamente fino alla frequenza 30 Hz, rimangono circa costanti nel campo delle frequenze da 30 a 70 Hz, per crescere nuovamente oltre i 70 Hz.

(*) La scala nell'intervallo iniziale (0-40) è molto compressa, mentre è approssimativamente lineare nel tratto 50-100. Per tale ragione il centro geometrico della scala è circa in corrispondenza della lettura 65.

La causa principale dell'attenuazione è la presenza del filtro tra i circuiti della seconda e terza valvola; in prima approssimazione si può considerare il diagramma di Fig. 3 come il diagramma caratteristico del filtro.

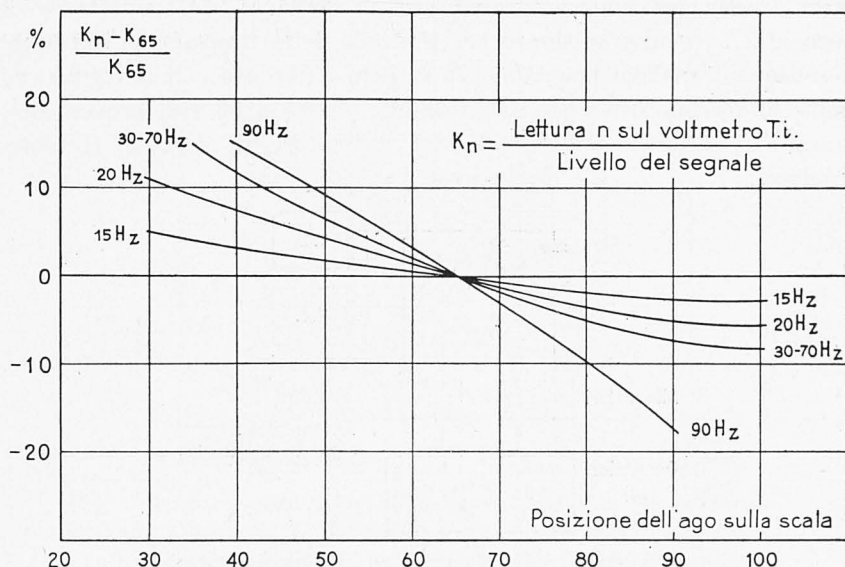


Fig. 4 - Diagramma degli scarti delle attenuazioni (in %) per varie frequenze, in funzione della posizione dell'ago sulla scala rispetto alle attenuazioni riscontrate per la posizione dell'ago sul centro della scala.

Gli scarti che si riscontrano per le varie frequenze in dipendenza della posizione dell'ago, sono probabilmente dovuti alle diverse condizioni di funzionamento dei circuiti di amplificazione connessi alla seconda valvola.

Per tensioni di ingresso superiori ai 300 mV, le curve di scarto riportate in Fig. 4 non sono più valide. All'aumentare della tensione oltre i 300 mV gli scarti sono, sempre in maggiore misura, minori di quelli indicati in Fig. 4 (*).

La causa di questa anomalia è da ricercarsi nelle distorsioni della forma d'onda dovute al primo stadio di amplificazione cui si è accennato precedentemente.

(*) Come ordine di grandezza, per un'onda sinusoidale di 70 Hz e 3 V di tensione di ingresso, lo scarto percentuale raggiunge il -48%.

È stata inoltre controllata la risposta del voltmetro T.I. nel caso di sovrapposizione di un'onda sinusoidale di frequenza prefissata all'onda quadra a 10 Hz. Lo schema delle connessioni e le apparecchiature usate sono illustrati nella Fig. 5. Il segnale ad onda quadra a circa 10 Hz proveniente, tramite un attenuatore, dal generatore di segnale T.I., veniva misurato per controllo della taratura su entrambi i voltmetri; analogo procedimento è stato effettuato con il segnale ad onda sinusoidale di frequenza prefissata (da 15 a 90 Hz) proveniente, tramite il secondo attenuatore, dal generatore di segnale Hewlett-Packard.

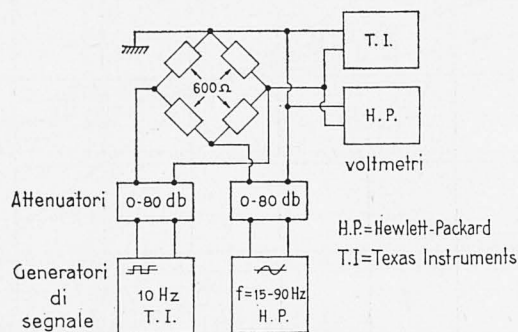


Fig. 5 - Schema delle connessioni e delle apparecchiature usate per la determinazione degli effetti della sovrapposizione di un'onda sinusoidale di frequenza prefissata ad un'onda quadra a 10 Hz.

Ovviamente nell'ultima misura le letture sui due voltmetri dovevano differire di una quantità valutabile in base ai diagrammi di Figg. 3 e 4.

Successivamente si inviavano all'ingresso del voltmetro contemporaneamente l'onda quadra a 10 Hz e l'onda sinusoidale di frequenza prefissata, misurate precedentemente.

Per ogni prova si sono quindi ottenute tre misure, una prima (L_q) con la sola onda quadra, a circa 10 Hz, la seconda (L_s) con l'onda sinusoidale di frequenza prefissata, la terza (L_{s+q}) con le due onde sovrapposte. Le misure sono state elaborate nel modo seguente. Le misure fatte con l'onda sinusoidale (L_s) sono state corrette in base ai diagrammi della Fig. 4 e quindi rapportate al valore delle misure fatte con la sola onda quadra a 10 Hz (L_q). In funzione di tale rapporto, espresso in percento, è stato riportato in Fig. 6 lo scarto relativo percentuale $100 \cdot (L_{s+q} - L_q) / L_q$. È risultato che i vari punti rappresentativi delle diverse prove sono raggruppate intorno ad un andamento medio approssimabile

ad una funzione quadratica, nel caso che i livelli dei segnali all'ingresso non superino i 200 mV. Il voltmetro opera perciò approssimativamente come uno strumento a valore efficace il cui comportamento è rappresentato dalla curva tratteggiata riportata in Fig. 6.

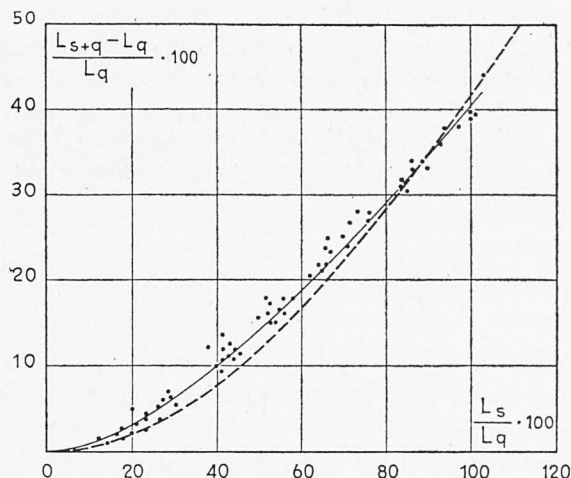


Fig. 6 - Scarti percentuali nelle misure nel caso di sovrapposizione di un'onda sinusoidale ad un'onda quadra, rispetto al livello dell'onda quadra, in funzione del livello dell'onda sinusoidale. A linea tratteggiata è rappresentato l'analogo diagramma nel caso di un voltmetro a valore efficace.

Al disopra dei 200 mV i punti rappresentativi delle prove ricadevano al disotto dell'andamento medio riportato in Fig. 6.

Gli scarti rispetto a tale andamento aumentavano al crescere dei livelli dei segnali di ingresso. Nel caso di un'onda quadra di livello superiore a 400 mV, nella sua sovrapposizione con un'altra onda sinusoidale, si ottenevano valori di misura inferiori a quelli ottenuti con la sola onda quadra. Questa anomalia deve essere collegata alle distorsioni del segnale che avvengono nel primo stadio di amplificazione per livelli del segnale superiori a 300 mV.

4. - OSSERVAZIONI SUL COMPORTAMENTO DELLO STRUMENTO NELLE MISURE DI CAMPAGNA.

Si è detto che il generatore di segnale fornisce un'onda quadra poco distorta con frequenza compresa fra 8 e 12 Hz. Agli effetti pratici delle

misure, bisogna considerare la distorsione che subisce il segnale nel voltmetro ad opera essenzialmente del filtro.

È noto che lo sviluppo in serie di Fourier di un'onda quadra di pulsazione $\omega = 2\pi f$ è dato da:

$$A(t) = \frac{4A_0}{\pi} \left(\sin \omega t - \frac{1}{3} \sin 3 \omega t + \frac{1}{5} \sin 5 \omega t - \frac{1}{7} \sin 7 \omega t + \dots \right). \quad [1]$$

Tenendo conto solo dell'attenuazione dovuta al filtro (*), in base al diagramma di Fig. 3, per una frequenza fondamentale di 10 Hz la [1] si trasforma in:

$$A(t) = \frac{4A_0}{\pi} \left(\sin \omega t - \frac{0,42}{3} \sin 3 \omega t + \frac{0,095}{5} \sin 5 \omega t - \frac{0,0028}{7} \sin 7 \omega t \dots \right). \quad [2]$$

Con un'onda di questo tipo, i valori misurati con strumenti sia a valor efficace che a valor medio sono dovuti praticamente alla sola armonica fondamentale.

Il contributo dato dalle armoniche superiori non supera infatti qualche unità percento.

In effetti inviando nel voltmetro T.I. successivamente un'onda quadra ed un'onda sinusoidale di uguale ampiezza massima, il rapporto, tra le due letture che si possono fare allo strumento nei due casi, in media, è di 1,28, uguale cioè al rapporto $4/\pi$ tra l'ampiezza dell'armonica fondamentale dell'onda quadra e quella dell'onda sinusoidale. Con l'apparecchiatura della Texas Instruments (in esame si utilizza quindi in pratica non un'onda quadra, ma un'onda sinusoidale con frequenza di circa 10 Hz.

L'eliminazione delle armoniche superiori giova senza dubbio all'approssimazione delle misure, in quanto minimizza gli effetti induttivi (dovuti all'impiego della corrente alternata) che sono funzioni crescenti della frequenza.

La presenza del filtro risulta particolarmente utile per la riduzione del livello dei disturbi nelle misure in campagna (per es. assai frequenti quelli dovuti ad elettrodotti). Tranne che in casi particolari (vicinanze di linee ad alta tensione, di grossi impianti etc.) l'attenuazione dovuta al filtro per i 50 Hz (circa 20 db) è risultata sufficiente ai fini delle mi-

(*) Nel caso in esame durante la commutazione si riscontrano alcune distorsioni. Dato l'intervallo, breve rispetto al periodo, nel quale tali distorsioni avvengono, esse interessano essenzialmente solo le armoniche superiori che, come si vedrà, non influenzano le misure.

sure delle differenze di potenziale. Per non incorrere in errori anche notevoli, è necessario però controllare con lo stesso voltmetro T.I. il livello dei disturbi ad ogni nuova posizione degli elettrodi di potenziale; il livello stesso può essere valutato con una approssimazione media del 15-20%, se non è a priori nota la frequenza predominante nel disturbo (vedi Fig. 4).

Noto, con le approssimazioni viste, il livello dei disturbi, ed effettuata la misura voltmetrica inviando nel terreno l'onda quadra a 10 Hz, si può ricavare, entro certi limiti, il valore delle differenze di potenziale da portare nel calcolo, sulla base delle osservazioni fatte sulla sovrapposizione di un segnale sinusoidale all'onda quadra, e riassunte nella Fig. 6.

Dalla stessa Figura si può ricavare che la misura effettuata nel caso di presenza di disturbi coincide, entro l'approssimazione strumentale (2-3%), con la misura di ΔV che si effettuerebbe in assenza di disturbi, se il rapporto tra il livello dei disturbi e quello del segnale è inferiore al 20%. Se tale rapporto è compreso tra il 20 ed il 50%, si deve calcolare in base al diagramma di Fig. 6 la correzione da apportare alla misura di campagna, per ottenere il valore vero del ΔV da introdurre nei calcoli. In questo caso, ricordando l'approssimazione nella valutazione dei disturbi, l'approssimazione ottenibile nel ΔV dovrebbe esser compresa entro il $\pm 10\%$. Se il livello relativo dei disturbi è superiore al 50% le misure non forniscono un'approssimazione sufficiente (*).

5. - VALUTAZIONE DI PRIMA APPROSSIMAZIONE DI ALCUNI FENOMENI INDUTTIVI.

Nella premessa si è detto che l'apparecchiatura in esame è stata esclusivamente utilizzata per sondaggi elettrici con stese complessive inferiori a 400 m. Tale limitazione è dovuta alla bassa potenza di uscita del generatore di segnale (al massimo 27 W), che non permette di ottenere differenze di potenziale sufficientemente alte rispetto ai disturbi alle maggiori distanze elettrodeiche.

Si deve tener conto inoltre degli effetti induttivi legati all'impiego della corrente alternata. Tra questi si debbono ricordare l'accoppiamento

(*) Quanto detto è ovviamente valido per livelli dei segnali inferiori a 200 mV; del resto ΔV superiori a tale valore si hanno solo nelle prime misure con elettrodi molto ravvicinati, misure nelle quali di regola i disturbi sono praticamente assenti o bassissimi.

induttivo delle linee di corrente e di potenziale, sia tra loro che con il terreno, e l'addensamento delle linee di corrente verso la superficie (effetto pelle).

Un sistema di calcolo per valutare l'effetto induttivo complessivo può ricavarsi da un articolo di Foster (1931) nel caso di un mezzo semi-indefinito e da una memoria successiva di Riordan e Sunde (1933) nel caso di due strati. Gli autori citati forniscono le relazioni per il calcolo dell'impedenza mutua di due circuiti giacenti sulla superficie del suolo. La risoluzione delle espressioni ricavate dagli autori è notevolmente complessa ed esula dalla finalità del presente studio.

Riteniamo sufficiente, al riguardo, cercare di ricavare l'ordine di grandezza di alcuni degli effetti induttivi indicati precedentemente con un procedimento approssimato che consenta di ottenere dei dati atti a fornire un criterio quantitativo per prevedere in quali condizioni e fino a quali distanze le misure in corrente continua ed in corrente alternata diano risultati eguali, nei limiti degli errori di misura.

Procederemo alla valutazione di detti effetti induttivi, dovuti all'immissione nel suolo di una corrente alternata sinusoidale di bassissima frequenza, con un metodo di successive approssimazioni, partendo dall'espressione del campo magnetico in corrente continua già utilizzata da Belluigi (1946) per il calcolo del campo magnetico nel suolo, dovuto all'immissione di una corrente continua da parte di un elettrodo puntiforme situato alla superficie del suolo stesso.

Con la trattazione che segue potremo tenere conto dell'accoppiamento (nelle condizioni che verranno precisate), tra il conduttore eccitatore percorso da corrente alternata ed il suolo, e dell'«effetto pelle» nel suolo stesso, ma non dell'induzione mutua tra i due circuiti di corrente e di potenziale (*).

Partendo dall'espressione del campo magnetico H dovuto alla corrente continua, si suppone che tale campo magnetico vari lentamente nel tempo. Si calcola quindi un primo campo elettrico alternativo correttivo E' generato dalla variazione nel tempo del campo magnetico H . Il campo elettrico E' concatena a sua volta un primo campo magnetico correttivo H' , che genera un secondo campo elettrico correttivo E'' e così via.

(*) L'induzione mutua diretta tra i due circuiti di corrente e di potenziale, può essere minimizzato in campagna allontanando tra loro sia i due strumenti (voltmetro e generatore di segnale) che i relativi cavi. Si potrà inoltre intrecciare per quanto possibile i due cavi che vanno agli elettrodi di potenziale.

Per il campo elettrico complessivo si ottiene quindi una serie $\bar{E} + \bar{E}' + \bar{E}'' \dots$ i cui termini successivi al primo rappresentano gli effetti induttivi che si vogliono valutare.

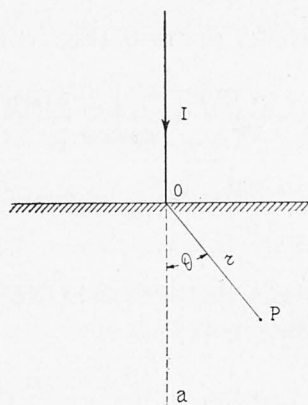


Fig. 7

Si considera un conduttore verticale seminfinito (Fig. 7) che immette nel punto O della superficie del suolo una corrente continua I ; il campo magnetico \bar{H} in un generico punto P è diretto normalmente al piano del disegno; il suo valore in unità Giorgi (S.I.) è espresso nella relazione:

$$H_{\varphi} = \frac{I (1 - \cos \vartheta)}{2 \pi r \sin \vartheta} \quad [2]$$

in cui ϑ è l'angolo POa . Il valore di H_{φ} dato dalla [2] è dovuto (Belluigi 1946) per metà al tratto di circuito costituito dal conduttore e per metà alla corrente circolante nel terreno.

Nelle considerazioni successive si terrà conto dell'effetto complessivo dato dalla [2].

Supponiamo che il campo H_{φ} vari lentamente nel tempo secondo una funzione sinusoidale di pulsazione ω . È lecito trascurare le correnti di spostamento se $\omega \varepsilon \ll \sigma$ dove ε è la costante dielettrica del mezzo e σ la sua conducibilità.

Indichiamo con \bar{E}' il campo elettrico rotazionale da aggiungere in prima approssimazione a quello irrotazionale \bar{E} dato da

$$\bar{E} = \frac{I}{2 \pi r^2 \sigma} \bar{r},$$

dove \bar{r} è un vettore unitario diretto come \bar{r} .

Consideriamo le due equazioni di Maxwell in cui figura a 1° membro il campo elettrico:

$$\nabla \cdot \bar{E}' = 0 \quad \nabla \times \bar{E}' = -j \omega \mu \bar{H}.$$

In coordinate sferiche di centro O (Fig. 7) si ha:

$$\nabla \cdot \bar{E}' = \frac{1}{r^2} \frac{\partial (r^2 E'_r)}{\partial r} + \frac{1}{r \sin \vartheta} \frac{\partial (\sin \vartheta E'_\theta)}{\partial \vartheta} = 0 \quad [3]$$

$$\nabla \times \bar{E}' = \bar{\phi} \frac{1}{r} \left[\frac{\partial (r E'_\theta)}{\partial r} - \frac{\partial E'_r}{\partial \vartheta} \right] = -j \omega \mu \bar{H} = -j \omega \mu \frac{I (1 - \cos \vartheta)}{2 \pi r \sin \vartheta} \cdot \bar{\phi} \quad [4]$$

dove $\bar{\phi}$ è un vettore unitario diretto secondo le φ crescenti.

Moltiplichiamo la [3] e la [4] per r :

Essendo:

$$\frac{1}{r} \frac{\partial (r^2 E'_r)}{\partial r} = 2 E'_r + r \frac{\partial E'_r}{\partial r}$$

sommando, dopo la moltiplicazione per r , la [3] e la [4] presa in modulo, si ha, con facili passaggi

$$\begin{aligned} 2 E'_r + r \frac{\partial E'_r}{\partial r} + \frac{1}{\sin \vartheta} \frac{\partial (\sin \vartheta E'_\theta)}{\partial \vartheta} + E'_\theta + r \frac{\partial E'_\theta}{\partial r} - \frac{\partial E'_r}{\partial \vartheta} = \\ = -j \omega \mu \frac{I (1 - \cos \vartheta)}{2 \pi \sin \vartheta}. \end{aligned} \quad [5]$$

Il secondo membro non dipende da r e quindi anche il primo è costante rispetto ad r . Si può dunque assumere che E'_r ed E'_θ siano singolarmente indipendenti da r .

Il sistema di equazioni a derivate parziali [3] e [4] diviene quindi a derivate totali e può essere scritto:

$$2 E'_r = -\cotg \vartheta E'_\theta - \frac{d E'_\theta}{d \vartheta} \quad [6]$$

$$E'_\theta - \frac{d E'_r}{d \vartheta} = -\frac{j \omega \mu I}{2 \pi} \cdot \frac{1 - \cos \vartheta}{\sin \vartheta}. \quad [7]$$

Una coppia di valori E'_r ed E'_θ che soddisfa (e quindi per il teorema di unicità l'unica che soddisfa) è:

$$E'_r = \frac{j \omega \mu I}{4 \pi} \quad [8]$$

$$E'_\theta = -\frac{j \omega \mu I}{2 \pi} \frac{1 - \cos \vartheta}{\sin \vartheta}. \quad [9]$$

È facile verificare, per sostituzione, che la [8] e la [9] soddisfano il sistema [6] e [7]. Si può notare che, come già detto E'_r e E'_θ non dipendono da r .

La \bar{E}' correttiva sarà perciò data da:

$$\bar{E}' = \bar{r} E'_r + \bar{\vartheta} E'_\theta.$$

Per passare alla seconda approssimazione si dovrà porre:

$$\nabla \times \bar{H}' = \sigma \bar{E}' = \sigma (\bar{r} E'_r + \bar{\vartheta} E'_\theta). \quad [10]$$

Sostituendo nella [10] le [8] e [9] e uguagliando separatamente le componenti secondo \bar{r} e secondo $\bar{\vartheta}$, si ha rispettivamente:

$$\frac{1}{r \sin \vartheta} \left\{ \frac{\partial (\sin \vartheta H'_\varphi)}{\partial \vartheta} \right\} = \sigma E'_r = \frac{j \omega \mu I \sigma}{4 \pi} \quad [11]$$

$$-\frac{1}{r} \left(\frac{\partial (r H'_\varphi)}{\partial r} \right) = \sigma E'_\theta = -\frac{j \omega \mu I \sigma}{2 \pi} \frac{1 - \cos \vartheta}{\sin \vartheta}. \quad [12]$$

La [11] e [12] risultano soddisfatte da

$$\bar{H}' = \bar{\phi} H'_\varphi = \bar{\phi} \frac{j \omega \mu I \sigma r}{4 \pi} \frac{1 - \cos \vartheta}{\sin \vartheta}. \quad [13]$$

Poniamo ora

$$\nabla \cdot E'' = 0 \quad [14]$$

$$\nabla \times E'' = -j \omega \mu H'_\varphi \bar{\phi} \quad [15]$$

si ha rispettivamente

$$\nabla \cdot E'' = \frac{1}{r^2} \frac{\partial (r^2 E''_r)}{\partial r} + \frac{1}{r \sin \vartheta} \cdot \frac{\partial (\sin \vartheta E''_\theta)}{\partial \vartheta} = 0 \quad [14 \text{ bis}]$$

$$\nabla \times E'' = \bar{\phi} \frac{1}{r} \left[\frac{\partial (r E''_\theta)}{\partial r} - \frac{\partial E''_r}{\partial \vartheta} \right] = \frac{\omega^2 \mu^2}{4 \pi} I \sigma r \frac{1 - \cos \vartheta}{\sin \vartheta} \bar{\phi}. \quad [15 \text{ bis}]$$

Il sistema [14 bis] [15 bis] risulta soddisfatto da

$$E''_r = -\frac{\omega^2 \mu^2 I \sigma r^2}{48 \pi} \quad [16]$$

$$E''_\theta = \frac{\omega^2 \mu^2 I \sigma r^2}{12 \pi} \frac{1 - \cos \vartheta}{\sin \vartheta}. \quad [17]$$

Procedendo con lo stesso metodo per il termine successivo di H_φ , E_r e E_θ , si ha:

$$H''_\varphi = - \frac{\omega^2 \mu^2 \sigma^2 r^3 I}{48 \pi} \frac{1 - \cos \vartheta}{\sin \vartheta}$$

$$E'''_r = - \frac{j \omega^3 \mu^3 \sigma^2 r^4 I}{1440 \pi}$$

$$E'''_\theta = \frac{j \omega^3 \mu^3 \sigma^2 r^4 I}{240 \pi} \frac{1 - \cos \vartheta}{\sin \vartheta}$$

I termini ennesimi risultano

$$H_\varphi^{(n)} = \frac{j^n \omega^n \sigma^n \mu^n r^{2n-1} I}{2 \pi (2n)!} \frac{1 - \cos \vartheta}{\sin \vartheta} \quad [18]$$

$$E_r^{(n)} = \frac{j^n \omega^n \mu^n \sigma^{n-1} r^{2(n-1)} I}{2 \pi (2n)!} \quad [19]$$

$$E_\theta^{(n)} = - \frac{j^n \omega^n \mu^n \sigma^{n-1} r^{2(n-1)} I}{2 \pi (2n-1)!} \cdot \frac{1 - \cos \vartheta}{\sin \vartheta} \quad (*) \quad [20]$$

I valori di H_φ , E_r e E_θ nel caso di correnti sinusoidali lentamente variabili nel tempo sono dunque rappresentati da serie, il cui termine generico è definito rispettivamente dalle [18, 19, 20]. Si può facilmente osservare che in ciascuna delle serie ciascun termine è sfasato rispetto al precedente di $\pi/2$ e che quindi H_φ , E_r e E_θ sono funzioni del tipo $\alpha + j\beta$ in cui α e β sono serie reali a termini a segno alternato. Poichè i singoli termini delle serie reali tendono a 0 per $n \rightarrow \infty$, le serie sono convergenti.

Per il problema in esame è sufficiente considerare la funzione E_r , la sola che interessi ai fini delle misure. Dalla [19] si ha:

$$E_r = \frac{I}{2 \pi \sigma r^2} + j \frac{\omega \mu I}{4 \pi} - \frac{\omega^2 \mu^2 \sigma r^2 I}{48 \pi} - \dots \quad [21]$$

Mettendo in evidenza il primo termine, la [21] diviene:

$$\begin{aligned} E_r &= \frac{I}{2 \pi \sigma r^2} \left[1 + j \frac{\omega \mu \sigma r^2}{2} - \frac{\omega^2 \mu^2 \sigma^2 r^4}{24} - \dots \right] = \\ &= \frac{I}{2 \pi \sigma r^2} \left[1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(j \omega \mu \sigma r^2)^n}{(2n)!} \right]. \end{aligned} \quad [22]$$

(*) Ponendo $n = 0$ nelle [18] e [19], si ottengono formalmente le espressioni di E_r ed H_φ valide per la corrente continua ($\omega = 0$). Si deve ricordare che la E_θ , invece, è nulla per $\omega = 0$.

Se si verifica che $\omega \mu \sigma r^2 < 2$ (*), i termini della [22] sono tutti decrescenti in valore assoluto al decrescere di n . In questo caso per avere un ordine di grandezza massimo degli effetti induttivi, rapportati al caso della corrente continua, basterà considerare il primo termine entro la sommatoria dell'espressione [22]. Tale termine è in quadratura rispetto a quello statico rappresentato dall'unità, perciò perchè esso dia, nella misura, un contributo inferiore al 2% si dovrà verificare la disegualianza (**):

$$\frac{\omega \mu \sigma r^2}{2} < 0,2 .$$

Per una frequenza di 10 Hz e ponendo $\mu = \mu_0$, la condizione risulta soddisfatta per $r < 90 \sqrt{1/\sigma}$ metri. Nel caso di terreno con resistività di 10 ohm-m, r deve essere quindi minore di circa 270 m; per resistività di 100 ohm-m gli effetti induttivi, nella schematizzazione di Fig. 7, sono trascurabili per r minore di 900 m.

L'apparecchiatura in esame, come si è detto, opera praticamente con un'onda sinusoidale a 10 Hz; gli ordini di grandezza delle distanze sopra calcolati sono validi pertanto nel caso in questione, purché si consideri r uguale alla semidistanza tra gli elettrodi di corrente, ove si operi con la disposizione elettrodica Schlumberger (***)).

Le considerazioni fatte indicano quindi che, per le distanze elettrodiche massime normalmente impiegate con lo strumento in esame (400 m), almeno alcuni tra gli effetti induttivi dovuti all'impiego della corrente alternata sono trascurabili.

Le induzioni mutue dirette tra le linee di corrente e di potenziale sono state controllate in campagna, mutando la posizione reciproca delle linee stesse. L'influenza dell'induzione è netta quando le linee sono molto prossime o si intersecano (non ortogonalmente) l'una con l'altra o quando le due parti dello strumento (voltmetro e generatore di segnale) sono molto vicine. Gli effetti diminuiscono rapidamente se si allontanano le linee tra loro; sembrano scomparire quando le linee stesse ven-

(*) Ponendo $\omega = 62,8 \text{ sec}^{-1}$, $\mu = \mu_0 = 4 \pi \cdot 10^{-7} \text{ H/m}$ la condizione è soddisfatta per $r < 2 \cdot 10^2 \sqrt{1/\sigma} = 2 \cdot 10^2 \sqrt{\rho}$, con ρ resistività espressa in ohm-m.

(**) Perchè la variazione percentuale nella misura $\sqrt{1+x^2}-1$ risulti minore di 0,02 dallo sviluppo in serie della radice si ricava che è sufficiente porre $x^2 < 2 \cdot 0,02$ cioè $x < 0,2$.

(***) Nel caso di onda non sinusoidale, occorre tener presente che gli effetti induttivi possono essere maggiori per le armoniche superiori.

gono poste a distanza di 30-40 m tra loro, distanza compatibile con la rapidità delle operazioni di campagna permesse dallo strumento.

CONCLUSIONI.

Le prove e le considerazioni sopra riferite hanno consentito di approfondire la conoscenza delle condizioni di funzionamento e dei limiti di applicabilità dello strumento in questione. Le espressioni ricavate sull'entità di alcuni effetti induttivi, e le successive prove effettuate in campagna, ci autorizzano a ritenere trascurabili, nel caso in esame, le conseguenze dell'uso della corrente alternata in luogo della corrente continua.

Lo studio eseguito ha permesso di ricavare alcune regole pratiche, utilizzate nelle operazioni di campagna.

La risposta finale dello strumento infine è stata controllata effettuando molti sondaggi elettrici in parallelo con una apparecchiatura a corrente continua.

Si è avuta una rispondenza più che soddisfacente (entro 2-3%) tra i risultati delle misure effettuate con le due apparecchiature, sempreché fossero rispettate le condizioni di funzionamento ottimo e le avvertenze precedentemente indicate.

Desidero ringraziare il Prof. Gaetano Latmiral per i suggerimenti e consigli datimi sul problema della valutazione degli effetti induttivi ed i colleghi G. Borelli, F. Di Fonzo, M. Grandinetti e C. Zacchi per la valida collaborazione durante l'esecuzione delle prove.

Roma - Istituto di Geofisica Mineraria
della Facoltà d'Ingegneria dell'Università.

BIBLIOGRAFIA

- BELLUIGI A., *Campi elettromagnetici dei suoli galvanicamente elettrizzati*. Pubbl. della Fac. d'Ingegneria dell'Univ. di Cagliari, **11**, (1946).
- FOSTER R. M., *Mutual impedance of grounded wires lying on the surface of the earth*. « Bell System Technical Journal », **X**, (1931).
- RIORDAN J.-SUNDE E. D., *Mutual impedance of grounded wires for horizontally stratified two layer earth*. « Bell System Technical Journal », **XII**, (1933).
- SOLAINI L., *Criteri e problemi costruttivi di strumenti per misure di resistività*. « Annali di Geofisica », **V**, 3, (1952).
-