RELAZIONI FRA I PARAMETRI CHE CARATTERIZZANO LA PIÙ GENERALE FUNZIONE DI VARIAZIONE DELLA DENSITÀ NELL'INTERNO DELLA TERRA E QUELLI DELLA FUNZIONE ATTA ALLA DETERMINAZIONE DEGLI SCHIACCIAMENTI DELLE SUPERFICI ISOPICNOTICHE

G. Boaga

Trattando dell'equilibrio di una massa fluida rotante nella quale la densità $\varrho(a)$ decresce in modo continuo dalla superficie ($a = 1$) al centro ($a = 0$) si prende a fondamento della teoria la celebre *equazione differenziale di Clairaut* [1]:

$$\left(a^2 \frac{d^2\varepsilon}{da^2} - 6\varepsilon\right) \int_0^a \varrho(a) \cdot a^2 da + 2\varrho(a) \cdot a^3 \left(a \frac{d\varepsilon}{da} + \varepsilon\right) = 0 \quad [1]$$

atta a determinare lo schiacciamento ε dei vari strati del pianeta ognuno costituito da densità costante e di forma prossimamente ellissoidica [2].

La supposta continuità della funzione $\varrho(a)$ corrisponde al fatto fisico che il pianeta dapprima sia stato fluido e che la sua solidificazione avvenuta via, via, non abbia di molto alterata la distribuzione interna iniziale.

Assegnata la $\varrho(a)$ ed introdotta nella [1] si determina un integrale particolare ξ tale che per $a = 0$ (centro del pianeta) si riduca all'unità [3].

---

(1) Cfr. F. Tisserand: Traité de mécanique Céleste, T. II, Chap. IV. « *Theorie de la figure des corps célèstes et de leur mouvement de rotation* ».

(2) La equazione richiamata venne trovata la prima volta da Clairaut che calcolò per approssimazione, trascurando nei calcoli le quantità di secondo ordine rispetto agli schiacciamenti ed i prodotti degli schiacciamenti per il quadrato della velocità angolare (approssimazione di Clairaut), l'attrazione che il sistema di strati ellissoidici esercita sopra un punto interno e ponendo la condizione che la risultante di questa attrazione e della forza centrifuga risulti normale all'ellissoide passante per il punto stesso (vedere: A. C. Clairaut, *Teoria della forma della Terra dedotta dai principi dell'idrostatica*. Traduzione e note di M. Lombardini, Ed. Zanichelli, Bologna).

(3) Cfr. Tisserand, *Opera citata*, Cap. XIV.

In effetti l'equazione [1] è una *equazione differenziale del secondo ordine lineare ed omogenea*, noti perciò due integrali ξ e η l'integrale generale della [1] è espresso dalla:

$$\varepsilon = C \cdot \xi + C' \cdot \eta$$

con C, C' due costanti. Però il secondo integrale particolare non si presenta continuo nell'estremo inferiore dell'intervallo di variabilità del parametro a (¹), dunque, dovendo risultare lo schiacciamento finito al centro, alla costante C' si deve attribuire necessariamente il valore *zero*; rimane così l'unico integrale ξ.

Secondo le considerazioni contenute nei classici Trattati di Tisserand, Appel, Bucholz, ecc. che trattano diffusamente dell'argomento, l'integrale della [1] è dato dalla:

$$\varepsilon = C \cdot \xi = \frac{\frac{5}{2}\varphi}{\left(\frac{d\xi}{da}\right)_1 + 2\xi_1} \cdot \xi(a) \qquad [2]$$

dove φ è il rapporto fra la forza centrifuga equatoriale e la corrispondente gravità; l'indice 1 apposto alle funzioni $\frac{d\xi}{da}$ e ξ significa che ad esse si debbono attribuire i valori risultanti col porre $a = 1$ (valori in superficie).

A partire dalla seconda metà del secolo scorso varie ipotesi sono state avanzate per la rappresentazione esplicita della funzione $\varrho\,(a)$. Gli Autori in genere hanno assimilato l'arco di curva rappresentante la variazione della densità nello intervallo 1....0, di variabilità del parametro a, ad un arco di parabola quadratica (Roche), o biquadratica (Helmert), ad un arco di sinussoide (Legendre), ad un arco di curva esponenziale (Lipschitz), ecc. ed hanno determinato i valori dei coefficienti in esse contenute, tenendo conto di alcuni elementi geofisici e geodetici, quali ad esempio le densità terrestri media e superficiale, lo schiacciamento dell'ellissoide terrestre, ecc. Successivamente sono sta-

(¹) Cfr. G. Boaga. Sopra una formula trinomia considerata come ipotesi relativa alla distribuzione della densità nell'interno della Terra. Atti del Reale Istituto Veneto di S. L. ed A., Tomo 78.

te utilizzate queste varie ipotesi per la ricerca della variazione — nell'interno della Terra — della gravità e della pressione.

Consideriamo ora per la funzione $\varrho(a)$ una espressione generale e di cui quelle finora considerate risultano altrettanti casi particolari. Immaginiamo a tal fine sviluppabile in serie di potenze con esponenti pari, sempre crescenti, del parametro a, con segni alternati, la funzione $\varrho(a)$, in modo da poter scrivere:

$$\varrho = \varrho_0 \sum_{r=0}^{\infty} (-1)^r C_r a^{2r} \qquad [3]$$

con ϱ_0 densità centrale.

Risulta immediatamente come facilmente si può provare:

$$C_0 = 1 \ . \qquad [4]$$

Analogamente per l'integrale ξ della [1] assumiamo la serie:

$$\xi = \sum_{s=0}^{\infty} \gamma_s \, a^{2s} \qquad [5]$$

e poichè — per quanto detto — per $a = 0$ deve risultare $\xi_0 = 1$, così si dovrà porre:

$$\gamma_0 = 1 \ . \qquad [6]$$

Ciò premesso e considerato, ci proponiamo, a complemento dei nostri precedenti studi, di *determinare le relazioni fra i coefficienti C_r della* [3] *e quelli γ_s della* [5], *per modo che si possa direttamente ottenere l'integrale ξ assegnata che sia la funzione della variazione della densità interna rappresentata dalla* [3].

Posto

$$\alpha_r = (2r + 1)^{-1} \qquad [7]$$

l'integrale messo in evidenza nella [1] assume la forma, tenendo conto della [3]:

$$\int_0^a \varrho(a) \cdot a^2 \, d\,a = \sum_{r=0}^{\infty} (-1)^r \alpha_r C_r a^{2r+3}. \qquad [8]$$

D'altra parte, derivando una e due volte la [5], si ottengono le:

$$\frac{d\xi}{da} = \sum_{s=1}^{\infty} 2\,s\,\gamma_s\,a^{2s-1} \qquad \frac{d^2\xi}{da^2} = \sum_{s=1}^{\infty} 2\,s\,(2\,s-1)\,\gamma_s\,a^{2s-2} \qquad [9]$$

e sostituendo le [8] e [9] nella [1] si ottiene — dopo alcuni passaggi — la:

$$\sum_{r,s} (-1)^r \left\{ 1 + 2\,s + [s\,(2\,s-1) - 3]\,a_r \right\} C_r\,\gamma_s\,a^{2\,(r+s)} = 0 \qquad [10]$$

con $r+s$ eguale successivamente ad 1, a 2, a 3, ecc.

Poichè quest'ultima deve essere verificata per qualunque valore di a, così dovrà risultare nullo il coefficiente che accompagna la potenza $a^{2(r+s)}$:

Posto $r+s=1$ (e quindi: $r=1$, $s=0$ e $r=0$, $s=1$) si trae:

$$-\frac{2}{5}\,C_1\,\gamma_0 + \frac{7}{3}\,C_0\,\gamma_1 = 0$$

e tenendo conto delle [4], [6] si ottiene la prima relazione che lega C_1 a γ_1:

$$6\,C_1 - 35\,\gamma_1 = 0\,. \qquad [11]$$

Posto invece $r+s=2$ (e quindi successivamente: $r=0$, $s=2$; $r=1$, $s=1$; $r=2$, $s=0$) si perviene alla

$$\frac{4}{7}\,C_2\,\gamma_0 - \frac{13}{5}\,C_1\,\gamma_1 + 6\,C_0\,\gamma_2 = 0 \qquad [12]$$

che lega C_2 a γ_2 attraverso C_1 e γ_1 in quanto $C_0 = \gamma_0 = 1$.

Così continuando si trova in generale la:

$$\sum_{h=0}^{t} (-1)^h \left\{ \frac{t\,(2\,t+5)}{2\,h+3} - h \right\} C_h\,\gamma_{t-h} = 0\,. \qquad [13]$$

Si può dunque concludere che: *il problema che ci siamo proposti è completamente risolto con la formula generale* [13], che comprende come caso particolare le [11] e [12] a cui corrispondono i valori: $t=1$ e $t=2$.

Ne discende la possibilità mediante la [2] di determinare lo schiacciamento ε per mezzo dei coefficienti C_r della funzione [3] della variazione della densità interna.

Nel caso particolare che la serie [3] sia accorciata, cioè costituita di soli t termini, le cose dette continuano a valere purchè si abbia l'avvertenza di porre $C_k = 0$ con $k \geqslant t$.

Come caso particolare consideriamo la funzione considerata da Roche:

$$\varrho(a) = \varrho_0 (1 - \beta a^2) \ . \qquad [14]$$

Confrontandola con la [3] si traggono le:

$$C_0 = 1 \qquad C_1 = \beta \qquad C_k = 0 \ (k \geqslant 2)$$

e conseguentemente per la [13]:

$$\gamma_1 = \frac{2}{7} \cdot \frac{3}{5} \beta$$

$$\gamma_2 = \frac{13}{18} \cdot \frac{3}{5} \beta \cdot \gamma_1 = \frac{2}{7} \cdot \frac{13}{18} \left(\frac{3}{5} \beta \right)^2$$

$$\gamma_3 = \frac{28}{33} \cdot \frac{3}{5} \beta \cdot \gamma_2 = \frac{2}{7} \cdot \frac{13}{18} \cdot \frac{28}{33} \left(\frac{3}{5} \beta \right)^3$$

. . . .

dove si scorge facilmente la regola della formazione dei coefficienti che accompagnano la potenza s -esima di $\frac{3}{5} \beta$, per poter scrivere direttamente il valore del coefficiente γ_s per s qualunque.

Sostituendo questi valori nella [5] e questa nella [2], dopo di aver posto $a = 1$, ed attribuendo allo schiacciamento ε il valore accettato attualmente per lo ellissoide terrestre (1/297) si perviene ad una equazione nell'incognita β, che risoluta, permette di attribuire alla costante β della [14] un valore tale da riprodurre lo schiacciamento desiderato.

La seconda costante ϱ_0 che figura nella [14] si potrà determinare p. es. imponendo la condizione che risulti soddisfatto il valore oggi attribuito alla densità media della Terra (5,52) od a quello superficiale (2,67) [1].

Calcolati i valori di tali costanti risultano per le formule scritte noti i coefficienti γ_s della [5], sicchè per mezzo della [2] si potrà determinare il valore dello schiacciamento dello strato ellissoidico interno, di densità costante, caratterizzato dal valore di a compreso fra 1 e 0.

Analoghe ricerche si possono ripetere prendendo a base dei calcoli qualunque ipotesi sulla variazione continua della densità nello interno del corpo terrestre, dopo naturalmente averla trasformata nella forma [3].

RIASSUNTO

Vengono studiate le relazioni fra i parametri che caratterizzano la più generale funzione di variazioni della densità dell'interno della terra e quelli della funzione atta alla determinazione degli schiacciamenti delle superfici isopicnotiche.

SUMMARY

A study is being carried out on the connections between the parameters characterizing the more general function of density variations within the earth and those of the function apt to determine the deflections of isopicnotic surfaces.

---

(1) La *densità media* ϱ_m della Terra è legata alla funzione $\varrho(a)$ dalla:

$$\varrho_m = 3 \int_0^1 \varrho(a) \cdot a^2 \, da$$

la quale, per l'ipotesi di Roche, permette la determinazione della costante ϱ_0 (densità al centro) per mezzo della

$$\varrho_0 = \varrho_m : \left(1 - \frac{3}{5}\beta\right).$$

La *densità superficiale* ϱ_1 è invece espressa dalla seguente relazione quando si tenga conto della [3]:

$$\varrho_1 = \varrho_0 \sum_0^\infty{}_r \, (-1)^r \, C_r$$

che si riduce alla forma assai semplice

$$\varrho_1 = \varrho_0 \, (1 - \beta)$$

per l'ipotesi di Roche.