

# DIE URSACHEN DER ABSORPTION ELASTISCHER WELLEN

O. FÖRTSCH

Das Problem der Absorption elastischer Wellen in festen Körpern beschäftigt schon seit langer Zeit die Physiker und Geophysiker. Die ersten theoretischen Ansätze zur Erklärung dieser Naturerscheinung lassen sich bis in das vergangene Jahrhundert zurückverfolgen. Die ersten Beobachtungen zur Bestimmung des Absorptionskoeffizienten elastischer Wellen hat Angenheister (1906) an Wiederkehrwellen bei grossen Erdbeben angestellt. In der Zwischenzeit sind zwar in theoretischer wie experimenteller Hinsicht beachtliche Fortschritte erzielt worden, dennoch hat sich bis heute noch kein allgemein als richtig und brauchbar anerkannter Deutungsversuch der Absorption herauskristallisiert. Ein Grund hierfür ist darin zu sehen, dass es sehr schwierig ist, exakte Absorptionsbeobachtungen anzustellen. Einen weiteren Grund deutete Born (1941) an, indem er schreibt: « Since the materials of the earth's surface layers are solids, it is rather surprising that the implications of the experimental work done with other solid materials have not been given much consideration by seismologists ». Leider ist die in diesem Satz versteckte Mahnung, bei der Deutung der Absorption doch von vorliegenden, einwandfreien Beobachtungsergebnissen auszugehen, bis heute überhört worden. Born hat in der erwähnten Arbeit Versuche zur Bestimmung des Absorptionskoeffizienten an Gesteinsproben beschrieben, deren Ergebnisse sehr klar und eindeutig sind. In den Abschnitten I und V der vorliegenden Abhandlung wird darauf nochmals näher eingegangen werden.

Vor kurzem wurden von Menzel (1954a) und Hardtwig (1954) diejenigen Theorien, die hauptsächlich für eine Erklärung der Absorption elastischer Wellen in Betracht kommen, nochmals dargelegt und diskutiert. Dies wurde aber nur von rein theoretischen Gesichtspunkten aus getan. Bereits vorliegende Beobachtungsbefunde wurden nicht in Betracht gezogen, obwohl in beiden Arbeiten der Wunsch nach Messdaten zum Ausdruck gebracht worden ist. Da wohl angenommen werden kann, dass diese nicht allgemein bekannt sind, soll es Aufgabe der vorliegenden Arbeit sein, die Folgerungen, die sich aus den einzelnen Theorien ergeben,

den Beobachtungsergebnissen gegenüber zu stellen, um so eine Beurteilung der verschiedenen theoretischen Ansätze von der experimentellen Seite her zu ermöglichen.

Ein weiterer Umstand veranlasst den Verfasser, sich mit den erwähnten Darlegungen von Hardtwig zu befassen. Hardtwig kritisiert darin einen Vortrag des Verfassers, der auf der 19. Tagung der Deutschen Geophysikalischen Gesellschaft im Oktober 1953 in Hannover gehalten worden ist. Da in einem kurzen Referat von 20 Minuten Dauer nur das Wesentliche der Problemstellung angedeutet werden kann und Einzelheiten unberücksichtigt bleiben müssen, wäre es wohl zweckmässiger gewesen, Hardtwig hätte mit seiner Kritik gewartet, bis die diskutierten Probleme in einer Veröffentlichung dargestellt worden wären. So ist es gekommen, dass sich die Ausführungen von Hardtwig auf eine Reihe von Missverständnissen gründen, welche den Inhalt des Vortrages verdreht wiedergeben und daher eine Richtigstellung erfordern.

In den folgenden Darlegungen wird zu den Fragen bezüglich der Absorption elastischer Wellen im oben erwähnten Sinne Stellung genommen. Auf die speziellen mathematischen Behandlungen der Probleme wird nicht eingegangen werden. Desgleichen wird bei der Besprechung der Beobachtungen nur kurz das Messprinzip angedeutet. Zwecks näherer Orientierung sei auf die angeführten Schriften verwiesen.

I. *Beobachtungsergebnisse.* — In diesem Abschnitt werden alle dem Verfasser bekannten Beobachtungen über die Absorption elastischer Wellen und die Dämpfung elastischer Schwingungen zusammengestellt. Ein Anspruch auf Vollständigkeit wird nicht erhoben. Da elastische Schwingungen als stehende elastische Wellen aufzufassen sind, ist es einleuchtend, dass auch die Dämpfung solcher Schwingungen im ursächlichen Zusammenhang mit der Absorption steht. Die Dämpfung wird durch das logarithmische Dekrement (= natürlicher Logarithmus des Verhältnisses zweier Amplituden, die um eine Periode auseinanderliegen) zahlenmassig erfasst. Definiert man sinngemäss den Absorptionskoeffizienten elastischer Wellen als den natürlichen Logarithmus des Verhältnisses zweier Amplituden eines stationären Wellenzuges, die in der Ausbreitungsrichtung um eine Wellenlänge auseinander liegen, so ist ersichtlich, dass der Dämpfungs- und der Absorptionskoeffizient einander gleich sind. Es lassen sich also Absorptions- und Dämpfungsmessungen gleichermassen zur Beurteilung des Wesens der Absorption heranziehen.

Bei der Ausbreitung von Wellen sind zwei Geschwindigkeiten von Bedeutung, die Phasen- und die Gruppen- oder Energiegeschwindigkeit.

Sinngemäß muss man dann auch zwischen einer Phasen- und einer Gruppenwellenlänge unterscheiden. Durch den Vorgang der Absorption wird Energie verzehrt. Daraus ergibt sich, dass man die obige Definition des Absorptionskoeffizienten noch dahingehend präzisieren muss, dass man ihn auf die Gruppenwellenlänge zu beziehen hat. Dies soll an der einfachsten Oberflächenwelle an der «erweiterten» Lovewelle, wie sie von Ramspeck und Schulze (1938) bezeichnet wurde, veranschaulicht werden.

Gegeben sei eine Schicht an der Erdoberfläche, deren obere Begrenzungsfläche beim Einfall elastischer Wellen frei von Spannungen bleiben

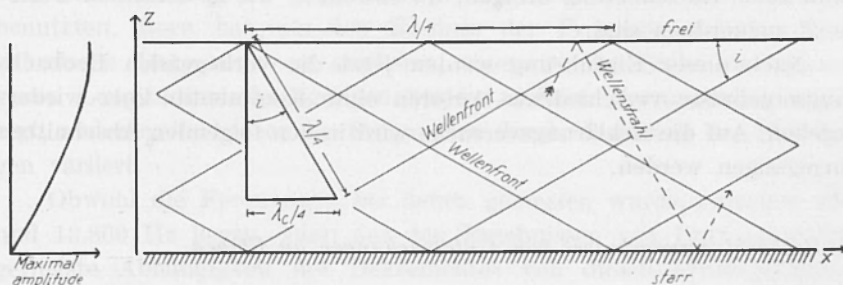


Fig. 1. - Darstellung der erweiterten Lovewelle in einer Schicht mit freier Oberfläche und starrer Unterkante.

Links: Verlauf der Maximalamplitude nach der Tiefe  $z$ .

Rechts: Verlauf der Wellenfronten und Wellenstrahlen. Erläuterung des Zusammenhanges zwischen Raumwellenlänge  $\lambda$ , Phasenwellenlänge  $\lambda_v$ , Gruppenwellenlänge  $\lambda_c$  und Einfallswinkel  $i$ .

$$\lambda_v = \lambda / \sin i \quad ; \quad \lambda_c = \lambda \sin i .$$

soll. Ihre untere Fläche soll sich unendlich starr verhalten, d. h. an ihr sollen keine elastischen Verschiebungen möglich sein. Die Oberflächenwelle entsteht dadurch, dass eine SH-Welle einer bestimmten Frequenz unter dem passenden Einfallswinkel auf die Flächen auftrifft. In der vertikalen Richtung erhalten wir das Bild einer stehenden Welle. Der Amplitudenverlauf ist in fig. 1 links dargestellt. Rechts ist der Strahlenverlauf und der Zusammenhang der Raumwellenlänge  $\lambda$ , der Phasenwellenlänge  $\lambda_v$ , und der Gruppenwellenlänge  $\lambda_c$  dargestellt. Innerhalb der Schicht wird Energie absorbiert, von Reflektionsverlusten an den Grenzflächen wird abgesehen. Primär wird längs der Strecke  $\lambda$  stets der gleiche prozentuale Anteil der hindurchwandernden Energie verschluckt. Da man aber nicht innerhalb der Schicht Messungen anstellen kann, sondern nur an der Oberfläche, so ist es einleuchtend, dass man als Bezugsstrecke

frequenzen der grossen Probe lagen zwischen 140 und 4540 Hz. An kleineren Stücken konnte der Bereich bis 60.000 Hz erweitert werden, ohne dass eine andere Gesetzmässigkeit zu erkennen gewesen wäre.

Auch bei dem Dämpfungskoeffizienten zeigte sich keine Abhängigkeit weder von der Frequenz noch von der Schwingungsart. Für Granit für die Berechnung der Absorption nicht  $\lambda_v$  wählen darf, sondern die Projektion von  $\lambda$  auf die Oberfläche, nämlich  $\lambda_c$ . Die Richtigkeit dieser Ueberlegungen wird, wie später noch gezeigt werden kann, durch die Beobachtungen bestätigt. Allerdings können nur Beobachtungen der Absorption diese Bestätigung liefern. Die Dämpfung von Schwingungen kann keine Entscheidung bringen, da sowohl  $\lambda_v$  wie  $\lambda_c$  derselben Periode  $T$  zuzuordnen sind.

Nach dieser Einführung werden jetzt die vorliegenden Beobachtungsergebnisse verschiedener Autoren ohne Kommentar kurz wiedergegeben. Auf die Erklärungsversuche wird in den folgenden Abschnitten eingegangen werden.

#### a) *Beobachtungsergebnisse von Untersuchungen an Stäben.*

Kimball und Lovell (1927) haben an Proben aus verschiedenen Materialien Dämpfungsbestimmungen in einem sehr grossen Frequenzbereich, nämlich von 0,1 bis 100.000 Hz durchgeführt. Eine summarische Betrachtung der Messwerte führt zu dem Ergebnis, dass das logarithmische Dekrement über den weiten Frequenzbereich hinweg konstant ist. Beobachtungen von Wegel und Walther (1929) bestätigen dies.

Während im allgemeinen solche Messungen an kleineren Proben vorgenommen werden, haben sich Birch und Bancroft (1938) ein äusserst grosses Untersuchungsobjekt ausgesucht, nämlich einen Bohrkern aus Granit von 244 cm Länge und einem Durchmesser von 23 cm. Dieser Zylinder wurde zu erzwungenen Longitudinal-, Torsions- und Biegeschwingungen angeregt. Aus den Eigenfrequenzen bis zur 5., bzw. 8. Oberschwingung liessen sich die elastischen Konstanten des verwendeten Granits berechnen. Die Werte für die Dämpfungskonstanten wurden aus den Amplitudenresonanzen berechnet. Birch und Bancroft benutzten zur Charakterisierung des Dämpfungsgrades die Resonanzbreite für die Amplitude  $0,7071 \cdot A_{\max}$ . Der Dämpfungskoeffizient ist definiert durch das Verhältnis  $Q = n_o / \Delta n = 2 \pi E / \Delta E$  ( $n_o$  = Eigenfrequenz,  $\Delta n$  = Resonanzbreite,  $E$  = Energie der Schwingung,  $\Delta E$  = während einer Periode absorbierte Energie).  $Q$  und das logarithmische

Dekrement sind miteinander verknüpft durch die Beziehung  $\delta = \pi/Q$ . Die Messungen von Birch und Bancroft haben ergeben, dass die elastischen Eigenschaften des Granits keine Abhängigkeit weder von der Art der Beanspruchung (Longitudinal-, Torsions- oder Biegeschwingung) noch von der Frequenz der Schwingung zeigen. Die untersuchten Eigen ergab sich  $Q = 150 \pm 50$ . Dem entspricht:  $\delta = 0,021 \pm 0,007$ . Diese Werte gelten für Granit ohne Vorbelastung. Befindet sich das Material bereits unter Druck, so sinken die Werte für  $\delta$ .

Noch etwas weiter gehen die Untersuchungen von Born (1941), über die er in der bereits eingangs zitierten Arbeit berichtet hat. Die Versuchsanordnung ist sehr ähnlich der von Birch und Bancroft benutzten. Born hat, um den Einfluss der Frequenz auf das logarithmische Dekrement zu studieren, einerseits die Stäbe zu erzwungenen Longitudinalschwingungen bis zur dritten Harmonischen ange regt, andererseits hat er die Frequenzen durch Änderung der Stablän gen variiert.

Obwohl die Frequenzen, bei denen gemessen wurde, zwischen 930 und 12.800 Hz liegen, kann aus den Ergebnissen von Born nicht die geringste Abhängigkeit des Dekrements von diesen herausgefunden werden. In Tabelle 1 sind die Mittelwerte der Dekremente für jedes untersuchte Gestein zusammengestellt.

Tabelle 1

Gesteinsart	Mittl. log. Dekrement	Gesteinsart	Mittl. log. Dekrement
Sylvan Shale (Schiefer ton) . . . . .	0,043	Amherst Sandstone (Sandstein) . . . .	0,060
Hunton Limestone (Kalkstein) . . . . .	0,049	Cockfield-Yequa For mation . . . . .	0,047

Die Werte der Tabelle 1 sind an getrockneten Gesteinsstäben ge messen worden. Born hat die Versuche an durchfeuchteten Sandsteinstä ben wiederholt. Dabei erhielt er die in fig. 2 wiedergegebenen Resultate. Es zeigt sich jetzt eine Frequenzabhängigkeit. Zu dem konstanten De krement trockener Proben kommt noch eine mit der Frequenz linear ansteigende Komponente hinzu, die allerdings kaum im Bereich der

angewandten Seismik und noch weniger in dem der Erdbebenseismik von praktischer Bedeutung ist. Auf die von Born gegebene Erklärung seiner Messergebnisse wird später eingegangen werden.

Nach der gleichen Methode, mit der die bisher besprochenen Ergebnisse erzielt worden sind, haben auch v. Thyssen und Rülke (1939) Stäbe aus verschiedenen Gesteinen untersucht. Ihre Resultate decken sich mit denen von Birch und Bancroft, sowie mit denen von Born.

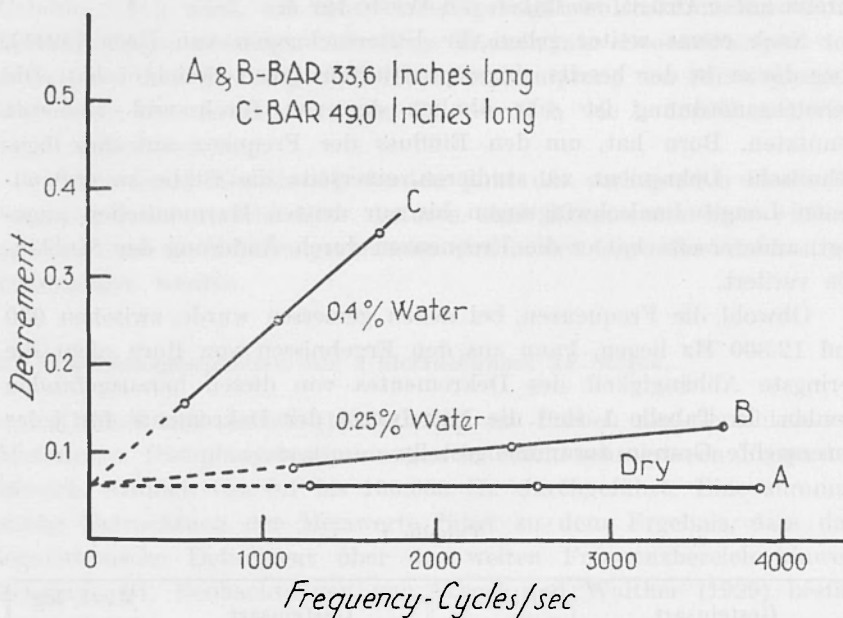


Fig. 2. - Dekrement elastischer Schwingungen für Amherst Sandstein bei verschiedener Durchfeuchtung in Abhängigkeit von der Frequenz. (Nach Born 1941).

Für eine Probe aus Gips wurde bei der Frequenz 12.500 Hz das logarithmische Dekrement zu  $\delta = 0,087$  bestimmt. Bei einem Stab aus Aluminium ergab sich bei der Frequenz 31,850 Hz  $\delta = 0,028$ .

Die obere Grenze des Frequenzbereiches, in welchem die in der Natur auftretenden elastischen Wellen liegen, dürfte etwa bei 100 Hz sein. Alle bisher aufgeführten Beobachtungen wurden bei Frequenzen angestellt, die sämtlich über dieser Grenze, teilweise sogar sehr beträchtlich, liegen. Den Anschluss vermitteln uns die Messungen von Regula (1940). Er regte einseitig eingespannte Stäbe aus verschiedenen Gesteinsarten zu Biege- und Torsionsschwingungen an, und zwar zu freien

wie zu erzwungenen Schwingungen. Die Stäbe waren etwa 20 cm lang und besaßen einen Querschnitt von  $1 \times 1$  cm. Die Eigenfrequenzen, auf die sich seine Messungen stützen, liegen zwischen 20 und 65 Hz. Um zu diesen relativ niedrigen Werten zu kommen, hat er am freien Ende der Stäbe eine Kopflast von 1,556 kg befestigt.

Eine Angabe über die Frequenzabhängigkeit der Dämpfung lässt sich aus den Messungen von Regula nicht ableiten, da jeweils nur bei der Grundschiwingung beobachtet wurde. Für die verschiedenen Gesteine hat er folgende Dekremente erhalten:

Weisser Marmor  $\delta = 0,029$

Grauer Marmor  $\delta = 0,023$

Schiefer  $\delta = 0,019$

Granit  $\delta = 0,03$

Wenn man bedenkt, dass der Dämpfungskoeffizient mit einem grossen Beobachtungsfehler behaftet ist und dass er selbst bei der gleichen Gesteinsart von Probe zu Probe variiert, so darf man aus den Messungen von Regula wohl folgern, dass die oben schon festgestellte Unabhängigkeit der Dämpfung von der Schwingungsart der Gesteinsstäbe und der Frequenz auch noch im Frequenzbereich der angewandten Seismik Gültigkeit hat. Damit ist der Anschluss an die Beobachtungen der Absorption bei elastischen Wellen, auf die nun eingegangen werden soll, hergestellt.

#### b) *Beobachtungsergebnisse von Absorptionsuntersuchungen an elastischen Wellen.*

Wie eingangs schon erwähnt, hat die ersten derartigen Beobachtungen Angenleister (1906) an Oberflächenwellen von Erdbeben angestellt. Dieses Material wurde später weiterhin ergänzt und vervollständigt (s. Gutenberg [1932]). Mintrop (1911) hat als erster die Abnahme der Energie monofrequenter Wellenzüge mit der Entfernung untersucht. Er verfolgte mit transportablen Seismographen die von einer Grossgasmaschine (Kolbenmaschine) angeregten Oberflächenwellen in zwei aufeinander senkrecht stehenden Richtungen. Sehr intensiv wurde die Ausbreitung solcher Wellen in den Jahren 1933-39 von der Deutschen Forschungsgesellschaft für Bodenmechanik (Degebo), Berlin, in Zusammenarbeit mit dem Geophysikalischen Institut der Universität Göttingen studiert. Diese Arbeiten haben ihren Niederschlag in einer Reihe

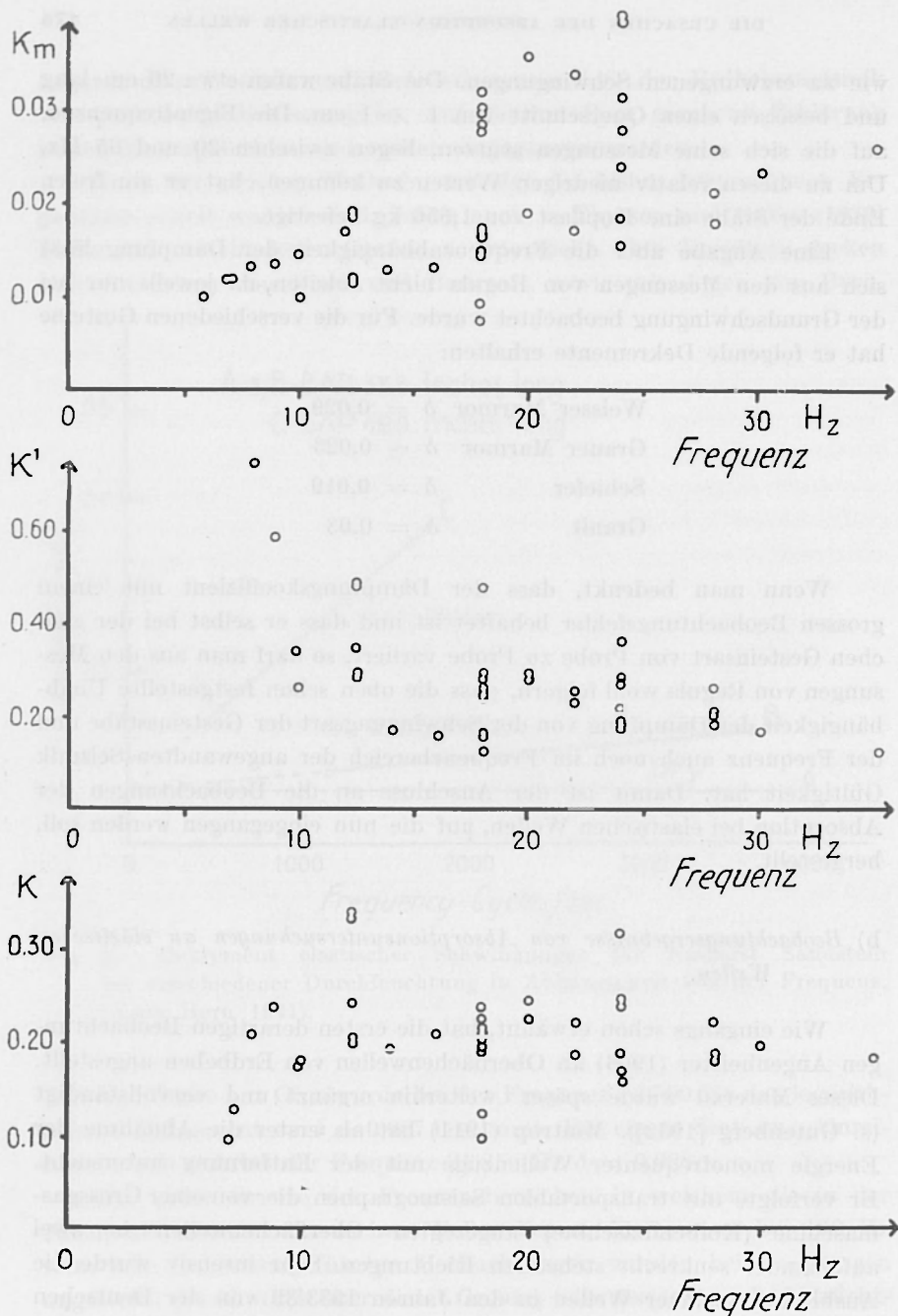


Fig. 3. — Die auf dem Gelände des Göttinger Flugplatzes mittels Maschinenschwingungen ermittelten Absorptionskoeffizienten in Anhängigkeit von der Frequenz. — Oben: Absorptionskoeffizient  $k_m$ , bezogen auf 1 m als Masseinheit. — Mitte: Absorptionskoeffizient  $k'$ , bezogen auf die Phasenwellenlänge als Einheit. (Die Werte für die Frequenzen 6-8 Hz konnten nicht eingetragen werden, da sie zu gross sind). — Unten: Absorptionskoeffizient  $k$ , bezogen auf die Gruppenwellenlänge als Masseinheit. (Man beachte den grösseren Masstab auf der Ordinate!).

von Veröffentlichungen gefunden. Bis zu dieser Zeit hatte man bei Absorptionsmessungen die Koeffizienten entweder auf die Einheit ein Meter oder ein Kilometer bezogen. Es ergaben sich Werte, die über mehrere Zehnerpotenzen hinweg streuten und nicht miteinander irgendwie in Beziehung gebracht werden konnten. Förtsch (1940) erkannte, dass dies erst ermöglicht wird, wenn man die Koeffizienten auf die meist mit der Frequenz sich ändernde Wellenlänge bezieht. Wählt man als Bezugsstrecke die Phasenwellenlänge  $\lambda_0$ , so verschwindet die Frequenzabhängigkeit der Koeffizienten weitgehend. Trotz der grossen Streuung der Messwerte lässt sich doch noch ein gewisser systematischer Gang erkennen (fig. 3 Mitte). Dieser Gang ist erst verschwunden, als Förtsch (1953a) die Beobachtungen auf die Gruppenwellenlänge  $\lambda_c$  umgerechnet hat (fig. 3 unten).

Bei den, der fig. 3 zugrunde liegenden Messungen ist die Umrechnung möglich gewesen, da die vollständige Dispersionskurve für diese Wellen vorliegt. In vielen Fällen ist dies jedoch nicht der Fall. Man muss dann versuchen, eine bestmögliche Näherung zu erhalten. Angesichts der grossen Unsicherheit, mit der sich die Absorptionskoeffizienten bestimmen lassen, ist die Phasenwellenlänge schon als brauchbare Näherung anzusehen. Bei den Beobachtungen an Oberflächenwellen von Erdbeben erhält man aus den Ankunftszeiten der Wellen und den Entfernungen

Tabelle 2

Periode	Grup. Geschwindig- keit km/s	Absorptionskoeffizient	
		$\alpha$ (km)	$k$ ( $\lambda_c$ )
20	3,6	0,00038	0,027
20	3,7	0,00021	0,016
25	3,4	0,00039	0,033
30	3,4	0,00039	0,040
17	3,0	0,00026	0,013
20	3,4	0,00034	0,023
20	3,37	0,00037	0,025
18	4,6	0,00028	0,023
20	3,4	0,00018	0,012
		Mittel: 0,00031	0,023

unmittelbar die Gruppengeschwindigkeit und damit auch die Gruppenwellenlänge.

In Tabelle 2 sind die Messdaten von Angenheister (1906) und der daraus abgeleitete Absorptionskoeffizient  $k$  wiedergegeben. Der Absorptionskoeffizient, der sich auf 1 km als Basis bezieht, ist mit  $\alpha$  bezeichnet. Zum besseren Verständnis sind hinter den Koeffizienten jeweils die Bezugsstrecken in Klammern beigefügt.

Die von anderen Beobachtern ermittelten  $k$ -Werte liegen im gleichen Bereich. Vergleicht man die  $k$ -Werte mit den Dämpfungskoeffizienten, wie sie von Birch und Bancroft, sowie von Regula an kompakten Gesteinen gemessen worden sind, so findet man eine sehr gute Übereinstimmung. Die Sedimentgesteine, die Born untersucht hat, weisen bereits eine stärkere Absorption bzw. Dämpfung auf. Je jünger und lockerer die Sedimente werden, desto stärker werden von ihnen elastische Wellen absorbiert. Dies zeigen deutlich die Zahlen der Tabelle 3, die alle, dem Verfasser bekannten Absorptionskoeffizienten enthält. Die  $k$ -Werte wurden von ihm aus den in den zitierten Arbeiten angegebenen Daten berechnet.

Tabelle 3

Untergrund	Frequenzbereich $H_z$	Absorptionskoeffizient $k$ ( $\lambda_c$ )	Beobachter
Lehm, Kies . . .	2,5 5,0	0,105	MINTROP (1911)
Sand, Lehm . . .	10 25	0,42	ANGENHEISTER u. SCHNEIDER (1928)
Liaston . . . . .	22-40	0,35	Degebo
Sand, Lösslehm. .	10 15	0,62	Degebo
Feinsand, Ton . .	6-35	0,211	Degebo (s. fig. 3)

Die Absorptionskoeffizienten  $k$  sind streng nur im letzten Fall auf die Gruppenwellenlänge bezogen. In den anderen Fällen ist dies nur näherungsweise möglich gewesen. Die zuletzt aufgeführten Untersuchungen sind der Zusammenarbeit der Deutschen Forschungsgesellschaft für Bodenmechanik mit dem Geophysikalischen Institut der Universität Göttingen zu verdanken.

Die niedrigen Frequenzen der Beobachtungen von Mintrop deuten darauf hin, dass die Wellen tiefer in den Untergrund hinabreichen und

bereits festere Schichten mit erfassen. Bei einer Ausbreitungsgeschwindigkeit von 250 m/s wird die Wellenlänge schon 50 m bzw. 100 m gross. Der Wert  $k$  ist auf diese Geschwindigkeit bezogen. Nach Schulze (1935) ist dieser Wert eher zu niedrig als zu hoch. Mit zunehmender Geschwindigkeit steigt auch  $k$  linear an.

Aus den Dämpfungskoeffizienten, die Born gemessen hat, und den Absorptionskoeffizienten der Tabelle 3 ist ersichtlich, dass Sedimentgesteine eine stärkere Absorption als Tiefengesteine aufweisen und dass innerhalb der Sedimente die Absorptionskoeffizienten sehr stark von der Verfestigung derselben abhängen. Die Werte variieren mehr als eine Zehnerpotenz.

Zusammenfassend ergeben sich aus den oben wiedergegebenen Untersuchungen folgende Beobachtungstatsachen, denen die Theorien zur Erklärung der Absorption gerecht werden müssen:

1. Durch den Absorptionsvorgang wird die Ausbreitungsgeschwindigkeit der Wellen nicht beeinflusst.

2. Bei einem sinusförmigen, stationären Wellenzug nimmt die Amplitude mit zunehmender Entfernung nach einer Exponentialfunktion ab. Misst man die Entfernung in Einheiten der Gruppenwellenlänge, so ergibt sich aus den Beobachtungen ein Absorptionskoeffizient, der von der Frequenz unabhängig ist. Weiterhin ist dieser Koeffizient auch unabhängig von der Natur der elastischen Wellen. Für Longitudinal-, Transversal- und Oberflächenwellen wird stets für das gleiche Material derselbe Wert beobachtet. Er erweist sich nur abhängig vom Medium, durch das Wellen laufen, und stellt somit eine Konstante für die verschiedenen Gesteine dar.

Das heute vorliegende, umfangreiche Beobachtungsmaterial, zu welchem unabhängig voneinander eine Reihe von Autoren beigetragen haben, spricht einhellig für diese Feststellungen. Dem Verfasser ist keine Beobachtung bekannt, die sich nicht in dieses Bild einfügt.

II. *Elastische Nachwirkung.* — Die Theorie der elastischen Nachwirkung gründet sich auf folgende, allgemein bekannte Beobachtung: Greift an einem festen Körper plötzlich eine weiterhin konstant bleibende Kraft an, so erfährt er eine plotzliche Deformation, wie es bei einem ideal elastischen Körper der Fall sein muss. Beobachtet man jedoch weiter, so stellt man fest, dass im Gegensatz zum ideal elastischen Verhalten die Deformation weiterhin fortschreitet, anfangs rascher, später langsamer. Sie nähert sich einem Endwert. Das Nachhinken der Deformation gegenüber den von aussen angreifenden Kräften nennt man

elastische Nachwirkung. Bei dem erwähnten Versuch kann man das Nachhinken in erster Näherung durch eine Exponentialfunktion beschreiben. Wiechert hat aber schon gefunden, dass zu einer genauen Darstellung des Vorganges eine mathematische Reihe solcher Funktionen notwendig ist. Man ersieht daraus, dass die physikalischen Kräfte, die diese Erscheinung im Zusammenspiel mit den elastischen Spannungen im Körper verursachen, nicht von einfacher Natur sein können. Der Verfasser ist mit Menzel (1954 a) derselben Meinung, dass es angebracht erscheint, den mathematischen Abhandlungen, die sich im Ansatz schon auf eine vereinfachte Beschreibung der Nachwirkungserscheinung beschränken, eine gewisse Zurückhaltung entgegen zu bringen. Der erweiterte Ansatz der Nachwirkung im Sinne Wiecherts schliesst jedoch gewisse mathematische Schwierigkeiten in sich, an deren Ueberwindung sich bis heute noch niemand herangewagt hat.

Ueberlegt man sich, welchen Einfluss die elastische Nachwirkung auf den Ablauf elastischer Schwingungen und Wellen haben kann, so kann man unmittelbar feststellen, dass für rasch durchlaufene Zyklen die Beeinflussung geringer sein muss als für langsam durchlaufene. Sokoloff und Skriabin (1937) und Menzel (1954a) haben die Einwirkung berechnet. In beiden Arbeiten wird aber von etwas veränderten Voraussetzungen ausgegangen. Es darf daher nicht überraschen, wenn die Resultate etwas verschieden ausfallen. Sokoloff und Skriabin haben dankenswerterweise auch noch umfangreiche Messungen an Gesteinsproben zur Bestimmung der die Nachwirkung charakterisierenden Konstanten angestellt. Es ist so die Möglichkeit gegeben, die nach der Theorie der elastischen Nachwirkung zu erwartenden Absorptionskoeffizienten für elastische Wellen mit den beobachteten zu vergleichen.

Nach dem Ansatz von Sokoloff und Skriabin sind zur Beschreibung zwei Konstanten nötig, welche die beiden Autoren mit  $\beta$  und  $\lambda$  bezeichnen. Für den oben beschriebenen Versuch bedeutet das Verhältnis  $\beta/\lambda$  den Maximalbetrag der von der elastischen Nachwirkung herrührenden Deformation. Der Wert  $1/\lambda$  stellt die Relaxationszeit dar. Diese Werte müssten nach den theoretischen Voraussetzungen Konstante und nur von der Beschaffenheit des Materials, nicht aber von der Art der elastischen Beanspruchung desselben, abhängig sein.

Wie schon erwähnt, haben Sokoloff und Skriabin die beiden Konstanten an Gesteinsproben sowohl durch Biegungs-, wie auch durch Torsionsbeanspruchung, ermittelt. Es würde hier zu weit führen, auf die Bestimmungsmethode der beiden Werte einzugehen. Die Versuche ergaben für beide Beanspruchungsarten etwas verschiedene Zahlen-

werte. Die beiden Autoren erklären die Differenzen der Beobachtungsergebnisse mit dem Hinweis, der auch weiter oben schon angeführt worden ist, dass die elastische Nachwirkung durch kompliziertere Funktionen beschrieben werden müsste, als es geschehen ist.

Sokoloff und Skriabin haben ihre Berechnungen sinngemäss auch auf Wechselbeanspruchungen des Gesteins, auf elastische Wellen, übertragen und den Einfluss auf den Ausbreitungsvorgang der letzteren berechnet. Da eine strenge Lösung nicht herbeigeführt werden kann, haben sie die Formeln für den Absorptionskoeffizienten und für die Ausbreitungsgeschwindigkeit nur in erster Näherung angegeben. Den Absorptionskoeffizienten haben sie, wie es auch zweckmässig ist, auf die Wellenlänge als Masseinheit bezogen. Für Longitudinalwellen lauten die Beziehungen:

$$v_1 = a / \sqrt{1 + \frac{\beta\lambda}{\lambda^2 + \omega^2}} \quad ; \quad k = \pi\beta \frac{\omega}{\lambda^2 + \omega^2} / \left(1 + \frac{\beta\lambda}{\lambda^2 + \omega^2}\right).$$

- ( $v_1$  = Longitudinalgeschwindigkeit im Medium mit Nachwirkung,  
 $a$  = Longitudinalgeschwindigkeit im rein elastischen Medium,  
 $k$  = Absorptionskoeffizient,  $\omega$  = Kreisfrequenz).

Für Transversalwellen gelten die gleichen Ausdrücke, nur ist für die Longitudinalgeschwindigkeit der entsprechende Wert der Transversalwelle einzusetzen.

Aus den von Sokoloff und Skriabin durchgeführten, umfangreichen Bestimmungen der Nachwirkungskonstanten sollen nur einige Beispiele

Tabelle 4

Gesteinsart	$\lambda \cdot 10^2$	$\beta \cdot 10^2$	$\lambda' \cdot 10^2$	$\beta' \cdot 10^2$
Fester, grob gebankter Sandstein . . .	4,9	1,4	6,2	2,6
Fester, ungebankter Sandstein . . . .	8,0	18,0	6,0	13,0
Ungeschichteter, mergeliger Ton . . .	4,3	2,6	9,3	3,4
Marmor . . . . .	4,5	1,3	8,3	4,0
Kalk . . . . .	5,6	1,2	3,3	0,8
Gips . . . . .	4,9	2,6	3,3	2,2
Granit . . . . .	6,6	0,2	5,0	0,2
Diabas . . . . .	3,9	0,3	2,9	0,8

herausgegriffen werden. Die beiden Autoren geben die aus Biegungs- und die aus Torsionsmessungen ermittelten Werte getrennt an. Die ersteren bezeichnen sie mit  $\beta, \lambda$ , die letzteren mit  $\beta', \lambda'$ . In Tabelle 4 sind die ausgesuchten Werte zusammengestellt.

Den Spalten der Tabelle kann man entnehmen, dass im allgemeinen die  $\lambda$ - und  $\lambda'$ -Werte für alle Gesteinsarten in derselben Grössenordnung liegen. Dies bedeutet, dass der Vorgang der Nachwirkung bei allen Gesteinen annähernd gleich lange dauert. Bei den Werten  $\beta$  und  $\beta'$ , durch die der Betrag der Nachwirkungsdeformation in erster Linie bestimmt wird, scheint es so zu sein, dass die Werte für die Tiefengesteine etwa eine Zehnerpotenz kleiner sind als diejenigen für Sedimentgesteine.

Aus den Zahlen der Tabelle 4 wurden zwei Wertepaare von  $\lambda$  und  $\beta$  ausgesucht, die für Tiefen- bzw. Sedimentgesteine Mittelwerte darstellen dürften. Es sind dies:

$$\begin{aligned} \lambda &= 5 \cdot 10^{-2} \text{ s}^{-1} & \beta &= 0,25 \cdot 10^{-2} \text{ s}^{-1} \text{ bzw.} \\ \lambda &= 5 \cdot 10^{-2} \text{ s}^{-1}, & \beta &= 2 \cdot 10^{-2} \text{ s}^{-1} \end{aligned}$$

Für diese Wertepaare wurde mittels der obigen Formeln die Ausbreitungsgeschwindigkeit und der Absorptionskoeffizient für Longitudinalwellen in Abhängigkeit von der Periode der Wellenbewegung berechnet. Da sich die von Erdbeben erzeugten elastischen Wellen hauptsächlich in Tiefengesteinen ausbreiten, wurde für das erste Wertepaar die Abhängigkeit bis zur Periode 60 s berechnet. Für das zweite Wertepaar braucht die Skala nur bis 5 s ausgedehnt werden, da in den Sedimenten vorwiegend die höherfrequenten Wellen der angewandten Seismik erzeugt werden und sich auch darin fortpflanzen.

Fig. 4 veranschaulicht das Ergebnis der Rechnung. Auf der Abszisse ist die Periode  $T$ , auf der linken Ordinate der Absorptionskoeffizient  $k$  im dimensionslosen Mass, d. h. er ist, wie oben ausgeführt wurde, auf die Wellenlänge als Masseinheit bezogen, und auf der rechten Ordinate ist die Ausbreitungsgeschwindigkeit  $v$ , in Einheiten von  $a$  aufgetragen.

Aus der Figur ist zu ersehen, dass die elastische Nachwirkung, so wie sie von Sokoloff und Skriabin in Ansatz gebracht worden ist, auf die Ausbreitungsgeschwindigkeit praktisch keinen Einfluss ausübt. Das ist auch schon rein anschaulich zu vermuten, denn die Relaxationszeit der Nachwirkung liegt in der Grössenordnung von einer Minute, während die Schwingungsvorgänge in der Seismik, vor allem in der angewandten Seismik, viel rascher ablaufen. Höchstens bei den langen

Perioden der Oberflächenwellen von Fernbeben könnte andeutungsweise ein Effekt zu spüren sein. In dieser Hinsicht wird die Theorie von Sokoloff und Skriabin den Beobachtungen gerecht.

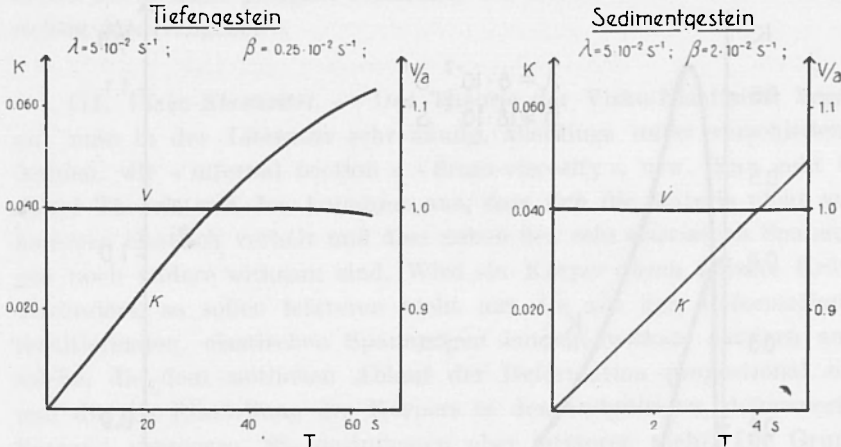


Fig. 4. - Einfluss der elastischen Nachwirkung auf die Ausbreitungsgeschwindigkeit und die Absorption elastischer Wellen, wie er sich aus dem Ansatz von Sokoloff und Skriabin (1938) ergibt. Links sind die Verhältnisse dargestellt, wie sie für Tiefengesteine zu erwarten sind. Rechts sind die Verhältnisse dargestellt, wie sie für sedimentgesteine zu erwarten sind.

Abszisse: Periode  $T$  der Wellenbewegung.

Linke Ordinate: Absorptionskoeffizient  $k$ , bezogen auf eine Wellenlänge.

Rechte Ordinate: Ausbreitungsgeschwindigkeit  $v$  einer Longitudinalwelle in Einheiten der Longitudinalgeschwindigkeit  $a$  im rein elastischen Medium.

Für den Absorptionskoeffizienten  $k$  lässt sich jedoch keine Übereinstimmung feststellen. Er steigt nach der Theorie mit zunehmender Periode an, während die Beobachtungen einen frequenzunabhängigen Wert fordern. Im Periodenbereich der künstlich erzeugten Erschütterungen sind die berechneten Absorptionskoeffizienten zu klein gegenüber den beobachteten Werten, während bei den langen Perioden der Oberflächenwellen der Fernbeben das Verhältnis gerade umgekehrt ist. Die Diskrepanz zwischen der Theorie und den Beobachtungen lässt darauf schließen, dass die Absorption zumindest nicht in merklichem Masse durch elastische Nachwirkung im Sinne von Sokoloff und Skriabin hervorgerufen wird. Deshalb kommt dieser bei der Ausbreitung elastischer Wellen, wenn überhaupt, nur eine sehr untergeordnete Bedeutung zu.

Wie oben schon erwähnt, hat auch Menzel (1954a) von einem etwas modifizierten Ansatz ausgehend den Einfluss der Nachwirkung auf die Wellenausbreitung berechnet. Für die von Sokoloff und Skriabin (1937)

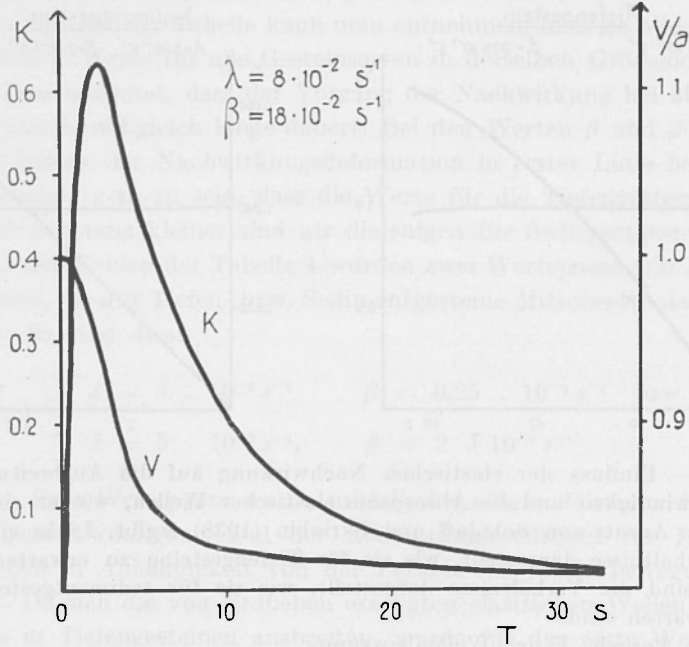


Fig. 5. – Einfluss der elastischen Nachwirkung auf die Ausbreitungsgeschwindigkeit und die Absorption elastischer Wellen, wie er sich aus dem Ansatz von Menzel (1954 a) ergibt. Die Kurven gelten für Longitudinalwellen in trockenem Sandstein. Die Darstellungsweise ist dieselbe wie in Fig. 4.

für trockenen Sandstein bestimmten Grössen hat Menzel auch die Geschwindigkeit und die Absorption in Abhängigkeit von der Periode berechnet. Um einen Vergleich dieser Werte mit den Ergebnissen von Sokoloff und Skriabin unmittelbar zu ermöglichen, sind die von Menzel in den Figuren 4 und 5 seiner Arbeit wiedergegebenen Darstellungen entsprechend umgezeichnet in fig. 5 eingezeichnet worden.

Die Figur zeigt, dass sich die Ergebnisse von Menzel noch weniger den Beobachtungen anpassen, als diejenigen von Sokoloff und Skriabin. Der Verlauf der Funktion des Absorptionskoeffizienten, wie auch sein absoluter Betrag, sind mit den Beobachtungen nicht in Einklang zu bringen. Zu dieser Feststellung ist auch Menzel gekommen. Er schliesst

ein Autorenreferat (1954 b) mit dem Satz: « Nach Ansicht des Verf. wird dieses Verhalten durch die Untersuchungen an seismischen Wellen nicht bestätigt, so dass also die Theorie der elastischen Nachwirkung in dieser Form nicht geeignet erscheint, das Verhalten elastischer Wellen richtig wiederzugeben ».

III. *Visko-Elastizität*. — Der Theorie der Visko-Elastizität begegnet man in der Literatur sehr häufig, allerdings unter verschiedenen Namen, wie « internal friction », « firmo-viscosity », usw. Man geht bei dieser Theorie von der Annahme aus, dass sich die Materie nicht vollkommen elastisch verhält und dass neben den rein elastischen Spannungen noch andere wirksam sind. Wird ein Körper durch äussere Kräfte deformiert, so sollen letzteren nicht nur die aus den Deformationen resultierenden, elastischen Spannungen entgegenwirken, sondern auch solche, die dem zeitlichen Ablauf der Deformation proportional sind und die die Einstellung des Körpers in den endgültigen, deformierten Zustand verzögern. Sie beeinflussen aber letzteren nicht. Die Grundgleichung der klassischen Elastizitätstheorie, von der man in der Seismologie allgemein ausgeht, ist durch neue Glieder zu erweitern. Sie lautet nun:

$$\rho \frac{\partial^2 s}{\partial t^2} = (\lambda + 2\mu) \text{grad div } s - \text{rot rot } s \\ + \frac{\lambda'}{\partial t} [(\lambda' + 2\mu') \text{grad div } s - \mu' \text{rot rot } s] .$$

Es bedeuten:  $\rho$  = Dichte,  $s$  = Vektor der elastischen Verschiebungen,  $t$  = Zeit,  $\lambda, \mu$ , = Lamésche Konstanten,  $\lambda', \mu'$ , = viskoelastische Konstanten.

Daraus ergeben sich die Differentialgleichungen für die Longitudinal- und Transversalwelle:

$$\frac{\partial^2 \theta}{\partial t^2} = \frac{\lambda + 2\mu}{\rho} \nabla^2 \theta + \frac{\lambda' + 2\mu'}{\rho} \frac{\partial}{\partial t} \nabla^2 \theta . \\ \frac{\partial^2 \text{rot } s}{\partial t^2} = \frac{\mu}{\rho} \nabla^2 \text{rot } s + \frac{\mu'}{\rho} \frac{\partial}{\partial t} \nabla^2 \text{rot } s .$$

Wir wollen die weiteren Betrachtungen nur für die Transversalwelle anstellen. Für die Longitudinalwelle gelten die entsprechenden.

Wir gehen in Anlehnung an Hardtwig (1943) von dem üblichen Ansatz einer parallel zur  $x$ - Achse fortschreitenden, ebenen Welle aus:

$$\text{rot } s = B e^{(\bar{m}x - \bar{p}t)},$$

wobei die Grösse  $\bar{p}$  und  $\bar{m}$  als komplexe Zahlen aufgefasst werden.

$$\bar{p} = \varepsilon + i p \quad ; \quad \bar{m} = -\alpha + i m .$$

Mit diesem Ansatz ergibt sich aus der obigen Differentialgleichung folgende Bestimmungsgleichung für die Unbekannten:

$$\bar{p}^2 = \bar{m}^2 \left( \frac{\mu}{\rho} - \frac{\mu'}{\rho} \frac{\bar{p}}{\bar{m}} \right) \quad \text{oder} \quad \bar{p}^2 + \frac{\mu'}{\rho} \frac{\bar{p} \bar{m}^2}{\bar{m}} - \frac{\mu}{\rho} \bar{m}^2 = 0 .$$

Die Trennung der reellen und imaginären Glieder liefert:

$$p^2 - 2 \frac{\mu'}{\rho} \alpha m p + \left( \frac{\mu}{\rho} - \frac{\mu'}{\rho} \varepsilon \right) (\alpha^2 - m^2) - \varepsilon^2 = 0 .$$

$$2 p \varepsilon + \frac{\mu'}{\rho} p (\alpha^2 - m^2) + 2 \alpha m \left( \frac{\mu}{\rho} - \frac{\mu'}{\rho} \varepsilon \right) = 0 .$$

Dies sind zwei Gleichungen zur Bestimmung der drei Unbekannten: Transversalgeschwindigkeit  $b = p/m$ , (zeitlicher) Extinktionskoeffizient  $\varepsilon$  und (räumlicher) Absorptionskoeffizient  $\alpha$ . Eine der drei Grossen bleibt also unbestimmt. Ueber sie muss durch eine weitere physikalische Aussage verfügt werden. HARDTWIG (1943) hat, um zu einer Lösung zu kommen, die erste der beiden Gleichungen nach  $p$  aufgelöst:

$$p = \frac{\mu'}{\rho} \alpha m \pm \sqrt{\frac{\mu'}{\rho} \alpha^2 m^2 - \left( \frac{\mu}{\rho} - \varepsilon \frac{\mu'}{\rho} \right) (\alpha^2 - m^2) + \varepsilon^2} .$$

Es ergeben sich zwei verschiedene Werte für  $p$ . Da aber  $b$  dem Absolutbetrag nach einwertig sein muss, glaubt HARDTWIG den Beweis erbracht zu haben, dass  $\alpha = 0$  ist, dass also bei der Ausbreitung elastischer Wellen in einem visko-elastischen Medium nur Extinktion, aber keine Absorption, auftritt.

Gegen diese mathematische Behandlung des Problems sind schwerste Bedenken zu erheben. Die getroffene Entscheidung über die Grösse

$\alpha$ , die nur einer der beiden Gleichungen entspringt, ist nicht gerechtfertigt. Berechnet man nämlich aus der zweiten Bedingungsgleichung  $2 \alpha m$  und setzt den erhaltenen Wert in die erste Gleichung ein, so ergibt sich für  $p$  ein unter einer Wurzel stehender Ausdruck, ohne dass  $\alpha$  oder  $\varepsilon$  irgendwelche Beschränkungen auferlegt werden müssen, was in Widerspruch zum Ergebnis von HARDTWIG steht.

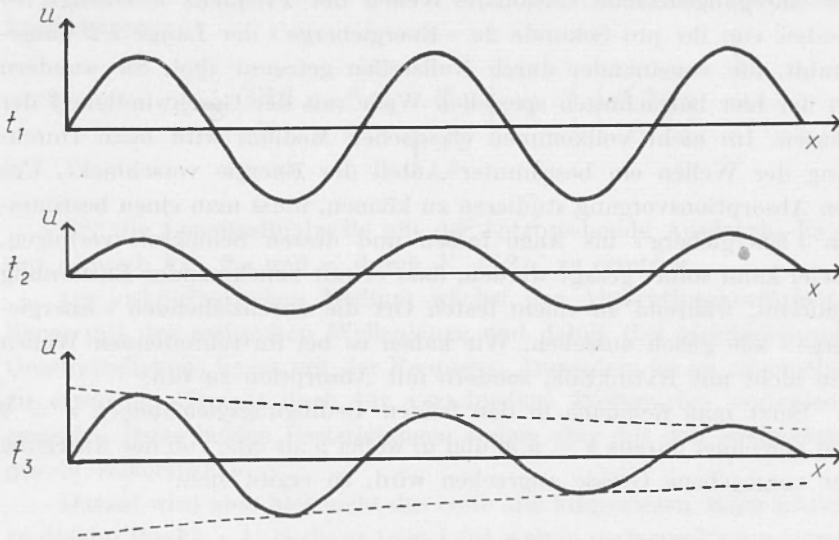


Fig. 6. – Darstellung von Momentbildern von Wellen, die durch die Gleichung

$$u = U e^{-\varepsilon t} e^{i(mx-pt)}$$

für die Zeiten  $t_1$  (oben) und  $t_2$  (mitte) und durch die Gleichung

$$u = U e^{-\alpha x} e^{i(mx-pt)}$$

für die Zeit  $t_1$  (unten) beschrieben werden.

Es ist daher auch nicht verwunderlich, dass die von Hardtwig angegebene Lösung physikahsch unsinnig ist. In fig. 6 ist der durch den Ausdruck

$$u = U e^{-\varepsilon t} \cdot e^{i(mx-pt)}$$

beschriebene Wellenzug für zwei verschiedene Zeiten  $t_1$  und  $t_2$  dargestellt. Es sind zwei längs des Weges  $x$  sich ausbreitende, ungedämpfte Sinuswellen. Die Maximalamplitude nimmt mit wachsendem  $t$  exponentiell ab. Jedermann weiss aber, dass bei konstanten Anregungsbedingungen ein Wellenzug beobachtet wird, dessen Maximalamplitude mit wachsender

Entfernung  $x$  abnimmt (Angenheister [1906], Mintrop [1911]). Am gleichen Ort bleibt sie jedoch zeitlich konstant. Ein Momentbild eines solchen Wellenzuges ist in fig. 6 unten wiedergegeben.

Man sieht also, dass in dem allgemeinen Ansatz von Hardtwig nicht  $\alpha = 0$  gesetzt werden darf, sondern  $\varepsilon = 0$ . Dies ergibt sich auch aus dem physikalischen Vorgang der Wellenausbreitung. Werden von der Anregungsursache stationäre Wellen der Frequenz  $n$  erzeugt, so werden von ihr pro Sekunde  $2n$  «Energieberge» der Länge  $\lambda/2$  ausgestrahlt, die voneinander durch Nullstellen getrennt sind. Sie wandern bei der hier betrachteten speziellen Welle mit der Geschwindigkeit der Phasen. Im nicht vollkommen elastischen Medium wird beim Durchgang der Wellen ein bestimmter Anteil der Energie verschluckt. Um den Absorptionsvorgang studieren zu können, muss man einen bestimmten «Energieberg» ins Auge fassen und dessen Schicksal verfolgen. Soviel kann sofort gesagt werden, dass er mit zunehmender Entfernung abnimmt, während an einem festen Ort die durchziehenden «Energieberge» alle gleich aussehen. Wir haben es bei fortschreitenden Wellen also nicht mit Extinktion, sondern mit Absorption zu tun.

Setzt man demnach in den beiden Bedingungsgleichungen  $\varepsilon = 0$  und berechnet daraus  $b = p/m$  und  $a$ , wobei  $p$  als eine von der Anregung her vorgegebene Grösse angesehen wird, so ergibt sich:

$$b = \sqrt{\frac{2 \left[ \left( \frac{\mu}{\varrho} \right)^2 + \left( \frac{\mu' p}{\varrho} \right)^2 \right]}{\frac{\mu}{\varrho} + \sqrt{\left( \frac{\mu}{\varrho} \right)^2 - \left( \frac{\mu' p}{\varrho} \right)^2}}}$$

$$a = \sqrt{\frac{p^2 \left[ -\frac{\mu}{\varrho} + \sqrt{\left( \frac{\mu}{\varrho} \right)^2 + \left( \frac{\mu' p}{\varrho} \right)^2} \right]}{2 \left[ \left( \frac{\mu}{\varrho} \right)^2 + \left( \frac{\mu' p}{\varrho} \right)^2 \right]}}$$

Da  $\mu' p : \mu$  klein gegen 1 angenommen werden muss, so wird näherungsweise:

$$b \cong \sqrt{\frac{\mu}{\varrho} \left[ 1 + \frac{3}{4} \left( \frac{\mu' p}{\mu} \right)^2 \right]} \quad a \cong \frac{\mu'}{2\varrho} \frac{m^2}{\sqrt{\frac{\mu}{\varrho}}} \left( 1 + \frac{1}{4} \left( \frac{\mu' p}{\mu} \right)^2 \right)$$

Der Koeffizient  $\alpha$  hat die Dimension  $\text{cm}^{-1}$ . Er bezieht sich also auf eine metrische Einheit. Wir haben oben jedoch gesehen, dass es zweckmässig ist, den Absorptionskoeffizienten auf die Wellenlänge zu beziehen. In der hier verwendeten Schreibweise ist sie gegeben durch:  $\lambda = 2\pi/m$ . Da wir von Dispersion bei diesen Ueberlegungen absehen wollen, brauchen wir nicht zwischen Phasen- und Gruppenwellenlänge zu unterscheiden. Nach der visko-elastischen Theorie lautet der Ausdruck für den Absorptionskoeffizienten:

$$k = \frac{2\pi\alpha}{m} = \frac{\mu'}{\rho} \pi \frac{m}{\sqrt{\frac{\mu}{\rho}}} \left( 1 + \frac{1}{4} \left( \frac{\mu' p}{\mu} \right)^2 \right).$$

Für die Longitudinalwelle gilt der entsprechende Ausdruck. Es ist nur  $\mu$  durch  $\lambda + 2\mu$  und  $\mu'$  durch  $\lambda' + 2\mu'$  zu ersetzen.

Im visko-elastischen Medium wächst der Absorptionskoeffizient  $k$  linear mit der reziproken Wellenlänge und damit (bei gleichbleibender Geschwindigkeit) linear mit der Frequenz. Ausserdem ist im allgemeinen zu erwarten, dass er auch für verschiedene Wellenarten verschieden gross ist. Diese beiden Feststellungen stehen aber mit den Beobachtungen in Widerspruch.

Darauf wird aber hier nicht das erste Mal hingewiesen. Born schreibt zu diesem Punkt: « As early as 1890 Lord Kelvin performed some experiments on the torsional vibration of steel rods and showed that the results obtained were not in accord with a viscous-elastic theory. His results were later confirmed by other investigators, particularly by Kimball und Lovell (1927). By experiment, it has been found that the losses in a number of solid materials are not viscous losses but are of entirely different type which is commonly called solid friction ».

Birch und Bancroft weisen besonders auf eine andere Schwierigkeit hin, die der Theorie der visko-elastischen Medien begegnet. Sie schreiben: « The various theories of dispersion due to internal friction may be reduced, at least for the case of periodic motion, to different hypotheses relating to the variation of the function  $Q$  with the frequency. Thus, if the internal friction of solids followed a viscous law such as applied to slow fluid motion, with a constant 'viscosity', we should find  $Q$  inversely proportional to the frequency, and at some frequency free vibration would become impossible on account of excessive damping. This has been pointed out by a number of writers; Suyehiro (1929), for example, has shown that on the hypothesis of solid viscosity, using Honda's (1921)

value for the viscosity of steel, lateral vibrations of steel strips would be overdamped at frequencies as low as 500 cycles per second. In spite of this *reductio ad absurdum*, the notion of solid viscosity apparently continues to enjoy a certain vogue, presumably on account of its mathematical tractability». Daran hat sich bis heute noch nichts geändert. In den meisten Arbeiten der Anhänger der Theorie der visko-elastischen Medien wird der Eindruck erweckt, als ob noch keine ausreichenden Beobachtungen angestellt worden waren (wie z. B. Hardtwig, 1954). Dort aber, wo man einen Vergleich mit den Ergebnissen der Experimente nicht scheut, greift man zu der Annahme, dass die Viskositätskoeffizienten eine lineare Abhängigkeit von der Frequenz besitzen. Man verschweigt aber, dass damit die Voraussetzungen der Theorie durchbrochen sind und die mathematische Behandlung des Problems nicht mehr gültig ist.

Es wäre missig, hier Kritik zu üben, wenn nicht eine andere Theorie zur Hand wäre, die die über den weiten Frequenzbereich von mehr als fünf Zehnerpotenzen reichenden Beobachtungsergebnisse zwanglos erklären könnte. Diese Theorie wird im übernächsten Abschnitt dargelegt.

IV. *Theorie der geschwindigkeitsproportionalen Reibungskraft.* — Diese Theorie sei hier der Vollständigkeit halber kurz erwähnt. Sie geht von der Annahme aus, dass bei den elastischen Bewegungen der Elementarteilchen in einem Medium Reibungskräfte auftreten, die proportional der Geschwindigkeit der Teilchen sind. Die Differentialgleichung für eine Transversalwelle beispielsweise lautet hier:

$$\rho \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} + \alpha v \frac{\partial w}{\partial t} = \mu \nabla^2 w .$$

Mit dem üblichen Ansatz  $w = We^{i(pt - mx)}$  ergibt sich folgende Bestimmungsgleichung für die Ausbreitungsgeschwindigkeit und den Absorptionskoeffizienten:

$$\bar{m}^2 = \frac{\rho}{\mu} p^2 - i \frac{2v\rho}{\mu} .$$

Wie im vorstehenden Abschnitt schon näher begründet wurde, ist es den Verhältnissen in der Natur weniger angepasst, diese Gleichung nach der Kreisfrequenz  $p$  aufzulösen, wie es Hardtwig (1954) getan hat, sondern nach der Wellenzahl  $\bar{m}$ . Die Frequenz wird vom Erreger der Wellen vorgeschrieben, während die Wellenzahl und Wellenlänge sich daraus

und aus der Ausbreitungsgeschwindigkeit ergeben. Wir setzen  $\mu/\rho = b^2$  (= Quadrat der Transversalgeschwindigkeit im reibungsfreien Medium)

$$\bar{m} = \sqrt{\frac{p^2}{2b^2} \left( \sqrt{1 + \frac{4v^2}{\rho^2 p^2}} + 1 \right)} - i \sqrt{\frac{p^2}{2b^2} \left( \sqrt{1 + \frac{4v^2}{\rho^2 p^2}} - 1 \right)}.$$

Da  $4v^2/\rho^2 p^2$  klein gegen 1 anzunehmen ist, ergibt sich näherungsweise:

$$\bar{m} \cong \frac{p}{b} \left( 1 + \frac{v^2}{2\rho^2 p^2} \right) - i \frac{v}{\rho b} = m - ia.$$

Damit erhält man die Ausbreitungsgeschwindigkeit  $v$  und den Absorptionskoeffizienten  $k$  (bezogen auf die Wellenlänge) zu:

$$v = \frac{p}{m} \cong b \left( 1 - \frac{v^2}{2\rho^2 p^2} \right),$$

$$k = a\lambda = a \frac{2\pi}{m} \cong \frac{2v\pi}{\rho p} \left( 1 - \frac{v^2}{2\rho^2 p^2} \right).$$

Der Absorptionskoeffizient  $k$  musste im oben definierten Medium mit zunehmender Frequenz abnehmen, was mit den Beobachtungen nicht im Einklang steht. Diese Theorie ist also auch zu verwerfen.

V. *Theorie der Coulombschen Reibung.* — Wie in dem Zitat aus der Veröffentlichung von Born im vorstehenden Abschnitt III schon angedeutet ist, ist diese Theorie keineswegs neu. Ihre Anfänge sind wohl in dieser Arbeit zu suchen. Birch und Bancroft waren noch der Meinung, dass sich die Absorption elastischer Wellen nicht auf eine Ursache allein zurückführen liesse, sondern durch mehrere, die sich dann allerdings so überlagern müssten, dass sie den Beobachtungen gerecht werden. Es ist natürlich wenig befriedigend, die einfache Gesetzmässigkeit der Absorptionskoeffizienten, nämlich ihre Konstanz gegenüber der Frequenz, durch eine Mehrzahl von Ursachen erklären zu müssen. Dies dürfte wohl Born veranlasst haben, nach weiteren Erklärungen zu suchen. Da schon sehr viele der physikalisch möglichen Effekte untersucht worden waren, blieb, abgesehen von der Coulombschen Reibung, kaum mehr eine andere Deutungsmöglichkeit übrig.

Es ist allgemein bekannt, dass beim Verschieben zweier aufeinanderliegender, fester Körper an der Gleitfläche Coulombsche Reibungs-

kräfte auftreten, die die Bewegung bremsen. Dies ist z.B. der Fall, wenn man einen Granitblock auseinandersägt, die beiden Teile längs der Schnittfläche aufeinanderlegt und gegeneinander verschiebt. Beim Zersägen sind längs der Schnittfläche nur die elastischen Bindungen zerstört worden. Es ist daher gar nicht so gewagt und unüberlegt, wie es Hardtwig (1954) in der Kritik des Vortrages des Verfassers darstellt, dieselben Kräfte, die bei Bewegungen der Oberflächen fester Körper

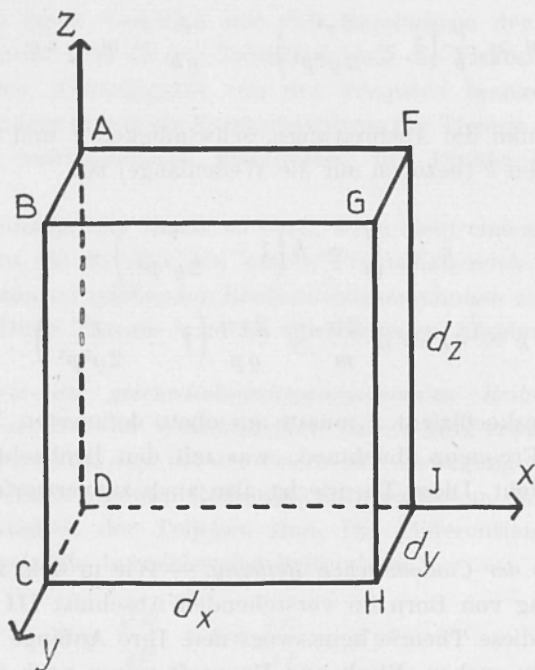


Fig. 7. - Prisma der Grösse  $dx dy dz$ , das der mathematischen Ableitung der Theorie der Coulombschen Reibung zugrunde gelegt wurde.

gegeneinander auftreten, auch bei elastischen Bewegungen im Inneren der festen Körper aktiv werden zu lassen. Diese Annahme ist a priori mindestens ebenso vernünftig, wie die Annahme, dass in der festen Materie viskose Kräfte auftreten. Gassmann (1952) erwägt bei Untersuchungen der Werkstoffdämpfung ebenfalls, ob diese Dämpfung nicht auch durch Coulombsche Reibungskräfte verursacht sein könnte, ohne allerdings seine Gedanken näher zu präzisieren.

Das Gesetz für die Coulombsche Reibungskraft lautet:  $R = r P$ , wobei  $r$  der dimensionslose Reibungskoeffizient und  $P$  die Gesamtkraft

ist, mit der die beiden beteiligten Körper aufeinandergepresst werden. Durch diese Beziehung wird nur die Reibungskraft bei Bewegung beschrieben, nicht die Haftreibung.

Im Falle seismischer Wellen setzt sich  $P$  zusammen aus äusseren Kräften, wie z.B. Gebirgsdruck, und den elastischen Kräften. In der folgenden Ableitung schliessen wir uns eng an die Darstellung von Gutenberg (1932) an. Gegeben sei ein rechtwinkliges Koordinatensystem. Die Achsen seien mit  $x$ ,  $y$  und  $z$ , die elastischen Verschiebungen mit  $u$ ,  $v$  und  $w$  bezeichnet. Unsere Ueberlegungen stellen wir an einen Prisma mit den Seitenlängen  $dx$ ,  $dy$ ,  $dz$  an (fig. 7). Wir betrachten die zur  $x$ -Achse parallelen Kräfte. Auf die Fläche  $ABCD$  wirken die von der Normalspannung  $N_1$  herrührenden Kräfte  $(-N_1 \mp |rN_1|) dydz$ . Hardtwig (1954) bereitet offenbar das doppelte Vorzeichen vor dem zweiten Glied gewisse Schwierigkeiten. Er schreibt: «... die Differentialgleichung muss also sozusagen selbst wissen, wann sie das obere, wann das untere Vorzeichen annimmt (!)». Hätte Hardtwig sich im fundamentalen Werk von Wiechert (1903) oder in einem Lehrbuch über technische Schwingungslehre (z. B. Klotter 1951) die einschlägigen Kapitel angeschaut, so wüsste er, dass der Vorzeichenwechsel eine Wesenseigenschaft Coulombscher Reibung ist. Sie wählt automatisch immer dasjenige Vorzeichen, das ihr erlaubt, den Wellen und Schwingungen Energie zu entziehen. Wir werden später nochmals darauf zurückkommen. Für die Coulombsche Reibungskraft ist nur der Absolutbetrag der Summe aller wirksamen Spannungen und Kräfte, nicht aber die Richtung der Resultante, massgebend.

Auf die Fläche  $FGHI$  wirkt entsprechend

$$\left( N_1 + \frac{\partial N_1}{\partial x} dx \pm r \left| N_1 + \frac{\partial N_1}{\partial x} dx \right| \right) dy dz .$$

Uebrig bleibt somit:

$$\left| \frac{\partial N_1}{\partial x} \pm r \left| \frac{\partial N_1}{\partial x} \right| \right| dx dy dz .$$

Für die hier verfolgten Ziele kann man bei der Ableitung konstante äussere Kräfte ausser Acht lassen. Ebenso können auch die Reibungskräfte, die von zeitlich und örtlich als konstant anzusehenden Kräften herrühren, unberücksichtigt bleiben.

An den beiden parallelen Flächen  $ADIF$  und  $BCHG$  greifen die Tangentialkräfte

$$(-T_3 \mp r |T_3|) dx dz \text{ bzw. } \left( T_3 + \frac{\partial T_3}{\partial y} dy \pm r \left| T_3 + \frac{\partial T_3}{\partial y} dy \right| \right) dx dz \text{ an.}$$

Wirksam bleibt:

$$\left[ \frac{\partial T_3}{\partial y} \pm r \left| \frac{\partial T_3}{\partial y} \right| \right] dx dy dz .$$

Analog ergibt sich für das dritte Seitenpaar:

$$\left[ \frac{\partial T_2}{\partial z} \pm r \left| \frac{\partial T_2}{\partial z} \right| \right] dx dy dz .$$

Wir sehen, dass die Ausdrücke gegenüber denen für den ideal elastischen Körper nur um ein additives Glied erweitert sind.

Wir können uns deshalb weiterhin kurz fassen und sofort die Gleichungen für das elastische Gleichgewicht und für die elastischen Wellen anschreiben:

$$\begin{aligned} \varrho \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} &= (\lambda + \mu) \frac{\partial \theta}{\partial x} + \mu \nabla^2 u \pm r \left| (\lambda + \mu) \frac{\partial \theta}{\partial x} + \mu \nabla^2 u \right| . \\ \varrho \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} &= (\lambda + \mu) \frac{\partial \theta}{\partial y} + \mu \nabla^2 v \pm r \left| (\lambda + \mu) \frac{\partial \theta}{\partial y} + \mu \nabla^2 v \right| . \\ \varrho \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} &= (\lambda + \mu) \frac{\partial \theta}{\partial z} + \mu \nabla^2 w \pm r \left| (\lambda + \mu) \frac{\partial \theta}{\partial z} + \mu \nabla^2 w \right| . \end{aligned}$$

Die Differentialgleichung für die Longitudinalwelle lautet:

$$\frac{\partial^2 \theta}{\partial t^2} = \frac{\lambda + 2\mu}{\varrho} \left[ \nabla^2 \theta \pm r \left| \nabla^2 \theta \right| \right] .$$

Für die Transversalwelle erhalten wir:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \omega_x}{\partial t^2} &= \frac{\mu}{\varrho} \left[ \nabla^2 \omega_x \pm r \left| \nabla^2 \omega_x \right| \right] , & \frac{\partial^2 \omega_y}{\partial t^2} &= \frac{\mu}{\varrho} \left[ \nabla^2 \omega_y \pm r \left| \nabla^2 \omega_y \right| \right] , \\ \frac{\partial^2 \omega_z}{\partial t^2} &= \frac{\mu}{\varrho} \left[ \nabla^2 \omega_z \pm r \left| \nabla^2 \omega_z \right| \right] . \end{aligned}$$

$$\left( \lambda, \mu = \text{Lamésche Konstanten, } \varrho = \text{Dichte, } \theta = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} , \right.$$

$$\left. \omega_x = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial w}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial z} \right) ; \omega_y = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial x} \right) ; \omega_z = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \right) \right) .$$

Aus den obigen Gleichungen kann man sofort erkennen, dass die Reibungsspannungen den elastischen Spannungen mal gleichgerichtet,

mal entgegengerichtet sind. Mit dem Ansatz  $a = A \cos (mx - pt)$  (Ansatz einer ebene Welle in Richtung der  $x$ -Achse) erhält man für die Ausbreitungsgeschwindigkeiten die Beziehungen:

$$\text{longitudinal } v_l = \sqrt{(\lambda + 2\mu)(1 \pm r)/\rho}; \text{ transversal } v_t = \sqrt{\mu(1 \pm r)/\rho}.$$

Die Geschwindigkeiten sind teils grösser als die für den ideal elastischen Fall, teils sind sie entsprechend kleiner. Im Mittel beobachtet man also bei Coulombscher Reibung in etwa die gleichen Werte wie im rein elastischen Fall. Eine Frequenzabhängigkeit ist nicht vorhanden, was im Einklang mit den Beobachtungen steht.

Wann gilt nun das positive, wann das negative Vorzeichen von  $r$  und wie ist die Absorption beschaffen? Dies können wir bei dieser Theorie nicht unmittelbar der Differentialgleichung entnehmen. Wir müssen dazu die Energieverhältnisse betrachten. Der bequemeren Schreibweise halber wählen wir hierfür die ebene Transversalwelle.

$$w = W_\nu \cos (mx - pt) = W_\nu \cos p (x/v_t - t).$$

Das Wesen der Coulombschen Reibung bringt es mit sich, dass hier kein geschlossener Ansatz gemacht werden darf. Der sprunghafte Vorzeichenwechsel deutet dies schon an. Der Ansatz der ungedämpften sinusförmigen Welle hat nur innerhalb gewisser Intervalle Gültigkeit. Am Anfang, bzw. Ende, derselben ändert die Maximalamplitude sprunghaft ihren Wert. Dies soll durch die Bezeichnung  $W_\nu$  angedeutet werden.  $\nu$  stellt die Nummer des Intervalles dar. Die Zweckmassigkeit des Ansatzes wird sich noch erweisen. Ähnliche Verhältnisse liegen bei der Behandlung mechanischer Schwingungssysteme mit Coulombschen Reibungsgliedern vor (s. Wiechert 1903).

Zur Klärung der Absorptionsverhältnisse berechnen wir die Arbeit, welche die Coulombschen Reibungskräfte leisten. Wir gehen wieder vom Prisma der fig. 7 aus. An der auf der  $x$ -Achse senkrecht stehenden Fläche mit der Koordinate  $x$  tritt in das Prisma der Energiebetrag

$$dE_x = -\mu (\pm r) \left| \frac{\partial w}{\partial x} \right| dw dy dz$$

ein. An der parallelen Fläche mit der Koordinate  $(x + dx)$  tritt der Betrag

$$dE_{(x+dx)} = \mu (\pm r) \left| \frac{\partial w}{\partial x} \right| dw dy dz + \mu (\pm r) \cdot \frac{\partial}{\partial x} \left( \left| \frac{\partial w}{\partial x} \right| dw \right) dx dy dz$$

aus. Innerhalb des Prismas wird der elastischen Welle von den Reibungskraften der Energiebetrag

$$dE_P = \mu (\pm r) \frac{\partial}{\partial x} \left( \left| \frac{\partial w}{\partial x} \right| dw \right) d\tau$$

entzogen. ( $d\tau = dx dy dz =$  Volumen des Prismas). Die anderen Seiten des Prismas brauchen wir nicht zu betrachten, da in unserem speziellen Falle durch sie keine Energie hindurchfließt. Der Forderung, dass für die Coulombschen Reibungskräfte nur der Absolutbetrag der Spannungen, nicht aber ihr Vorzeichen von Bedeutung ist, wird durch das Setzen der Absolutstriche Genüge getan.

Pro Volumeneinheit wird die Energie

$$dE_A = \mu (\pm r) \frac{\partial}{\partial x} \left( \left| \frac{\partial w}{\partial x} \right| dw \right)$$

verschluckt. Diesen Ausdruck wollen wir nun noch umformen und vereinfachen, wobei den Vorzeichen besondere Beachtung zu schenken ist. Da bei der Differentiation Vorzeichen als konstante Faktoren vorgezogen werden können, kann man im vorstehenden Ausdruck die Absolutzeichen weglassen, wenn man ihn gleichzeitig mit dem Vorzeichen von  $\frac{\partial w}{\partial x}$  multipliziert. Dies soll durch das Symbol  $\langle \operatorname{sgn} \frac{\partial w}{\partial x} \rangle$  (sprich signum  $\frac{\partial w}{\partial x}$ ) zum Ausdruck gebracht werden. Damit wird:

$$dE_A = \mu (\pm r) \langle \operatorname{sgn} \frac{\partial w}{\partial x} \rangle \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial w}{\partial x} dw \right).$$

Die Ausführung der Differentiation liefert:

$$dE_A = \mu (\pm r) \langle \operatorname{sgn} \frac{\partial w}{\partial x} \rangle \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \frac{\partial w}{\partial x} \right) dx ;$$

$$dE_A = \mu (\pm r) \langle \operatorname{sgn} \frac{\partial w}{\partial x} \rangle 2 \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \frac{\partial w}{\partial x} dx ;$$

$$dE_A = \mu (\pm r) \langle \operatorname{sgn} \frac{\partial w}{\partial x} \rangle d \left( \frac{\partial w}{\partial x} \right)^2.$$

Diese Gleichung lässt sich unmittelbar integrieren.

$$E_A = \mu (\pm r) \langle \operatorname{sgn} \frac{\partial w}{\partial x} \rangle \left( \frac{\partial w}{\partial x} \right)^2.$$

Der Ausdruck von  $E_A$  bestimmt nicht nur, welcher Anteil der Energie einer elastischen Welle bei der Ausbreitung in der Volumeneinheit des Mediums in Form von Wärme zurückbleibt, sondern legt auch gleichzeitig fest, welches Vorzeichen in welchem Intervall jeweils zu nehmen ist. Da der elastischen Welle von den Coulombschen Kräften stets Energie entzogen wird, muss  $E_A$  immer positiv sein. Dies erreicht man in einfacher und eindeutiger Weise dadurch, dass man dem Koeffizienten  $r$  stets das gleiche Vorzeichen beigibt, das  $\frac{\partial w}{\partial x}$  für den betreffenden Ort und die betreffende Zeit besitzt. Damit lässt sich der Betrag der absorbierten Energie noch kürzer schreiben:

$$E_A = \left| r \mu \left( \frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 \right| .$$

Für den obigen Ansatz einer ebenen Transversalwelle ergibt sich  $E_A$  zu:

$$E_A = \left| r \mu \frac{p^2}{v_l^2} W_v^2 \sin^2 p \left( \frac{x}{v_l} - t \right) \right| = \left| \frac{r}{1 \pm r} \rho p^2 W_v^2 \sin^2 p \left( \frac{x}{v_l} - t \right) \right| .$$

In dem Ausdruck für die der Welle verlorengelassene Energie sind alle vorkommenden Grossen bis auf die Amplitudenwerte  $W_v$  bekannt. Wie gross sind nun diese in Bezug auf einen Ausgangswert  $W_o$ , wie gross ist das Intervall, für welches ein bestimmtes  $W_v$  gilt und wo liegt dessen Anfang und Ende in einem stationären Wellenzug? Die Intervalllängen und ihre Lage innerhalb eines Wellenzuges können wir jetzt unmittelbar angeben. Der Reibungskoeffizient  $r$  muss, wie sich oben ergeben hat, stets das gleiche Vorzeichen wie  $\frac{\partial w}{\partial x}$  haben. Für einen durch eine Cosinusfunktion der obigen Form beschreibbaren Wellenzug (s. Ansatz) ist  $\frac{\partial w}{\partial x}$  bei konstant gehaltenem  $t$  ( $t = 0$ ) innerhalb der ersten Hälfte der Wellenlänge negativ. In der zweiten Hälfte ist  $\frac{\partial w}{\partial x}$  positiv. Der Vorzeichenwechsel findet somit jeweils beim Erreichen der Maximalamplituden auf beiden Seiten, auf der positiven wie der negativen der Amplitudenzählung, statt. Der Umkehrpunkt der Welle auf der negativen Amplitudenseite liegt nicht in der Mitte zwischen den beiden entsprechenden Umkehrpunkten auf der positiven Seite. Er liegt etwas vor der Mitte. Entsprechend liegt ein Umkehrpunkt der positiven Seite hinter

der Mitte zwischen den betreffenden Umkehrpunkten der negativen Seite. Der Cosinusbogen, der dem negativen Vorzeichen von  $r$  zugeordnet ist, hat die Länge  $\lambda^-/2 = \pi \sqrt{\frac{\mu}{\rho}} (1 - r)/p$ . Der Bogen, der durch das positive Zeichen bestimmt wird, ist  $\lambda^+/2 = \pi \sqrt{\frac{\mu}{\rho}} (1 + r)/p$  lang. Der erste unterscheidet sich also von der halben Wellenlänge  $\lambda_i/2$  im absorptionsfreien Medium um den Faktor  $\sqrt{1 - r}$ , der zweite um den Faktor  $\sqrt{1 + r}$ . Die Summe der beiden ist:

$$(\lambda^- + \lambda^+)/2 = \lambda_i (\sqrt{1 - r} + \sqrt{1 + r})/2 \cong \lambda_i (1 - r^2/8) .$$

Da  $r$ , wie sich noch zeigen wird, stets kleiner als 1 ist und das nächste Glied der Reihenentwicklung bereits  $5r^4/128$  ist, ist die Näherung praktisch völlig ausreichend. Wir sehen, dass die Wellenlänge und damit auch die Ausbreitungsgeschwindigkeit der Wellen durch die Coulombschen Reibungskräfte nur sehr unwesentlich beeinflusst wird. Die Verringerung der beiden Werte durch die Reibung erreicht nur in den ungünstigsten Fällen (bei lockeren Sanden) Beträge von mehr als ein Prozent. Sie ist im allgemeinen kleiner als die Messgenauigkeit. Abgesehen davon könnte sie aus Beobachtungen an Wellen nicht festgestellt werden, da sie unabhängig von der Frequenz ist. Nur innerhalb einer Wellenlänge entsprechen die Abstände zweier Phasenwerte nicht mehr der Ausbreitungsgeschwindigkeit, die man über grössere Entfernungen hinweg beobachtet. Zeichnet man aus Beobachtungen von Maschinenschwingungen das Laufzeitdiagramm, so wird man finden, dass die Messwerte systematisch mit der Periode einer Wellenlänge um eine Gerade streuen, die der Ausbreitungsgeschwindigkeit in diesem Medium entspricht. Damit dürfte ein weiteres Missverständnis von Hardtwig (1954) aufgeklärt sein, der einen stärkeren Einfluss der Reibungskräfte auf die Geschwindigkeit vermutete.

Für die Berechnung der Werte  $W_p$  müssen wir uns Klarheit darüber verschaffen, wie sich die abklingende Welle aus den einzelnen Schwingungsbogen von der Grösse einer halben Wellenlänge und der Maximalamplituden  $W_p$  zu einem stetigen Kurvenzug zusammensetzt. Es wurde schon auf die Aehnlichkeit des hier betrachteten Problems mit dem Ausschlagen einer freien Eigenschwingung eines mechanischen Schwingungssystems, das Coulombsche Reibungsglieder enthält, hingewiesen. Wiechert (1903) hat die Theorie solcher Systeme entwickelt. Auch in diesem Falle setzt sich der Schwingungszug aus Cosinusbogen einer halben

Periode zusammen. Die Nullage der Schwingungsbogen fällt nicht mit der Ruhelage des Systems zusammen. Sie hegt entweder um den Betrag  $\sigma$  (bei Wiechert ist diese Grösse mit  $r$  bezeichnet) darüber oder darunter. Fig. 8a, die dem Werk von Wiechert (1903) entnommen ist, soll die Verhältnisse veranschaulichen. Die punktierte Kurve stellt den ungedämpften, die ausgezogene den durch Coulombsche Reibungskräfte gedämpften Schwingungszug dar. Im Gegensatz zu unserem obigen Ansatz sind diese Kräfte stets konstant, also unabhängig von der jeweiligen Auslenkung des Systems. Der Anfangsausschlag sei  $a_0$ . Für die gedämpfte Schwingung liegt die Nullinie des ersten Cosinusbogens um den Betrag  $\sigma$  über der Ruhelage des Seismographen. Die Maximalamplitude des ersten Schwingungsbogens  $W_1$  ist um  $\sigma$  kleiner als  $a_0$ . Der Endaus Schlag  $a_1$ , der nach einer halben Periode erreicht wird und der gleichzeitig Anfangsaus Schlag des zweiten Bogens ist, ist um  $2\sigma$  kleiner als  $a_0$ . Die Nullinie des zweiten Bogens liegt um  $\sigma$  unterhalb der Ruhelage. Die Maximalamplitude  $W_2$  ist um  $3\sigma$  kleiner als  $a_0$ . Der Endaus Schlag  $a_2$  nach einer vollen Periode ist um  $4\sigma$  kleiner als  $a_0$ . Hier springt die Nullinie wiederum um  $2\sigma$ , diesmal wieder zurück auf die positive Seite der Ruhelage. Für die nächste und alle weiteren Perioden gilt dasselbe. Die maximale Auslenkung nimmt jeweils um  $4\sigma$  ab. Es sei noch darauf hingewiesen, dass die Eigenfrequenz des Systems durch die Reibungskräfte nicht beeinflusst wird.

Bei der durch Coulombsche Reibungskräfte verursachten Absorption einer elastischen Welle liegen die Verhältnisse nur unwesentlich anders. Dies ist lediglich dadurch bedingt, dass die Reibungskräfte nicht konstant sind, sondern linear von  $\frac{\partial w}{\partial x}$  und damit von der Auslenkung der Welle abhängen. In fig. 8b ist die Entstehung des ausklingenden Wellenzuges dargestellt. Als Abszisse ist hier die Entfernung  $x$  aufgetragen im Gegensatz zu fig. 8a, wo in dieser Richtung die Zeit  $t$  abgetragen ist. Die Ausgangsauslenkung sei wieder mit  $a_0$  bezeichnet. Am Ende der Strecke  $\lambda/2$  wird die erste maximale Auslenkung nach der negativen Amplitudenseite erreicht. Sie ist dem absoluten Betrag nach kleiner als  $a_0$  und sei  $-a_1$  benannt. Die Welle besitzt zwar an den Stellen maximaler Auslenkung keine Energie. Dieser Grösse kann aber formal ein Energiebetrag zugeordnet werden, nämlich derjenige, den die Welle im gleichen Moment eine Viertelwellenlänge vor, bzw. hinter, der betreffenden Stelle haben würde, wenn keine Absorption stattfände, die Welle also konstante Amplitude besässe. Dieser Energiebetrag berechnet sich zu  $E_{a_1} = \rho p^2 a_1^2$ . Die Differenz der Energie am Anfang und Ende einer halben Wellenlänge

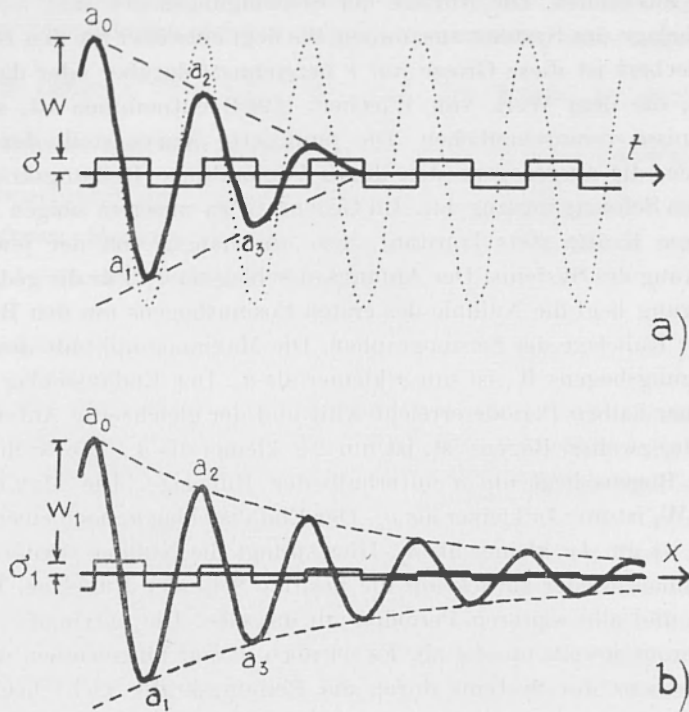


Fig. 8a. – Gedämpfte Eigenschwingung eines mechanischen Schwingungssystems mit Coulombschen Reibungsgliedern. (Abszisse: Zeit  $t$ ).

Punktiert: Ungedämpfte Schwingung.

Ausgezogen: Gedämpfte Schwingung des Systems.

Gestrichelt: Verbindungslinie der Umkehrpunkte der Schwingung.  $a_0$  = Anfangsauslenkung aus der Ruhelage,  $W_1$  = Maximalamplitude des ersten Cosinusbögen,  $\sigma$  = Reibungskoeffizient = Betrag des Abstandes der Nulllinien der Cosinusbögen von der Ruhelage.

Fig. 8b. – Momentbild eines Wellenzuges in einem Medium mit Coulombscher Reibung. (Abszisse: Entfernung  $x$ ).

Ausgezogen: Wellenzug.

Gestrichelt: Verbindungslinie der Umkehrpunkte (Exponentialkurve).

$a_v$  = Auslenkung der Teilchen aus der Ruhelage.

$W_v$  = Maximalamplitude der Cosinusbögen.

$\sigma_v$  = Abstand der Nulllinie der Cosinusbögen von der Ruhelage. Sie nehmen wie auch die Maximalamplituden der Cosinusbögen proportional den Maximalauslenkungen ab.

Dem Beispiel wurde der Reibungskoeffizient  $r = 0,2$  zu Grunde gelegt.

muss in unserem Falle gleich der von den Coulombschen Reibungskräften verbrauchten Energie sein. Letztere wurde oben schon berechnet. Sie ist:

$$\begin{aligned} E_{W_1} &= \left| \frac{r}{1-r} \varrho p^2 W_1^2 \sin^2 p(x/v_1 - t) \right|_{\lambda_1^{-4}/0} \\ &+ \left| \frac{r}{1-r} \varrho p^2 W_1^2 \sin^2 p(x/v_1 - t) \right|_{\lambda_1^{-2}/\lambda_1^{-4}} \\ &= \left| \frac{2r}{1-r} \varrho p^2 W_1^2 \right|. \end{aligned}$$

Weiterhin ist zu beachten, dass  $|a_0| + |a_1| = 2W_1$ , der doppelten Maximalamplitude des ersten Cosinusbogens, sein muss. Aus den beiden Bedingungen können wir  $a_1$  und  $W_1$  berechnen.

$$E_{a_0} - E_{a_1} = \varrho p^2 (a_0^2 - a_1^2) = \frac{2r}{1-r} \varrho p^2 W_1^2 .$$

$$|a_0| + |a_1| = 2W_1 .$$

Die Auflosung der Gleichungen ergibt:

$$|a_1| = \frac{1 - \frac{r}{2(1-r)}}{1 + \frac{r}{2(1-r)}} |a_0| = \frac{1 - 3r/2}{1 - r/2} |a_0| .$$

$$W_1 = \frac{1}{1 + \frac{r}{2(1-r)}} a_0 = \frac{1-r}{1-r/2} a_0 .$$

$a_1$  hat stets das entgegengesetzte Vorzeichen von  $a_0$ .  $W_1$  hat das gleiche Vorzeichen wie  $a_0$ . Die Nulllinie des Cosinusbogens liegt um

$$\sigma_1 = a_0 - W_1 = \frac{\frac{r}{2(1-r)}}{1 + \frac{r}{2(1-r)}} a_0 = \frac{r/2}{1-r/2} a_0$$

von der Nullauslenkung der Teilchen entfernt und zwar in Richtung von  $a_0$ .

Der zweite Teil der vollen Wellenlänge, der  $\lambda^+/2$  gross ist, beginnt mit der maximalen Auslenkung  $-a_1$ . Auf ihm wird die Energie.

$$E_{W_2} = \left| \frac{2r}{1+r} \varrho p^2 W_2^2 \right|$$

absorbiert. Es gilt auch hier  $|a_1| + |a_2| = 2W_2$ . Aus den [beiden Gleichungen

$$E_{a_1} - E_{a_2} = \varrho p^2 (a_1^2 - a_2^2) = \frac{2r}{1+r} \varrho p^2 W_2^2 .$$

$$|a_1| + |a_2| = 2W_2 .$$

erhalten wir folgende Ausdrücke für  $a_2$ ,  $W_2$  und  $\sigma_2$ :

$$\begin{aligned} |a_2| &= \frac{1 - \frac{r}{2(1+r)}}{1 + \frac{r}{2(1+r)}} |a_1| = \frac{1 + r/2}{1 + 3r/2} |a_1| = \\ &= \frac{(1+r/2)(1-3r/2)}{(1+3r/2)(1-r/2)} |a_0| = \frac{1-r-3r^2/4}{1+r-3r^2/4} |a_0| \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} W_2 &= \frac{1}{1 + \frac{r}{2(1+r)}} a_1 = \frac{1+r}{1+3r/2} a_1 = \\ &= \frac{(1+r)(1-3r/2)}{(1+3r/2)(1-r/2)} a_0 = \frac{1-r/2-3r^2/4}{1+r-3r^2/4} a_0 . \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \sigma_2 &= a_1 - W_2 = \frac{\frac{r}{2(1+r)}}{1 + \frac{r}{2(1+r)}} a_1 = \frac{r/2}{1+3r/2} a_1 = \\ &= \frac{(1-3r/2)r/2}{(1+3r/2)(1-r/2)} a_0 = \frac{r/2-3r^2/4}{1+r-3r^2/4} a_0 . \end{aligned}$$

Damit sind die Verhältnisse innerhalb der ersten Wellenlänge klargestellt. Alle vorkommenden Grossen sind auf den Anfangsausschlag

$a_0$  und auf die Materialkonstante  $r$  zurückgeführt. Es bedarf wohl keiner näheren Begründung, dass für die zweite Wellenlänge und für alle weiteren dieselben Beziehungen Gültigkeit haben, nur die Indizes sind um entsprechende ganzzahlige Vielfache von 2 zu vermehren.

Wir sehen, dass zwei maximale Auslenkungen, die um eine Wellenlänge auseinander liegen, stets in einem konstanten Verhältnis zueinander stehen, das nur vom Reibungskoeffizienten  $r$  bestimmt wird. Daraus folgt, dass alle maximalen Auslenkungen in positiver Richtung auf einer Exponentialfunktion liegen müssen, deren Argument negativ ist, da die Auslenkungen mit zunehmender Entfernung  $x$  kleiner werden. Auch die maximalen Auslenkungen in negativer Richtung liegen auf einer  $e$ -Funktion mit dem gleichen negativen Argument. Der Faktor vor der Funktion hat das negative Vorzeichen. Er unterscheidet sich in seinem absoluten Betrag praktisch nicht von  $a_0$ . Differenzen machen sich erst bei Gliedern höherer Ordnung in  $r$  bemerkbar. Das kleinere Verhältnis  $a_1/a_0$  gegenüber  $\sqrt{a_2/a_0}$  entspricht weitgehend der kleineren Strecke  $\lambda^-/2$  gegenüber der Strecke  $(\lambda^+/2 + \lambda^-/2)/2$ .

Den Exponenten der  $e$ -Funktion setzen wir in der von den Beobachtungsergebnissen verlangten Form an:  $(-kx/\lambda_i(1-r^2/8))$ . Zur Berechnung des Koeffizienten  $k$  betrachten wir zwei Werte der Funktion, deren Koordinaten  $x$  sich um den Betrag  $\lambda_i(1-r^2/8)$  unterscheiden. Das Verhältnis der beiden Zahlen ist:

$$e^{+k} = a_1/a_0 = \frac{1-r-3r^2/4}{1+r-3r^2/4} ; \quad k = \ln \frac{1-r-3r^2/4}{1+r-3r^2/4} .$$

Der Absorptionskoeffizient  $k$  wird einzig und allein vom Reibungskoeffizienten  $r$  bestimmt. Er ist in der oben definierten Gestalt von der Frequenz unabhängig. Die Hauptforderung der Experimente an die Theorie der Absorption elastischer Wellen, nämlich Unabhängigkeit sowohl der Ausbreitungsgeschwindigkeit wie des Absorptionskoeffizienten von der Frequenz, wird nur von der Theorie der Coulombschen Reibungskräfte erfüllt. Auch das Abklingen der maximalen Auslenkungen nach einer  $e$ -Funktion kann sie erklären, obwohl das angesichts des zweifachen Vorzeichenwechsels der Reibungskräfte innerhalb einer Wellenlänge von vorneherein gar nicht zu vermuten ist.

Nachdem auch die Maximalamplituden der einzelnen Schwingungsbögen und die Abstände der Nulllinie der einzelnen Bögen von der Nullauslenkung der Teilchen den Maximalauslenkungen am Anfang einer Wellenlänge proportional sind, ist ersichtlich, dass auch die Maximalam-

plituden und die Sprünge der Nulllinie nach demselben Exponentialgesetz mit der Entfernung abnehmen, die Faktoren vor der  $e$ -Funktion sind nur entsprechend kleiner.

Die vorstehende Ableitung wurde aus Gründen der Uebersichtlichkeit an der ebenen Transversalwelle entwickelt. Da hierbei auf keine speziellen Eigenschaften dieser Welle, zu denen es bei anderen kein Analogon gibt, zurückgegriffen wurde, darf wohl ohne nähere Begründung, die im wesentlichen auf eine Wiederholung der obigen Rechnung hinauslaufen muss, geschlossen werden, dass die Ergebnisse in sinngemässer Uebertragung auch für Zylinder- und Kugelwellen gültig sind. Beim Ansatz der Reibungskraft wurde keine Einschränkung bezüglich der Art der elastischen Beanspruchung gemacht, der Reibungskoeffizient  $r$  wurde als eine Konstante des Materials eingeführt. In den Ergebnissen der Rechnung kommen der Scherungsmodul und die Dichte des Mediums, sowie die Frequenz der Welle nicht mehr vor, wenn man von den Ausdrücken für die Ausbreitungsgeschwindigkeit und die Wellenlänge absieht, wo sie nicht wegfallen können. Daher dürfen wir folgern, dass auch die Longitudinalwelle den entsprechenden Gesetzmässigkeiten unterworfen ist. Der oben definierte Absorptionskoeffizient  $k$  muss bei der Longitudinalwelle ebenso gross sein, wie bei der transversalen. Da sich weiterhin die Oberflächenwellen der Seismik entweder aus einer  $SH$ - oder aus einer  $P$ - und  $SV$ -Welle zusammensetzen, gelten die Absorptionsgesetze auch für diese, nur ist hier die Dispersion (s. Abschnitt I) zu berücksichtigen und es ist zu beachten, dass der Absorptionskoeffizient auf die Gruppengeschwindigkeit zu beziehen ist. Torsions- und Biegewellen in Platten und Stäben, bzw. die entsprechenden Schwingungen, werden ebenfalls durch Schub- und Normalspannungen bestimmt. Werden diese Wellen, bzw. Schwingungen, durch Coulombsche Reibungskräfte absorbiert bzw. gedämpft, so müssen sich auch hier die gleichen Absorptionskoeffizienten bzw. Dämpfungskoeffizienten wie bei allen anderen Wellen- und Schwingungsarten ergeben. Auch hier wird die Theorie der Coulombschen Reibungskräfte den Beobachtungen gerecht.

In fig. 8b ist die Zeit  $t$  konstant gehalten. Dies wurde auch bei der obigen Ableitung vorausgesetzt. Für einen anderen Wert von  $t$  liegen die Umkehrpunkte des Wellenzuges an anderen Stellen. Die maximalen Auslenkungen, die Maximalamplituden und die  $\sigma$ -Werte sind aber wiederum so bemessen, dass sie auf der gleichen, ihnen zugeordneten  $e$ -Funktion liegen.

Es wurde schon gesagt, dass der Reibungskoeffizient  $r$  stets kleiner als 1 ist. Nur in lockeren Böden erreicht er Werte, die grösser als 0,1

sind. Die im allgemeinen nicht sehr genauen Beobachtungen der Absorption streuen dann noch besonders stark. Für die Praxis erscheint es daher zweckmässig und vorteilhaft, die obigen Resultate durch Entwicklung in Reihen und Vernachlässigung aller Glieder von zweitem und höherem Grade zu vereinfachen und übersichtlicher zu gestalten. Wir erhalten somit:

$$|a_1| \cong (1 - r) |a_0|$$

$$W_1 \cong (1 - r/2) a_0$$

$$\sigma_1 \cong \frac{r}{2} a_0$$

$$|a_2| \cong (1 - r) |a_1| \cong (1 - 2r) |a_0|$$

$$W_2 \cong (1 - r/2) a_1 \cong (1 - 3r/2) a_0$$

$$\sigma_2 = \frac{r}{2} a_1 \cong \frac{r}{2} a_0$$

$$k \cong \ln(1 - 2r) \cong 2r .$$

In erster Näherung, die jedoch für die Praxis völlig ausreichend ist, ist der Absorptionskoeffizient  $k$  doppelt so gross wie der Reibungskoeffizient  $r$ . Wir brauchen also die in den Tabellen und im Text aufgeführten Werte für die Dämpfungs- und Absorptionskoeffizienten nur zu halbieren, um die Reibungskoeffizienten der betreffenden Medien zu erhalten.

Es drängt sich nun ein Vergleich der so erhaltenen Werte mit denen auf, die man bei Gleitbewegungen fester Körper aufeinander misst. Daher sind in Tabelle 5 die für das Innere fester Körper geltenden Reibungskoeffizienten denen gegenübergestellt, die man an ihren Oberflächen gemessen hat. Letztere sind dem Tabellenwerk von Landolt-Börnstein (1923) entnommen. Erstere entstammen hauptsächlich den in Abschnitt I dieser Arbeit zusammengetragenen Beobachtungsergebnissen.

Wie zu erwarten war, sind die Reibungskoeffizienten im Innern fester Körper kleiner, und zwar um etwa eine Zehnerpotenz, als die Koeffizienten an der Oberfläche. Bei den Oberflächenwerten spielt die Rauigkeit der Flächen eine grosse Rolle. Die Reibungskoeffizienten in Lockerböden, vor allem in lockeren Sanden, stimmen mit denen überein, die man an Oberflächen feststellt.

Born (1941) hat, wie oben ausgeführt (fig. 2), gefunden, dass der Dämpfungskoeffizient bei trockenen Proben unabhängig von der Fre-

Tabelle 5.

a) Reibungskoeffizienten  $r$  für das Innere fester Körper.

Material	Reibungs- koeffizient	Beobachter
Granit . . . . .	0,011	BIRCH AND BANCROFT (1938)
Granit . . . . .	0,015	REGULA (1940)
Weisser Marmor . . . . .	0,015	REGULA (1940)
Grauer Marmor . . . . .	0,012	REGULA (1940)
Schiefer . . . . .	0,010	REGULA (1940)
Tiefengesteine (Mittelwert) .	0,012	ANGENHEISTER (1906)
Sylvan Shale . . . . .	0,022	BORN (1941)
Hunton Limestone . . . . .	0,025	BORN (1941)
Amherst Sandstone . . . . .	0,030	BORN (1941)
Cockfield-Yequa Formation	0,024	BORN (1941)
Gips . . . . .	0,044	THYSSEN und RULKE (1939)
Lehm, Kies . . . . .	0,050	MINTROP (1911)
Sand, Lehm . . . . .	0,21	ANGENHEISTER UND SCHNEI- DER (1928)
Liaston . . . . .	0,18	Degebo
Sand, Lösslehm . . . . .	0,31	Degebo
Feinsand, Ton . . . . .	0,11	Degebo
Aluminium . . . . .	0,014	THYSSEN und RÜLKE (1939)
Glas . . . . .	0,010	FÖRTSCH (1938)
Eschenholz . . . . .	0,022	FÖRTSCH (1938)

b) Reibungskoeffizienten  $r$  für Bewegung zweier Oberflächen aufeinander.

Materialen	Beschaffenheit der Oberfläche	Reibungs- koeffizient
Gusseisen-Gusseisen . . . . .	wenig fettig	0,15
Schmiedeeisen-Gusseisen . . . . .	trocken	0,18
Schmiedeeisen-Schmiedeeisen . . . . .	trocken	0,44
Bronze-Gusseisen . . . . .	trocken	0,22
Bronze-Bronze . . . . .	trocken	0,20
Gusseisen-Eiche . . . . .	trocken	0,49
Messing-Eiche . . . . .	trocken	0,62
Eiche-Eiche . . . . .	trocken	0,48
Schmiedeeisen-Muschelkalk . . . . .	trocken	0,24
Eiche-Muschelkalk . . . . .	trocken	0,38
Muschelkalk-Muschelkalk . . . . .	trocken	0,69
Muschelkalk-Rogenstein . . . . .	trocken	0,75

quenz ist. Sobald die Proben jedoch Wasser aufgesaugt hatten und das Porenvolumen teilweise oder ganz mit Flüssigkeit angefüllt war, kam zu dem konstanten Anteil des Dampfungskoeffizienten noch ein linear mit der Frequenz ansteigender hinzu. Born führt den konstanten Anteil

auf Coulombsche Reibung zurück. Ist das Porenvolumen mit Wasser gefüllt, so treten in der Flüssigkeit, entsprechend ihrem Zähigkeitskoeffizienten, bei Deformationen viskose Kräfte in Erscheinung, die eine weitere Verschluckung von Schwingungsenergie verursachen. Dass es sich hierbei um solche Kräfte handelt, beweist der lineare Anstieg des Dämpfungskoeffizienten, wie er von der Theorie der Visko-Elastizität gefordert wird. Wie schon erwähnt, erreicht der viskose Anteil der Dämpfung, bzw. Absorption, im Wellenbereich der praktischen Seismik im Gelände keine Beträge, die von nennenswerter Bedeutung waren. Hier ist nur der von Coulombscher Reibung verursachte Anteil ausschlaggebend.

Die in dieser Arbeit zitierten Experimente wurden alle an Gesteinsproben oder in oberflächennahen Schichten der Erdkruste angestellt. Am tiefsten reichen die Messungen von Angenheister (1906) an Wiederkehrwellen von Erdbeben hinab. Oberflächenwellen von 20-30 s Periode dürften in 100 km Tiefe kaum mehr nennenswerte Amplituden besitzen. Somit können wir auch nur sagen, dass die Theorie der Coulombschen Reibung auf die Ausbreitung elastischer Wellen bis in diese Tiefe Gültigkeit hat. Bis zu welcher Tiefe das Gesetz noch zutreffend ist und welche Absorptionsursachen im Erdkern vorherrschend sind, darüber können wir heute noch nichts aussagen. Es dürfte auch schwer sein, hierfür ein gutes Beobachtungsmaterial zu sammeln.

Hardtwig (1954) schliesst seine Kritik an der Theorie der Coulombschen Reibung mit folgenden Sätzen: « Und solange man keinen besseren und auch voll durchrechenbaren Ansatz zur Verfügung hat, ist es immer noch zweckmässiger, zur Beschreibung der im Erdinnern stattfindenden elastischen Verformungen auf das firmo-elastische Medium zurückzukommen, zumal hier die Untersuchungen über die zu wählenden Materialkonstanten erst in den Anfängen stecken ». Hier ist zu bemerken, dass sich die Untersuchungen über die zu wählenden Materialkonstanten, wie oben nachgewiesen wurde, bereits über ein halbes Jahrhundert erstrecken und dass sie heute schon so zahlreich sind, dass sie eine endgültige und eindeutige Entscheidung für die eine oder andere Theorie zulassen. Die Beobachtungen sprechen für die Theorie der Coulombschen Reibung.

Weiterhin ist zu bemerken, dass der von Born (1941) zuerst in Erwägung gezogene und vom Verfasser (1953b) aufgegriffene Ansatz der Coulombschen Reibung nicht zu verbessern ist. Er lässt sich, was oben geschehen ist, ohne grosse Mühe voll durchrechnen und führt zu Ergebnissen, die ohne irgendwelche Annahmen und Einschränkungen bis in Einzelheiten den Beobachtungsergebnissen gerecht werden. Es bleibt

also nur zu hoffen, dass Hardtwig nach Erfüllung der von ihm gestellten Bedingungen aus seinen eigenen Worten die Konsequenzen zieht und auf die Sprache der Experimente horcht.

VI. *Periodenverlängerung.* — Bei der Beobachtung der Ausbreitung von Erdbebenwellen oder der Ausbreitung der mikroseismischen Bodenunruhe stellt man fest, dass in den Seismogrammen die « Perioden » mit zunehmender Entfernung immer grösser werden. Gutenberg (1951) schreibt hierzu: « This increase is not due necessarily to a stronger absorption of the shorter periods but may be due to an actual increasing of the wave lengths with distance. Among attempts at a theoretical explanation are the wavelet theory by Ricker (1940), a theory developed by MUNK (1949), and a theory by Sezawa (1931) (based on the assumption that the increase in period is due to internal friction) which has been extended by Gutenberg (1929) and by Gutenberg and Schlechtweg (1930). This theory leads to the following equation for the period  $T$  at a distance  $D$  from the source:

$$T^2 = T_0^2 + \frac{5\eta D}{\rho V^3}$$

where  $\eta$  = coefficient of internal friction (about  $10^9$  poises),  $\rho$  = density,  $V$  = wave velocity, and  $T_0$  = period near the source ».

Hinsichtlich des Begriffes Periode muss man unterscheiden, ob er sich auf einen monofrequenten, stationären Wellenzug bezieht oder auf einen Wellenzug, der sich aus einer Gruppe von monofrequenten Wellenzügen zusammensetzt. Streng ist er nur für den ersten Fall definiert. Für den letzteren hat man sich angewöhnt, den Abstand zweier Umkehrpunkte auf der selben Seite der Nulllinie als « Periode » zu bezeichnen, obwohl man sich bewusst ist, dass man den Kurvenzug zwischen beiden nicht durch eine Sinusfunktion beschreiben kann.

In der angewandten Seismik werden beide Arten von Wellenzügen zur Erforschung des Untergrundes benutzt. Wie schon erwähnt, hat sich besonders die Deutsche Forschungsgesellschaft für Bodenmechanik, Berlin, in Zusammenarbeit mit dem Geophysikalischen Institut der Universität Göttingen intensiv mit der Ausbreitung monofrequenter Wellen, der sog. Maschinenschwingungen, befasst. Es wurden unzählige Profile mehrmals bei verschiedenen Frequenzen der Wellen vermessen. Obwohl die Untersuchungen hauptsächlich in lockeren Boden, wo die Absorption besonders stark ist, vorgenommen worden sind, konnte

nicht der geringste Anschein einer Vergrößerung der Periode der Welle festgestellt werden, obwohl nach obiger Beziehung ein deutlicher Effekt zu erwarten gewesen wäre. Da auf den Seismogrammen die Periode der Maschine und die der elastischen Welle nebeneinander aufgezeichnet wurden, wäre der geringste Hinweis auf eine Verlängerung der Periode sofort aufgefallen.

Eine Vergrößerung der Periode würde in diesem Falle gewisse Schwierigkeiten mit sich bringen. Wir nehmen an, die Maschine läuft mit der Frequenz 10 Hz. In der Nähe der Maschine beobachtet man eine Welle der Frequenz 10 Hz. Pro Sekunde wird die Beobachtungstelle von 20 « Energiebergen » passiert, die voneinander durch Nullstellen getrennt sind. In einer bestimmten Entfernung müsste nach obiger Gleichung nur mehr eine Frequenz von 9 Hz beobachtet werden. Diese Stelle würde von 18 « Energiebergen » pro Sekunde passiert werden. Nachdem nun jeder « Energieberg » den gleichen Bedingungen unterworfen ist, ist es sehr schwer vorstellbar, welches Schicksal die beiden « Energieberge », die vorne in die Beobachtungsstrecke zuviel hineingeschickt werden, erlitten haben sollen. Eine Transfusion in andere « Energieberge » kann nicht möglich sein. Dies würde unterwegs den Charakter der Welle zerstören.

Gutenberg hat die von ihm angegebene Beziehung aus Beobachtungen an Erdbeben und mikroseismischer Bodenunruhe abgeleitet und angewandt. Es darf daher angenommen werden, dass er sie nicht auf monofrequente Wellenzüge übertragen wissen will, sondern dass sie nur auf Erschütterungen Anwendung finden darf, die nicht monofrequenten, sondern impulsartigen Anregungsbedingungen, wie bei einem Erdbeben, ihre Entstehung verdanken.

Die Fortleitung und Uebertragung von Impulsen von einem Ort zum anderen spielt nicht nur in der Seismologie, sondern auch in anderen Gebieten der Physik, besonders in der Nachrichtenübermittlung jeder Art (z. B. Fernsehen, Radartechnik, elektronische Rechenverfahren), eine sehr bedeutende Rolle. Es haben sich hier eigene Methoden in der mathematischen wie physikalischen Behandlung der auftretenden Probleme entwickelt, die unter der Bezeichnung « Impulstechnik » zusammengefasst werden. (s. Winkel 1956). Ein wesentliches Element zur Beschreibung und Charakterisierung eines Impulses und seiner Uebertragung stellt in der Impulstechnik das Fourierintegral und die Fourierreihe dar. Die Fourier- und die ihr verwandte Laplace-Transformation gestatten erst eine vollständige Beschreibung der Vorgänge bei der Fortleitung von Impulsen.

Auch für die Seismologie bringt die Uebertragung der auf dem Gebiete der Impulstechnik gesammelten Erfahrungen gewisse Vorteile. Sie ermöglicht es uns, die Ausbreitung seismischer Impulse zu erfassen und zu verstehen. So ermöglichte die von Fortsch (1953a) vorgenommene Zerlegung von Registrierungen von Oberflächenwellen, die durch Sprengimpulse erzeugt worden sind, nach dem Fouriertheorem den Nachweis, dass es sich um die gleichen Oberflächenwellen handelt, die auch bei sinusförmiger Anregung mittels einer Schwingmaschine aufgetreten sind, nämlich um eine besondere Art von Rayleighwellen. Ein Impuls, wie er in der Seismik durch eine Sprengung, ein Erdbeben, usw., erzeugt wird, setzt sich nach der Impulstechnik aus einem Paket von gleichzeitig angeregten Wellen zusammen, deren Frequenzen einen mehr oder weniger grossen Spektralbereich überdecken. Jede Teilwelle des Wellenpaketes, die durch eine bestimmte Frequenz charakterisiert wird, benimmt sich unabhängig von allen anderen. Jede breitet sich nach den ihr eigenen Gesetzen aus. Die Zerlegung des Paketes in Einzelfrequenzen nach dem Fouriertheorem stellt in diesem Falle nicht nur einen rein mathematischen Formalismus dar. Die Natur nimmt nach den gleichen Gesetzmässigkeiten eine Zerlegung eines Impulses vor und behandelt jede Teilfrequenz individuell. Dies konnten Fortsch (1950) und Hellbardt (1955) an Biegewellen einer Eisplatte sehr anschaulich zeigen. Wie durch die Dispersion ein zeitlich kurz dauernder Impuls mit zunehmender Beobachtungsentfernung mehr und mehr «auseinanderläuft», zeigt fig. 9. Die Zahl der Umkehrpunkte des Kurvenzuges wächst mit der Entfernung. Bei den Biegewellen in Platten ist dieser Effekt als eine Folge der starken Dispersion besonders auffallend.

Wie schon erwähnt, bezeichnet man in der Seismik in Registrierungen von impulsartigen Erschütterungen oft den Abstand zweier Umkehrpunkte auf der gleichen Amplitudenseite mit «Periode». In diesem Sinne lässt sich aber mit dem Wort kein physikalisch sauber definierter Begriff verbinden. Vor allem kann man sie bei der Wellenausbreitung nicht von Ort zu Ort weiterverfolgen, wie dies bei rein sinusförmigen Wellenzügen der Fall ist. Der als eine «Periode» bezeichnete Teil eines Seismogrammes ist aus vielen Elementarteilen zusammengesetzt. Darauf haben Fortsch (1950) und besonders Hellbardt (1955) hingewiesen. Der in fig. 9 mit  $T$  bezeichnete Schwingungszug ist aus sehr vielen verschiedenfrequenten Energieanteilen aufgebaut. Diese Energieanteile bleiben aber nicht zusammen, sondern laufen als Folge der Dispersion auseinander und bilden in grösseren Entfernungen zusammen mit anderen Energiebeträgen ähnliche Kurvenzüge anderer «Periode». Daraus

erkennt man, dass die «Perioden» eines impulsartigen Wellenzuges bei vorhandener Dispersion nicht beständig sind und man daher aus ihnen keinerlei Gesetzmässigkeiten ableiten kann. Dies ist nur mit den Perioden möglich, die sich aus den Zerlegungen eines Impulses nach dem Fouriertheorem ergeben.

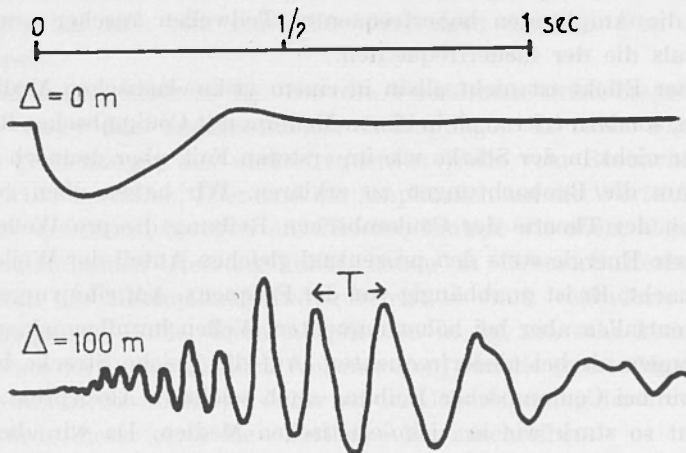


Fig. 9. – Ausbreitung von Biegewellen in einer Eisplatte bei impulsartiger Anregung.

Oben: Form des Impulses in der Entfernung 0 m.

Unten: Form des Impulses, registriert in 100 m Entfernung.

$T$  = « Periode ». (Entnommen Förtsch 1950).

Daraus ergibt sich, dass die beobachtete, scheinbare «Periodenverlängerung», wie sie bei Oberflächenwellen von Erdbeben, bei mikro-seismischer Unruhe und bei anderen Beobachtungen festgestellt wird, keine primäre Ursache haben kann. Aus der Impulstechnik folgt weiter, dass die Perioden der monofrequenten Teilwellen eines Impulses beim Ausbreitungsvorgang keine Vergrößerung erfahren. Die Periode ist schliesslich das Charakteristikum dieser Wellen, aus der sich die anderen Begriffe, wie Wellenlänge und Energie, ableiten. Man muss sich also mehr der Ansicht zuneigen, dass die beobachtete «Periodenverlängerung» bei nicht monofrequenten Wellenzügen hauptsächlich auf eine stärkere Absorption höherfrequenter Wellen gegenüber niederfrequenten längs der gleichen Beobachtungsstrecke zurückzuführen ist. Die scheinbaren «Perioden» eines Impulses hängen nicht allein von der Dispersion, sondern auch von seiner spektralen Amplitudenverteilungskurve ab. Die

« Perioden » eines Wellenpaketes liegen bei nicht zu starker Dispersion meist im Bereich des Maximums der spektralen Amplitudenverteilung. Verschiebt sich bei der Ausbreitung des Impulses das Maximum mit der Zeit, bzw. mit dem Ort, so verschieben sich auch die « Perioden » im Seismogramm. Eine solche Verschiebung nach längeren « Perioden » wird durch eine selektive Absorption bewirkt, bei der längs der gleichen Strecke die Amplituden höherfrequenter Teilwellen rascher verringert werden als die der niederfrequenten.

Dieser Effekt ist nicht allein in einem visko-elastischen Medium zu erwarten, sondern tritt auch in einem Medium mit Coulombscher Reibung auf, zwar nicht in der Stärke wie im ersteren Fall, aber dennoch ausreichend, um die Beobachtungen zu erklären. Wir haben oben gesehen, dass nach der Theorie der Coulombschen Reibung die pro Wellenlänge absorbierte Energie stets den prozentual gleichen Anteil der Wellenenergie ausmacht. Er ist unabhängig von der Frequenz. Auf eine vorgegebene Strecke entfallen aber bei höherfrequenten Wellen im allgemeinen mehr Wellenlängen als bei niederfrequenten. Auf die gleiche Strecke bezogen haben wir bei Coulombscher Reibung auch selektive Absorption, sie ist nur nicht so stark wie in visko-elastischen Medien. Da wir aber oben auch erkannt haben, dass für die Absorption nicht die Phasenwellenlänge, sondern die Gruppenwellenlänge als Masseinheit gewählt werden muss und da die letztere im allgemeinen kleiner ist als die erstere, wird dadurch die selektive Absorption noch verstärkt. Jedenfalls reichen die von der Theorie der Coulombschen Reibung zu erwartenden Effekte aus, um die vorliegenden, mehr qualitativen Beobachtungen über « Periodenverlängerung » zu erklären.

Um dies anschaulich zeigen zu können, sind in fig. 10a drei Wellenzüge verschiedener Frequenz vorgegeben worden, deren Amplituden mit der Frequenz wachsen sollen. Die Ueberlagerung der drei Wellen ist ebenfalls dargestellt. Die scheinbaren « Perioden » der Ueberlagerung, die sich aus dem Abstand zweier Umkehrpunkte ergeben, schwanken um den Wert der Periode der Welle mit der grössten Amplitude. In diesem Falle ist dies die Welle mit der höchsten Frequenz. Die Frequenzen der drei Wellen verhalten sich wie  $n : 2n : 3n$ . Ihre vorgegebenen Amplitudenwerte sollen im Verhältnis  $0,02 : 0,4 : 1$  stehen.

Es wird nun angenommen, dass sich die Wellen als ebene Wellen in einem Medium mit Coulombscher Reibung, dessen Reibungskoeffizient  $r = 0,1$  sei, ausbreiten. Wir wollen nun untersuchen, wie die Bodenbewegungen in einer Entfernung von 10 Wellenlängen der niederfrequenten Welle vom Beobachtungsort der fig. 10a aussehen. Die Maximal-

amplituden sind an dieser Stelle nur mehr  $0,0027 : 0,0072 : 0,0025$ , bezogen auf die Maximalamplitude der hochfrequenten Welle in fig. 10a, gross. In fig. 10b sind die Einzelwellen und ihre Superposition in vergrössertem Masstab dargestellt. Aus der letzteren würde man jetzt aus dem Abstand der Umkehrpunkte « Perioden » ablesen, die um den Periodenwert der mittleren Welle liegen. Die scheinbare « Periode » der Bodenbewegung hat sich also gegenüber derjenigen der fig. 10a ungefähr verdoppelt.

Schliesslich sind in fig. 10c die Verhältnisse wiedergegeben, wie wir sie unter den angenommenen Bedingungen in einer Entfernung von 20 Wellenlängen der niederfrequenten Welle vom Beobachtungsort der fig. 10a antreffen. Hier sind die Amplituden auf die Werte  $0,00036 : 0,00014 : 0,0000061$ , bezogen auf dieselbe Einheit wie oben, abgesunken. Die Coulombschen Reibungskräfte haben in dieser Entfernung das Verhältnis der Maximalamplituden bereits so stark verändert, dass die niederfrequente Welle, deren Amplituden in fig. 10a sehr klein gegenüber denen der anderen beiden Wellen waren, nun die grösste Maximalamplitude besitzt. Sie dominiert daher bei der Ueberlagerung der drei Wellen. Man würde dieser etwa die « Periode »  $1/n$  zuschreiben.

Obwohl in unserem Beispiel die tatsächlichen Verhältnisse bei einer impulsartigen Anregung von Erschütterungen, wo wir es nicht mit einigen wenigen Frequenzen, sondern mit einem Frequenzband zu tun haben, nur sehr vereinfacht und primitiv durch drei Teilwellen angedeutet sind, erkennt man daraus doch schon das Wesen der beobachteten « Periodenverlängerung ». Es handelt sich hierbei nicht um einen realen, physikalischen Effekt, sondern um ein Scheinproblem. Die Verlängerung der « Periode » einer impulsartigen Erschütterung mit der Entfernung ist einzig und allein eine Folge verschieden starker Amplitudenverringernng hinsichtlich der Frequenz.

Aus den obigen Darlegungen ergibt sich aber auch, dass die dem Seismogramm eines Impulses entnommene « Periode » kein einfacher, physikalisch sauber definierter Begriff ist. Daher wird man auch zu Fehlschlüssen geführt, wenn man mit ihm wie mit der Periode eines sinusförmigen, monofrequenten Wellenzuges rechnet.

Es sei in diesem Zusammenhang auch daran erinnert, dass z. B. die Seismogramme der gleichen Sprengung registriert am gleichen Beobachtungsort von zwei verschieden abgestimmten Seismographen verschiedene « Perioden » enthalten, obwohl sie derselben Bodenbewegung entstammen. Wenn also die durch Ausmessen der Abstände der Umkehrpunkte eines Seismogrammes ermittelte « Periode » einer Erschütterung

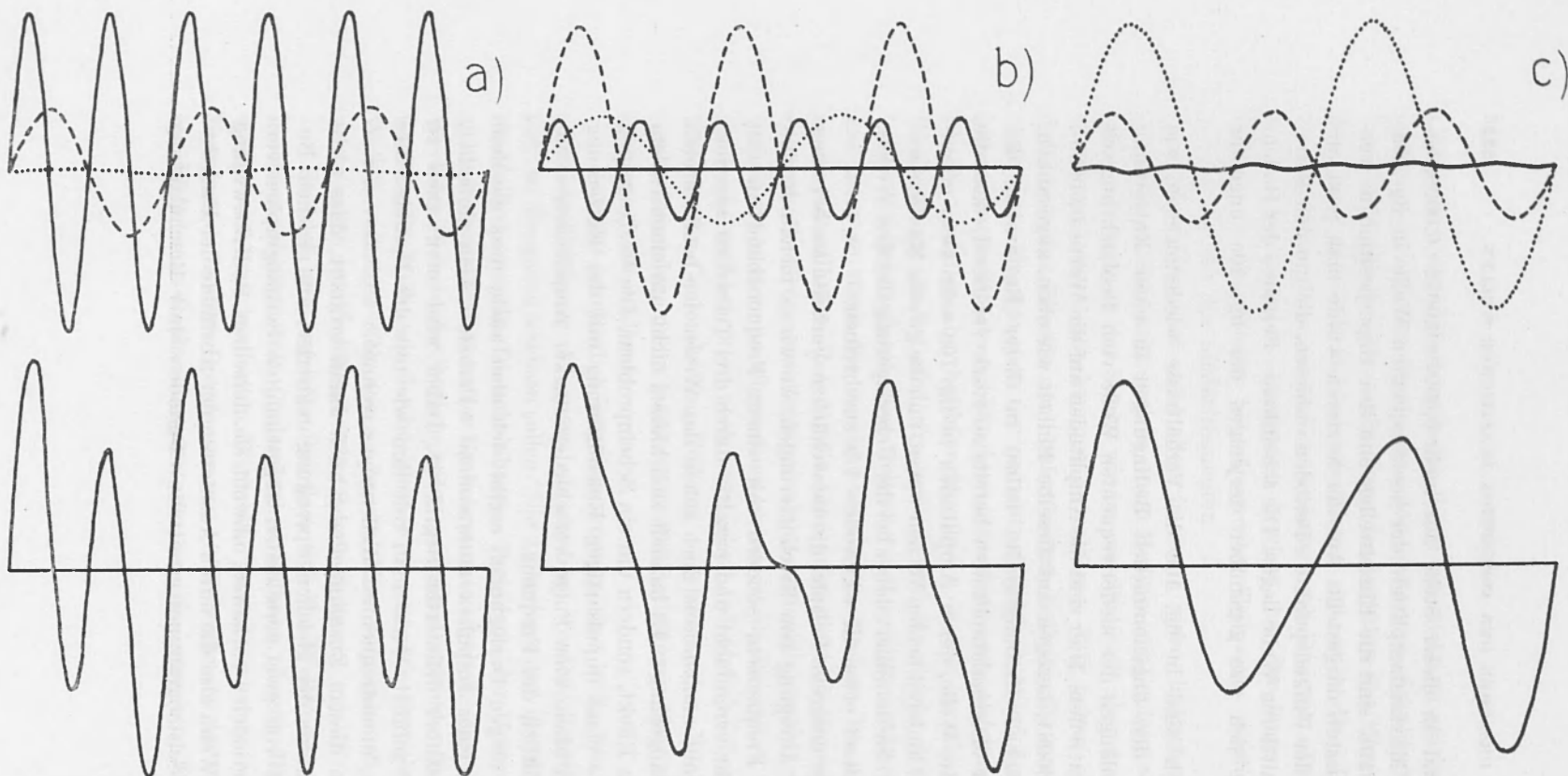


Fig. 10 a. - Überlagerung (unten) dreier monofrequenter Wellenzüge (oben) der Frequenzen  $n$ ,  $2n$  und  $3n$ . Ihre Maximalamplituden sind:  $a_1 = 0,02$ ,  $a_2 = 0,4$  und  $a_3 = 1,0$  Einheiten. — Der Ueberlagerung wurde man etwa eine «Periode» von  $1/3n$  zuschreiben.

Fig. 10 b. - Überlagerung (unten) derselben ebenen Wellen (oben), nachdem sie in einem Medium mit Coulombscher Reibung (Reibungskoeffizient  $r = 0,1$ ) eine Entfernung von 10 Wellenlängen der niederfrequenten Welle mit gleicher Geschwindigkeit zurückgelegt haben. Die Maximalamplituden berechnen sich nun zu:  $a_1 = 0,0027$ ,  $a_2 = 0,0072$  und  $a_3 = 0,0025$  Einheiten von Fig. 10 a. Hier wurde man der Überlagerung eine «Periode» von ungefähr  $1/2n$  zusprechen.

Fig. 10 c. - Überlagerung (unten) der gleichen Wellen (oben) nach weiteren 10 Wellenlängen der niederfrequenten Welle. Die Maximalamplituden haben auf die Werte  $a_1 = 0,00036$ ,  $a_2 = 0,00014$  und  $a_3 = 0,0000061$  Einheiten abgenommen. Die Überlagerung besitzt jetzt die «Periode»  $1/n$ .

in zum Teil starkem Masse vom Empfangsgerät beeinflusst wird, so darf sie nicht ohne weiteres als physikalische Grösse angesehen und behandelt werden. Baule (1948) hat ein Seismogramm einer kleinen Sprengung veröffentlicht, das die Aufzeichnungen von vier verschiedenen, an der gleichen Stelle aufgestellten Erschütterungsmessern enthält. Dieses Seismogramm begründet das eben Gesagte sehr anschaulich. In den Registrierungen treten nämlich jeweils diejenigen « Perioden » in Erscheinung, die in der Nähe der Maxima der Fourierschen Amplitudenspektren der Aufzeichnungen liegen. Die Amplitudenspektren der Aufzeichnungen eines Seismographen stellen aber das Produkt der Amplitudenspektren der wahren Bodenbewegung mit der Resonanzkurve des Empfangsgerätes dar. Auf die schwerer zu durchschauende Wirkung der frequenzabhängigen Phasenverschiebung der Seismographen auf die « Perioden » der Aufzeichnungen wollen wir hier nicht eingehen.

In Gegensatz zu impulsartigen Erschütterungen wird eine mono-frequente Welle, wie sie von einer Schwingmaschine erzeugt wird, von den verschiedensten Seismographen immer mit der ihr eigenen Periode aufgezeichnet, sofern die Amplitude der Welle gross genug ist, um bei der vorgegebenen Vergrösserung des Gerätes noch aufgeschrieben zu werden. Auf diesen experimentellen Befund gründen sich eben die Ueberlegungen, auf denen die Impulstechnik ihre Rechnungen aufbaut. Hieraus entspringt auch die physikalische Bedeutung der Fourieranalyse.

### ZUSAMMENFASSUNG

*Elastische Wellen in ausgedehnten Körpern und elastische Schwingungen von Platten und Stäben sind sehr verwandt. Sie werden beide durch das elastische Verhalten der Materie bestimmt. Es ist daher nicht verwunderlich, dass bei beiden Vorgängen die Energieverluste auf die gleiche Ursache zurückzuführen sind. Dies hat zur Folge, dass die prozentuale Energieabnahme pro Schwingungsperiode und diejenige pro Wellenlänge einander gleich sind. Die physikalischen Grössen, die diese Energieabnahme charakterisieren, nämlich der Dämpfungskoeffizient (= logarithmisches Dekrement der gedämpften Schwingung) und der auf eine Wellenlänge als Masseinheit für die Entfernung bezogene Absorptionskoeffizient, müssen somit gleich gross sein. Damit ist aber die Möglichkeit gegeben, auch elastische Schwingungen von Gesteinsproben zur Erforschung der Absorptionsursache von Wellen mit heranzuziehen. Solche Messungen liegen bereits in grosser Zahl vor, während reine Absorptionsmessungen an Wellen spärlich sind. Grundsätzlich sind,*

was durch die Beobachtungen bestätigt wird, die Absorptionskoeffizienten nicht auf die Phasenwellenlänge, sondern auf die Gruppenwellenlänge zu beziehen.

Die bisher vorliegenden, zahlreichen Beobachtungsergebnisse bestätigen alle ohne Ausnahme folgende Feststellungen:

1. Die Ausbreitungsgeschwindigkeit der elastischen Wellen wird durch die Ursache der Absorption nicht beeinflusst. Sie ist unabhängig von der Frequenz.

2. Die maximale Auslenkung eines stationären, sinusförmigen Wellenzuges nimmt mit der Entfernung nach einem Exponentialgesetz ab. Der auf die Gruppenwellenlänge bezogene Absorptionskoeffizient ist von der Frequenz unabhängig. Für alle Wellenarten muss er dieselbe Grösse haben.

Zur physikalischen Deutung der Absorption elastischer Wellen wurde im Laufe der Zeit eine Reihe von Theorien entwickelt. Eine davon geht von der bereits im vergangenen Jahrhundert untersuchten elastischen Nachwirkung fester Körper aus. Bei einer Deformation durch eine konstante Kraft erreicht ein Körper die endgültige Veränderung seiner Gestalt erst nach einer gewissen Zeit. Diese Erscheinung wurde sinngemäss von Sokoloff und Skriabin (1938) und Menzel (1954) auf elastische Wellen übertragen. Diese Theorie vermag aber die Beobachtungen, vor allem die Forderung des obigen Punktes 2, nicht zu befriedigen.

Am verbreitetsten ist wohl die Theorie der Visko-Elastizität, die auch noch als « internal friction » oder « firmo-viscosity » bezeichnet wird. Nach dieser Theorie sollen im festen Körper neben den rein elastischen Spannungen auch noch solche auftreten, welche der zeitlichen Aenderung der Deformation proportional sind und welche die Energieverminderung der Wellen bewirken sollen. Die Rechnungen ergeben jedoch, dass der Absorptions- und der Dämpfungskoeffizient bezogen auf eine Wellenlänge bzw. eine Schwingungsperiode als Masseinheit linear mit der Frequenz zunehmen müsste. Normalerweise müsste in einem solchen Medium schon bei 500 Hz die Absorption bzw. Dämpfung so stark sein, dass keine Wellenbewegungen und keine Schwingungen mehr möglich wären, während nach den Beobachtungen noch elastische Schwingungen von Gesteinsproben bei 100.000 Hz möglich sind. Obwohl diese Theorie nicht im entferntesten die Messergebnisse erklären kann und vielen Schwierigkeiten bei ihren Deutungsversuchen begegnet, erfreut sie sich bei vielen Seismologen trotz mancher, schon seit geraumer Zeit erhobener Einwände unerklärlicherweise grosser Sympathien.

Eine weitere Theorie geht von der Annahme aus, dass die Kräfte, welche die Absorption bewirken sollen, proportional der Geschwindigkeit, die den Bodenteilchen beim Durchgang einer elastischen Welle erteilt wird, sein

sollen. Auch hier wird keine Uebereinstimmung zwischen Theorie und Beobachtungen erzielt.

Born (1941) ist an Hand von sauberen Dämpfungsbeobachtungen an Gesteinsstäben zu der Ueberzeugung gekommen, dass die Dämpfung elastischer Schwingungen durch Coulombsche Reibungskräfte verursacht sein muss, die bei den Relativbewegungen der Elementarteilchen auftreten. Fortsch (1953b) ist bei der Untersuchung von Absorptionsmessungen an elastischen Wellen zu derselben Ansicht gekommen. Die vom Verfasser entwickelte Theorie der Coulombschen Reibung addiert zu den rein elastischen Kräften bei der Aufstellung der Beziehungen des elastischen Gleichgewichtes noch die Reibungskräfte, die proportional dem Absolutbetrag aller wirksamen Kräfte gesetzt werden. Der Proportionalitätsfaktor wird als Reibungskoeffizient bezeichnet. Für die Absorption elastischer Wellen wirksam bleiben, wie die mathematische Ableitung der Theorie zeigt, nur die Beträge der von der Wellenbewegung hervorgerufenen Normal- und Tangentialspannungen. Die Reibungskräfte wechseln sprunghaft jede halbe Wellenlänge ihr Vorzeichen. Es gilt jeweils dasjenige Vorzeichen, das den Reibungskräften erlaubt, den Wellen Energie zu entziehen.

Die Ausbreitungsgeschwindigkeit elastischer Wellen wird durch die Coulombsche Reibung praktisch nicht beeinflusst. Obwohl ein Wellenzug beim Vorhandensein solcher Kräfte nicht durch einen geschlossenen mathematischen Ausdruck dargestellt werden kann (s. fig. 8b), liegen doch seine Umkehrpunkte auf einer mit der Entfernung abnehmenden Exponentialkurve. Der auf eine Wellenlänge bezogene Absorptionskoeffizient ist praktisch doppelt so gross wie der Reibungskoeffizient. Er ist von der Frequenz unabhängig. Die Theorie der Coulombschen Reibung erfüllt somit alle Forderungen, die von den Beobachtungen an die Theorien gestellt werden, woraus wiederum zu folgern ist, dass die Coulombsche Reibung die wahre Ursache der Absorption elastischer Wellen ist.

Die scheinbare « Periodenverlängerung » wie sie bei der Ausbreitung impulsartiger Erschütterungen beobachtet wird, wird oft als Folge eines risiko-elastischen Verhaltens der Materie des Erdkörpers gedeutet. Eine tatsächliche Verlängerung von Perioden eines sinusförmigen Wellenzuges ist nicht möglich und wird auch an monofrequenten Wellen nicht beobachtet. Die « Periodenverlängerung », wie sie beim Betrachten von Seismogrammen von Erdbeben und Sprengungen augenfällig in Erscheinung tritt, ist nur ein Effekt selektiver Absorption. Diese ist auch in Medien mit Coulombschen Reibungskräften vorhanden. Auch in dieser Hinsicht kann die Theorie der Coulombschen Reibung die Beobachtungen erklären.

## RIASSUNTO

*Le onde elastiche in corpi estesi e le vibrazioni elastiche delle lamine e delle verghe sono strettamente connesse. Dato che entrambi i fenomeni dipendono dal comportamento elastico del materiale, non è da meravigliarsi che le perdite di energia in entrambi i casi possano derivare dalla stessa causa fisica. Perciò la perdita percentuale di energia per periodo di vibrazione e quella per lunghezza d'onda sono uguali. Perciò le quantità fisiche che caratterizzano queste perdite di energia, cioè il coefficiente di smorzamento (decremento logaritmico della vibrazione smorzata) e il coefficiente di assorbimento in relazione ad una lunghezza d'onda come unità di scala, devono essere uguali. Ciò dà la possibilità di utilizzare le vibrazioni elastiche degli esemplari naturali di roccia per l'investigazione dell'assorbimento delle onde. Nella letteratura, tali misure di propagazione sono comparativamente rare. Le osservazioni mostrano che, soprattutto i coefficienti di assorbimento, non possono essere in relazione alla lunghezza d'onda di fase ma alla lunghezza d'onda di gruppo*

*I numerosi risultati delle osservazioni permettono i seguenti rilievi:*

1. *La velocità delle onde elastiche non è influenzata dall'assorbimento. Non dipende dalla frequenza.*

2. *La massima ampiezza di un percorso d'onda stazionario e sinusoidale diminuisce con la distanza secondo una regola esponenziale. Il coefficiente di assorbimento in relazione alla lunghezza d'onda di gruppo è indipendente dalla frequenza. Numericamente deve essere la stessa per tutti i tipi di onde.*

*Nel passato è stato sviluppato un insieme di teorie per spiegare il carattere fisico di assorbimento delle onde elastiche. Una di esse parte dall'elasticità susseguente dei solidi, già conosciuta nel secolo passato.*

*Deformato da una forza costante, un corpo non ottiene la sua variazione finale di forma prima di un intervallo di tempo fissato. Analogamente questo fenomeno è stato trasferito alle onde elastiche da Sokoloff e Skriabin (1938) e da Menzel (1954). Questa teoria non può soddisfare le osservazioni e non soddisfa i requisiti del sopra citato n. 2.*

*La teoria più diffusa è quella della visco-elasticità o, come è anche chiamata, la teoria dell'« attrito interno » o « firmo-viscosità ». Secondo questa teoria si afferma che tali tensioni sono da considerare come tensioni elastiche proporzionali alla variazione della deformazione col tempo, ciò che causa le perdite di energia oscillatoria. Il calcolo ci mostra comunque che il*

coefficiente di assorbimento e di smorzamento in relazione ad una lunghezza d'onda, rispettivamente di un periodo di vibrazione, dovrebbe ingrandirsi linearmente con la frequenza. Normalmente l'assorbimento, e rispettivamente lo smorzamento, a circa 500 cicli per secondo, dovrebbe raggiungere un ammontare tale che nessun movimento d'onde e nessuna vibrazione potrebbero aver luogo. Al contrario, le osservazioni mostrano che sono possibili le vibrazioni elastiche dei campioni naturali di roccia a circa 100.000 cicli per secondo. Nonostante questa teoria sia incapace di spiegare i risultati delle misure, ed incontri molte difficoltà negli sforzi di interpretazione, nondimeno molti sismologi la accettano malgrado le ripetute obiezioni.

Un'altra teoria parte dalla supposizione che le forze considerate causa dell'assorbimento, dovrebbero essere proporzionali alla velocità che è impressa alle particelle del solido, al passaggio di un'onda elastica. Qui non c'è troppa concordanza tra la teoria e la osservazione. Born (1941) osservò sperimentalmente lo smorzamento di esemplari di roccia. Egli trovò che lo smorzamento deve essere causato non dalle forze di visco-elasticità, ma dalle forze dell'attrito di Coulomb, il secondo essendo prodotto dai movimenti relativi delle particelle del solido. Förtsch (1953 b) giunse alle stesse conclusioni studiando l'assorbimento delle onde elastiche di superficie. La teoria dell'attrito di Coulomb, sviluppata dall'autore, stabilisce le relazioni dell'equilibrio elastico, quando alle forze elastiche si aggiungono quelle dell'attrito di Coulomb, che deve essere proporzionale al valore assoluto di tutte le forze agenti. Il fattore di proporzionalità è chiamato coefficiente di attrito. Come il trattamento matematico della teoria dimostra, solo il complesso delle tensioni normali e tangenziali causate dalla propagazione dell'onda sono importanti per l'assorbimento delle onde elastiche. Per ogni metà di lunghezza d'onda le forze dell'attrito di Coulomb subiscono un discontinuo cambiamento di segno. Si trova sempre che quel segno permette alle forze dell'attrito di Coulomb di sottrarre energia alle onde elastiche. Praticamente l'attrito di Coulomb non influenza la velocità delle onde elastiche. Sebbene un insieme di onde non possa essere descritto da una singola espressione matematica (vedere fig. 8 b), i suoi punti di inversione nondimeno giacciono su una curva esponenziale decrescente con la distanza. Il coefficiente di assorbimento in relazione ad una lunghezza d'onda è quasi due volte il coefficiente dell'attrito di Coulomb. È indipendente dalla frequenza. Così l'attrito di Coulomb soddisfa tutti i requisiti che l'osservazione richiede alla teoria. Di conseguenza l'attrito di Coulomb può essere considerato come la vera origine dell'assorbimento delle onde elastiche. Le osservazioni di scosse elastiche a forma di impulsi mostrano un'apparente aumento di periodo. Molto spesso questo fenomeno si spiega come un risultato del comportamento visco-ela-

stico dei solidi. Un reale aumento di periodo in un insieme di onde sinoidali non è possibile e non è stato osservato nelle onde a monofrequenza. L'aumento di periodo, come si osserva nei sismogrammi dei terremoti e delle esplosioni, è causato solo dall'assorbimento selettivo. Anche questo effetto è prodotto dalle forze dell'attrito di Coulomb (vedere fig. 10). Così anche in questa direzione la teoria dell'attrito di Coulomb è in accordo con l'osservazione.

### SUMMARY

*Elastic waves in extended bodies and elastic vibrations of plates and rods are closely related. Since both phenomena depend on the elastic behaviour of the material, it is not astonishing that the losses of energy in both cases may be derived from the same physical source. Therefore the percentage loss of energy per vibration-period and that per wave-length are equal. Hence the physical quantities characterizing these losses of energy, i. e. the coefficient of damping (— logarithmic decrement of the damped vibration) and the coefficient of absorption in relation to one wavelength as unit of scale, must be equal. This gives the possibility of utilizing elastic vibrations of natural rock-specimens for the investigation of wave-absorption. In literature such measurements on travelling waves are comparatively rare. Observations verify that principally the coefficients of absorption may be related not to phase-wavelength but to group-wavelength.*

*The numerous results of observations allow the following statement:*

1. *The velocity of elastic waves is not influenced by absorption. It does not depend on frequency.*

2. *The maximum amplitude of a stationary, sinusoidal wavetrain decreases with distance according to an exponential law. The coefficient of absorption in relation to the group-wavelength is independent of frequency. Numerically it must be the same for all kinds of waves.*

*In the past there have been developed quite a number of theories to explain the physical character of absorption of elastic waves. One of them starts from the elastic afterworking of solids already known in the past century. Being deformed by a constant force, a body does not obtain its final deviation of shape before a lapse of a certain time. In analogy this phenomenon has been transformed to elastic waves by Sokoloff and Skriabin (1938) and by Menzel (1954). This theory is not able to satisfy the observations, and does not satisfy the requirements of the above mentioned point 2.*

*The most popular theory is that of visco-elasticity, or, as it is also called, the theory of "internal friction" or "firmo-viscosity". According*

to this theory such stresses are said to appear amongst elastic stresses that are proportional to variation of the deformation with times, and that cause the losses of wave-energy. The calculation however shows that the coefficient of absorption and of damping in relation to one wavelength, respectively one period of vibration, should increase linearly with frequency. Normally in such medium the absorption, respectively damping, at about 500 cycles per second should reach such an amount that no waves-motions and no vibrations could take place. On the contrary observations show that elastic vibrations of rock-specimens at about 100.000 cycles per second are possible. Notwithstanding this theory is completely unable to explain the results of measurements and meets many difficulties in efforts of interpretation, many seismologists nevertheless accept it in spite of repeated objections in course of time.

Another theory starts from the assumption that the forces said to produce absorption, should be proportional to the velocity which is imparted to the particles of the solid by the passing of an elastic wave. Here too no accordance exists between theory and observation.

Born (1941) experimentally observed damping of rock-rods. He found that damping must be caused not by visco-elastic forces, but by Coulomb-friction forces, the latter being produced by relative motions of particles of the solid. Förtsch (1953 b) came to the same conclusions by studying absorption of elastic surface-waves. The theory of Coulomb-friction, developed by the author, gives when setting up the relations of elastic equilibrium, additionally to the elastic forces those of Coulomb-friction which must be proportional to the absolute value of all acting forces. The factor of proportionality is called coefficient of friction. As the mathematical treatment of the theory demonstrates, only the amounts of normal and tangential stresses caused by wave-propagation are of importance for the absorption of elastic waves. Every half wavelength the coulomb-friction forces undergo a discontinuous change of sign. That sign is always found that allows the Coulomb-friction forces to withdraw energy from elastic waves.

Practically Coulomb-friction does not influence the velocity of elastic waves. Although a train of waves cannot be described by a single mathematical expression (see fig. 8b) its turning-points nevertheless lie on an exponential curve decreasing with distance. The coefficient of absorption in relation to one wavelength is very nearly twice the coefficient of Coulomb-friction. It is independent of frequency. Thus the Coulomb-friction fulfills all requirements that observation demands from theory. Consequently Coulomb-friction can be regarded as the true source of absorption of elastic waves.

*Observations of pulse-like elastic shocks show an apparent increase of period. Very often this phenomenon is explained as result of visco-elastic behaviour of the solids. A real increase of period in a sinusoidal wave-train is not possible and has not been observed in monofrequent waves. The increase of period, as observable on seismograms of earthquakes and explosions, is caused only by selective absorption. This effect too is produced by Coulomb-friction forces (see fig. 10). Thus in this direction also the theory of Coulomb-friction is in accordance with observation.*

## BIBLIOGRAPHIE

- (1) ANGENHEISTER, G., *Seismische Registrierungen in Göttingen im Jahre 1905.* Nachr. d. K. Ges. d. Wiss. zu Göttingen, Math.-phys. Kl. 1906, H. 4. S. 1-60.
- (2) ANGENHEISTER, G., und SCHNEIDER, W., *Messungen der Erschütterungen von Boden und Gebäuden, hervorgerufen durch Maschinen und Fahrzeuge.* Zeitschr. f. techn. Physik. 9. Jahrg., Nr. 3, S. 115-118 (1928).
- (3) BAULE, H., *Seismische Instrumente. Naturforschung und Medizin in Deutschland 1939-1946.* Bd. 18, Geophysik, Teil II. Dieter. Verl.-Buchh. Wiesbaden (1948) S. 57-65.
- (4) BIRCH, F., and BANCROFT, D., *Elasticity and Internal Friction in a Long Column of Granite.* Bull. Seism. Soc. Am., Vol. 28 (1938) pp. 243-254.
- (5) BORN, W. T., *The Attenuation Constant of Earth Materials.* Geophysics, Vol. VI (1941), pp. 132-148.
- (6) FÖRTSCH, O., *Das Verhalten noch freistehender Brückenpfeiler bei Schwingungen und deren Abhängigkeit vom Untergrund.* Zeitschr. f. Geophys. Jahrg. 14 (1938), S. 173-197.
- (7) — *Ableitung des von der Frequenz unabhängigen Absorptionskoeffizienten aus Maschinenschwingungen.* Zeitschr. f. Geophys. Jahrg. 16 (1940), S. 57-84.
- (8) — *Untersuchungen von Biegewellen in Platten. Messung ihrer Gruppen- und Phasengeschwindigkeit.* Gerl. Beitr. Geophys. Bd. 61 (1950), S. 272-290.
- (9) — *Deutung von Dispersions- und Absorptionsbeobachtungen an Oberflächenwellen.* Gerl. Beitr. Geophys. Bd. 63 (1953 a), S. 16-58.
- (10) — *Beiträge zur Ausbreitung elastischer Oberflächenwellen.* Zeitschr. f. Geophys. Sonderbd. (1953 b), S. 59-67.
- (11) GASSMANN, F., WEBER, M., und VÖGTLI, K., *Beitrag zur Ermittlung der innern Dämpfung (Werkstoffdämpfung) von Gesteinsstäben.* Mitteil. aus d. Inst. f. Geophysik d. E.T.H. Zurich Nr. 22 (1952), S. 5-8.
- (12) GUTENBERG, B., *Über die Fortpflanzung von elastischen Wellen in viskosen Medien.* Phys. Zeitschr. Bd. 30 (1929), S. 230-231.

- (13) GUTENBERG, B., *Theorie der Erdbebenwellen*. Handb. d. Geophysik Bd. IV (1932), Verl. Gebr. Borntraeger, Berlin. S. 1-150.
- (14) — *Observations and Theory of Microseisms*. Compendium of Meteorology (1951), pp. 1303-1311.
- (15) GUTENBERG, B., und SCHLECHTWEG, H., *Viskosität und innere Reibung fester Körper*. Phys. Zeitschr. Bd. 31 (1930), S. 745-752.
- (16) HARDTWIG, E., *Über die Wellenausbreitung in einem visko-elastischen Medium*. Zeitschr. f. Geophys. Jahrg. 18 (1943/14), S. 1-20.
- (17) — *Oberflächenwellen in energieverzehrenden Medien*. Annali di Geofis. vol. VII (1954), S. 143-193.
- (18) HELLBARDT, G., *Seismische Versuche auf einer Eisplatte*. Zeitschr. f. Geophys. Jahrg. 21 (1955), S. 41-47.
- (19) HONDA, K., and KONNO, S., *On the Determination of the Coefficient of Normal Viscosity of Metals*. Phil. Mag., ser. 6, vol. 42 (1921), pp. 115-123.
- (20) KIM BALL, A. L., and LOVELL, D. E., *Internal Friction in Solids*. Phys. Rev. vol. 30 (1927).
- (21) KLOTTER, K., *Schwingungslehre*. 2. Aufl. 1. Bd. Berlin 1951, Springer Verl.
- (22) LANDOLT-BORNSTEIN, *Physikalisch-Chemische Tabellen*. 5. Aufl. Berlin 1923, Springer Verl.
- (23) MENZEL, H., *On the Propagation of Seismic Waves in a Solid Body with Elastic Afterworking*. Geophys. Prospecting, vol. II (1954 a) pp. 139-150.
- (24) — *Über die Fortpflanzung seismischer Wellen in einem Festkörper mit elastischer Nachwirkung*. (Autorenreferat eines Vortrages). Erdöl und Kohle, 7. Jahrg. (1954 b), S. 93.
- (25) MINTROP, L., *Über die Ausbreitung der von den Massendrücken einer Grossgasmashine erzeugten Bodenschwingungen*. Diss. Göttingen (1911) S. 1-33.
- (26) MUNK, W. II., *Note on Period Increase of Waves*. Bull. seism. Soc. Amer., vol. 39 (1949), pp. 41-45.
- (27) RAMSPECK, A., und SCHULZE, G. A., *Die Dispersion elastischer Wellen im Boden*. Veröffentlichung d. Inst. d. Deutschen Forschungsges. f. Bodenmechanik a.d.T.H. Berlin, Heft 6 (1938). Verl. Springer, Berlin. S. 1-27.
- (28) REGULA, W., *Untersuchungen elastischer Eigenschaften von Gesteinsstäben*. Zeitschr. f. Geophys., Jahrg. 16 (1940), S. 40-56.
- (29) RICKER, N., *The Form and Nature of Seismic Waves and the Structure of Seismograms*. Geophysics, vol. 5 (1940), pp. 348-366.
- (30) SCHULZE, G. A., *Über die Ausbreitung sinusformiger Bodenbewegung*. Zeitschr. f. Geophys., Jahrg. 11 (1935), S. 307-321.
- (31) SEZAWA, K., *On the Transmission of Seismic Waves on the Bottom Surface of the Ocean*. Bull. Earthq. Res. Inst. Tokyo, vol. 9 (1931), pp. 115-143.

- (31) SOKOLOFF, P. T., and SKRIABIN, V. I., *Experimental and Theoretical Investigations on Dispersion and Absorption of Elastic Waves*. Gerl. Beitr. z. Geophysik, Bd. 49 (1937), S. 165-198.
- (32) SUYEHIRO, K., *On the Damped Transversal Vibration of Prismatic Bars*. Bull. Earthq. Res. Inst. Tokyo, vol. 6 (1929), pp. 63-70.
- (33) THYSSSEN, St. v., und RULKE, O., *Beschreibung des neuen Gerätes zur Bestimmung der Fortpflanzungsgeschwindigkeit elastischer Wellen in Gesteinsproben und einige Messergebnisse*. Zeitschr. f. Geophys., Jahrg. 15 (1939), S. 130-140.
- (34) WEGEL, R. L., and WALTHER, H., *Internal Dissipation in solids for Small Cyclic Strains*. Physics, vol. 6 (1929), pp. 141-157.
- (35) WIECHERT, E., *Theorie der automatischen Seismographen*. Abhandl. d. K. Ges. d. Wiss. zu Göttingen, Math.-Phys. Kl., Neue Folge Bd. II, Berlin 1903, Weidmannsche Buchh., S. 1-128.
- (36) WINKEL, F., *Impulstechnik*. Berlin 1956, Springer. Verl.