

RICERCHE ELETTRO-IDROLOGICHE CON POLARIZZAZIONI INDOTTE

A. BELLUIGI

In questa Nota non intendiamo ripercorrere criticamente i numerosi precedenti sull'argomento, che risalgono a contributi internazionali (italiani compresi), da più di venti anni, riservando di far ciò estesamente in altro momento.

Vogliamo qui ricollegarci ai recenti lavori di Vacquier (¹), del '54 e del '56, perchè, pur non potendo convenire in tutto nelle sue teorie del meccanismo dei fenomeni in esame, si deve riconoscere un notevole sforzo per la messa a punto del metodo di « Prospecting for Ground water by Induced Electrical Polarization », che dalla fase di Laboratorio è già a quella applicativa sul terreno per la ricerca diretta dell'acqua dolce.

Diamo una prima giustificazione teorica dei risultati sperimentali concernenti la cosiddetta: (P.P.) — polarizzazione provocata — o (P.I.) — polarizzazione indotta —, in terreni acquigeni, senza far ricorso a meccanismi troppo condizionati da ipotesi lito-chimico-fisiche (come quelle appunto del Vacquier, subordinanti gli effetti P.P. ad es. alle « aliquote d'argilla » con films d'acqua adsorbita).

Una più estesa sperimentazione modellometrica ha fatto da tempo rilevare infatti, che tale condizionamento, se pur sufficiente, non è affatto necessario. Prescindendo per il momento dunque dall'intimo meccanismo chimico-fisico determinante l'insorgenza di caratteristiche « celle geoelettriche », ci proponiamo qui d'applicare a queste una delle tante teorie fisiche classiche (Maxwell, Hartshorn, Wagner), formulate nel passato per rendersi conto delle « correnti anomali » di scarica nei dielettrici debolmente conduttivi, trattati con (c. c.). Si perviene con ciò a *risultati* qualitativi e quantitativi *sufficientemente concordanti con l'esperienza, mostrandosi altresì l'apporto del « potere induttore specifico » del materiale terroso, oltre che della sua conduttività elettrica* (²), analogamente a quanto già fatto con l'impiego di correnti variabili per altri fini.

§ 1) Partiamo dal modello che una fase fluida, disseminata in un mezzo polidisperso, quale il suolo, equivale, con buona approssimazione, da un punto di vista elettrico, ad una rete di resistenze ohmiche shun-

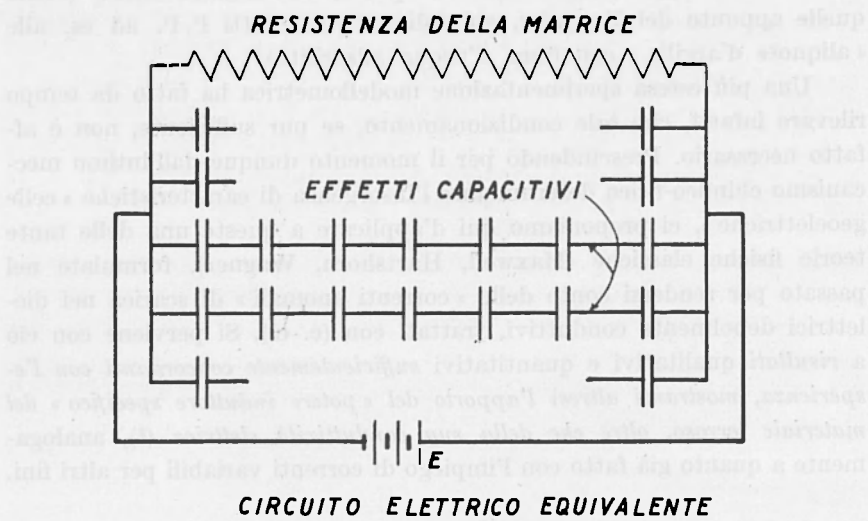
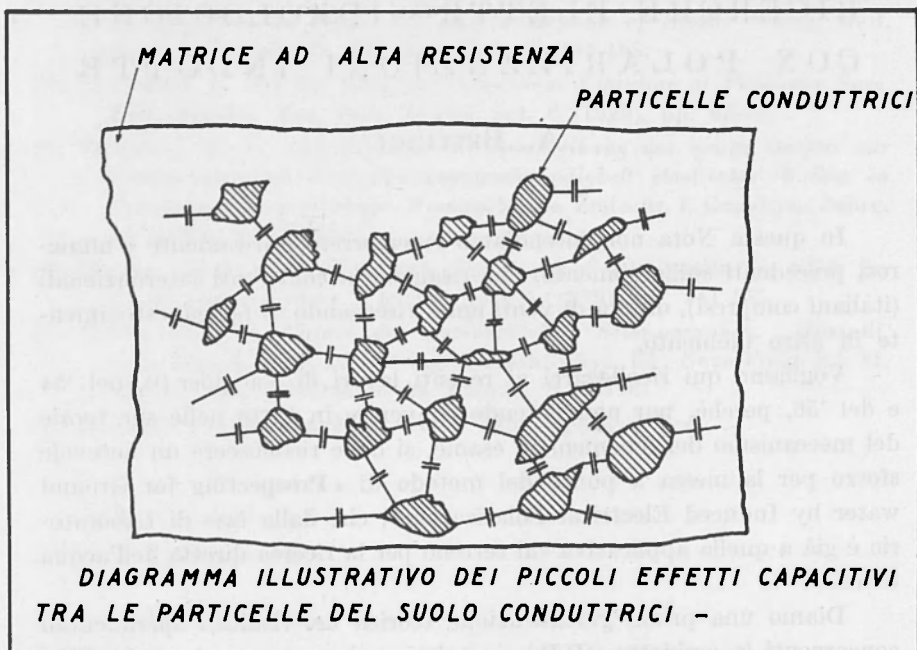


Fig. 0

tate con un certo numero di piccolissime capacità connesse in serie multiple.

Esaminiamo allora uno di queste « celle elettriche equivalenti », nelle condizioni più semplici rappresentative, di spessore e superficie unitari, con dielettrico costitutivo inizialmente da due straterelli (1, 2) come in fig. 1, combacianti verticalmente, con conducibilità e potere induttore specifico rispettivi: (σ, ε_1) , $(\sigma_2, \varepsilon_2)$.

Le superfici esterne di ciascuna singola cella siano completamente aderenti a due elettrodi metallici superficiali, ai quali si applichi bruscamente una tensione elettrica continua: (E) . In ogni istante la corrente totale, attraversante i due mezzi debolmente conduttori, deve risultare la stessa, e se s'indicano con E , E_1 , E_2 i campi elettrici (c. e.) agli elettrodi e quelli rispettivi ai mezzi (1, 2), si scriverà: $E_1 + E_2 = E$,

$$\frac{dE_1}{dt} = - \frac{dE_2}{dt}$$

$$\sigma_1 E_1 + \varepsilon_1 \frac{dE_1}{dt} = \sigma_2 E_2 + \varepsilon_2 \frac{dE_2}{dt} , \quad [0]$$

con $\varepsilon \frac{dE}{dt}$ proporzionale alla polarizzazione elettrica, variabile da mezzo a mezzo, massima con materiale dipolare permanente quale quello dell'acque potabili. Eliminando E_2 si passa alla:

$$(\varepsilon_1 + \varepsilon_2) \frac{dE_1}{dt} + (\sigma_1 + \sigma_2) E = \sigma_2 E , \quad [1]$$

dove la (P. I.) è ovviamente funzione di: E , σ_1 , σ_2 , ε_1 , ε_2 , t .

Poichè l'equazione omogenea associata alla [1] ammette la soluzione: $E_1(t) = A \exp. \left[- \frac{\sigma_1 + \sigma_2}{\varepsilon_1 + \varepsilon_2} t \right]$, con $A = \text{cost. arbitraria}$, che, com'è noto, aggiunta ad un integrale particolare qualsiasi dell'equazione non omogenea da l'integrale generale, e poichè il termine noto è costante, tale equazione ammette un'integrale del tipo $(E_1 = K)$, da cui sostituendo in [1] si ha: $K = \frac{\sigma_2 E}{\sigma_1 + \sigma_2}$, e l'integrale generale risulta pertanto:

$$E_1(t) = \frac{\sigma_2 E}{\sigma_1 + \sigma_2} + A \exp. \left[- \frac{\sigma_1 + \sigma_2}{\varepsilon_1 + \varepsilon_2} t \right] . \quad [2]$$

Ma all'istante $t = 0$, $\varepsilon_1 E_1(0) = \varepsilon_2 E_2(0)$; $E_1(0) + E_2(0) = E$, inquanto al momento dell'applicazione della f. e. m. E , sono i valori di

permittività che regolano la ripartizione delle tensioni agli estremi dei mezzi, quindi:

$$E_1(0) = \frac{\varepsilon_2 E}{\varepsilon_1 + \varepsilon_2} \quad , \quad E_2(0) = \frac{\varepsilon_1 E}{\varepsilon_1 + \varepsilon_2} \quad ,$$

e dalla [2]:

$$A = E \left(\frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1 + \varepsilon_2} - \frac{\sigma_2}{\sigma_1 + \sigma_2} \right) \quad .$$

I campi di (P. I.) nei due mezzi della « cella » saranno:

$$E_1(t) = \frac{\sigma_2 E}{\sigma_1 + \sigma_2} + E \left(\frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1 + \varepsilon_2} - \frac{\sigma_2}{\sigma_1 + \sigma_2} \right) \exp. \left[- \frac{\sigma_1 + \sigma_2}{\varepsilon_1 + \varepsilon_2} t \right] \quad [3]$$

$$E_2(t) = \frac{\sigma_1 E}{\sigma_1 + \sigma_2} - E \left(\frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1 + \varepsilon_2} - \frac{\sigma_2}{\sigma_1 + \sigma_2} \right) \exp. \left[- \frac{\sigma_1 + \sigma_2}{\varepsilon_1 + \varepsilon_2} t \right] \quad [4]$$

Notiamo che $E_1(t)$ risulta rispettivamente decrescente, costante, o crescente nel tempo, a seconda si abbiano le condizioni:

$$\frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1 + \varepsilon_2} - \frac{\sigma_2}{\sigma_1 + \sigma_2} \begin{cases} > 0 \\ = 0 \\ < 0 \end{cases} \quad , \quad \varepsilon_2 \sigma_1 \begin{cases} > \\ = \\ < \end{cases} \varepsilon_1 \sigma_2 \quad . \quad [4']$$

In corrispondenza di questi tre casi, $E_2(t)$ è crescente, costante o decrescente nel tempo, sempre con una componente « indipendente dal tempo ».

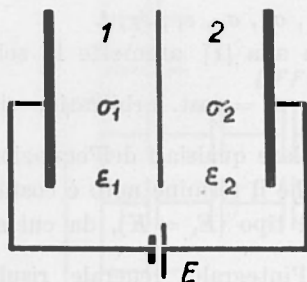


Fig. 1

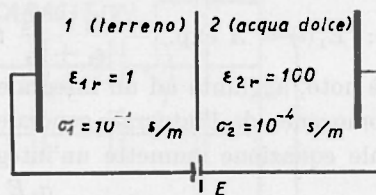


Fig. 2

In altri termini, poichè la carica elettrica alla superficie di separazione dei due mezzi a contatto nella « cella » è proporzionale a: $(\varepsilon_2 \sigma_1 - \varepsilon_1 \sigma_2)$, il cambiamento di segno di questa espressione comporta uno scambio tra crescita e decrescenza dei campi $E_1(t)$, $E_2(t)$, scam-

bio che può d'altra parte avvenire semplicemente con quello della posizione reciproca dei due mezzi.

La densità di corrente che attraversa la cella coincide, a causa della sezione unitaria, con la corrente totale:

$$i(t) = \frac{\sigma_1 \sigma_2 E}{(\sigma_1 + \sigma_2)} + \frac{(\varepsilon_2 \sigma_1 - \sigma_1 \varepsilon_2)^2}{(\varepsilon_1 + \varepsilon_2)^2 (\sigma_1 + \sigma_2)} \exp. \left[- \frac{\sigma_1 + \sigma_2}{\varepsilon_1 + \varepsilon_2} t \right] \quad [4'']$$

ed è decrescente, col tempo, in ogni caso.

Precisate con i simboli $(\varepsilon_{1r}, \varepsilon_{2r})$ le permittività relative dei mezzi (1, 2), i vettori polarizzazione elettrica si deducono subito dai (c. e.), mediante le note relazioni:

$$P_1 = (\varepsilon_{1r} - 1) E_1 \quad , \quad P_2 = (\varepsilon_{2r} - 1) E_2 \quad .$$

Dopo la brusca applicazione della f. e. m. (E) dunque, il mezzo [2], a minor conducibilità, si carica attraverso una resistenza elevata, quella del mezzo —1—, e il meccanismo inverso s'attua ovviamente nella scarica per cui il mezzo a minor conducibilità si scarica attraverso —1—. Un calcolo identico a quello qui fatto per la carica, mette appunto in evidenza un termine esponenziale nella corrente di scarica, ma, ripetiamo, i fenomeni sono ben più complessi nella realtà, e l'esperienza sembra fornire leggi non propriamente esponenziali.

Wagner ha schematizzato il mezzo dielettrico con una matrice $(\varepsilon_1 \sigma_1)$ contenente piccole sferule $(\varepsilon_2 \sigma_2)$. Si può ammettere, in tal caso, che la deformazione del campo prodotta nell'interno del mezzo [1] da una sferula del mezzo [2], sia indipendente (per la loro piccolezza), dalla presenza di altre sferule. Il risultato è che la corrente anormale è rappresentata anche qui da un esponenziale della forma:

$$\exp. (-t/T) \quad , \quad T = (2 \varepsilon_1 + \varepsilon_2) / (2 \sigma_1 + \sigma_2)$$

con potere induttore specifico del complesso:

$$\varepsilon = \varepsilon_1 \left(1 - 3p \frac{\varepsilon_1 + \varepsilon_2}{2 \varepsilon_1 + \varepsilon_2} \right)$$

(p) indicando il rapporto del volume delle sferule a quello totale. Nel caso che le sfere non siano identiche, ma corrispondenti ad un certo numero di sostanze diverse, Wagner trova che la corrente nel dielettrico dipende dalla Σ di più termini esponenziali, aventi ciascuno una costante di tempo corrispondente alle diverse sostanze.

a) Qualora la fase —1— è solida impermeabile con i parametri: $(\epsilon_{1r} = 1, \sigma_1 = 10^{-1} \text{ S/m.})$, a contatto con una «fase d'acqua dolce» —2—: $(\epsilon_{2r} = 100, \sigma_2 = 10^{-4} \text{ S/m.})$, (v. fig. 2) si avranno, nel sistema Giorgi, i seguenti campi:

$$E_1(t) = E \left[0,999 \cdot 10^{-3} + 0,9899 \exp. (-1,119 \cdot 10^8 t) \right]$$

$$E_2(t) = E \left[0,999 - 0,9899 \exp. (-1,119 \cdot 10^8 t) \right] .$$

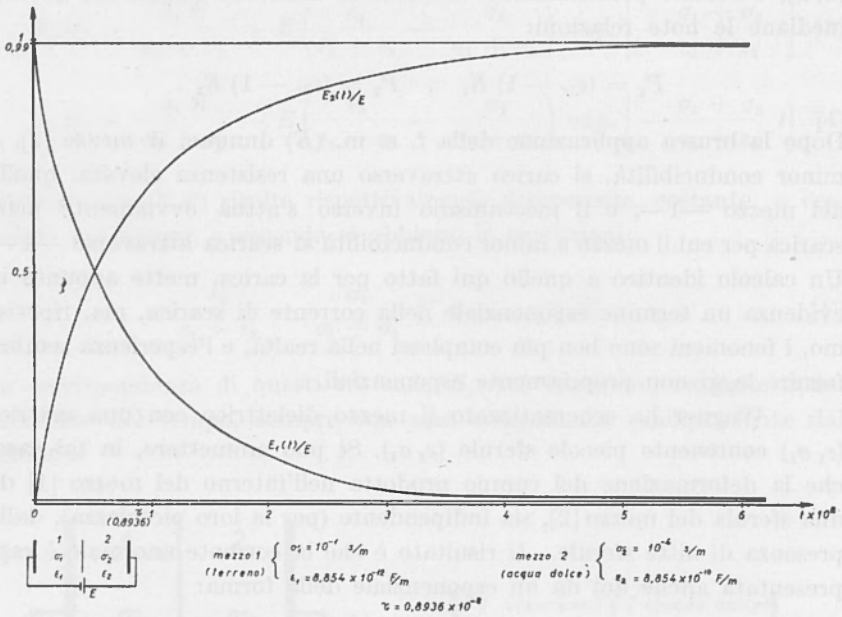


Fig. 3

La fig. 3 mostra che $E_1(t)$ decresce col tempo, da $E_1(0) = 0,9908 E$, a $E_1(\infty) = 0,999 \cdot 10^{-3} E$ mentre $E_2(t)$, (campo relativo alla fase acqua dolce), cresce asintoticamente col tempo, da $E_2(0) = 0,0091 E$, a: $E_2(\infty) = 0,999 E$, con: $\epsilon_2 \sigma_1 - \epsilon_1 \sigma_2 = 8,854 \cdot 10^{-11} > 0$.

È bene rilevare l'entità relativa dei coefficienti delle [3], [4]:

$$\frac{\epsilon_2}{\epsilon_1 + \epsilon_2} = 0,99 \quad , \quad \frac{\sigma_2}{\sigma_1 + \sigma_2} = 0,999 \cdot 10^{-3} ,$$

quindi la loro differenza: 0,9899 è dominata dal rapporto delle *costanti dielettriche*, e così dicasi per:

$$\frac{\sigma_1 + \sigma_2}{\epsilon_1 + \epsilon_2} = \frac{0,1001}{8,94 \cdot 10^{-10}} = 1,119 \cdot 10^8.$$

Invertendo l'ordine dei due mezzi rispetto alla direzione del campo applicato, si scambiano tra di loro anche i campi, in modo che l'anda-

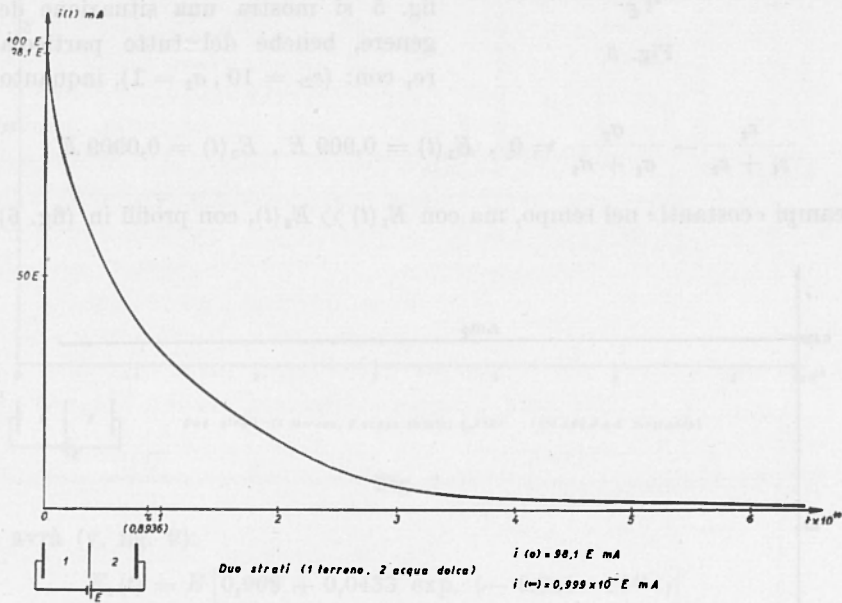


Fig. 4

mento caratteristico del campo nelle due plaghe rimane identico al caso precedente. Un rilievo importante è pure che mentre all'istante iniziale i due (c. e.) stanno tra loro in rapporto inverso alle permittività:

$$\frac{E_1(0)}{E_2(0)} = \frac{\epsilon_2}{\epsilon_1},$$

(il fenomeno avviene cioè in modo puramente elettrostatico), per $t \rightarrow \infty$, i (c. e.) stanno tra loro in rapporto inverso alle

conduttività:

$$\frac{E_1(\infty)}{E_2(\infty)} = \frac{\sigma_2}{\sigma_1}.$$

La « corrente totale » (v. fig. 4) decrescente si calcola dalla [4'']:

$$i(t) = E \left[0,999 \cdot 10^{-4} + 0,0981 \exp. (-1,119 \cdot 10^8 t) \right] \text{ Amp. ,}$$

e così i « vettori di polarizzazione »:

$$P_1 = (\epsilon_{1r} - 1) = 0, P_2 = E_2 [98,901 - 98 \exp. (-1,119 \cdot 10^8 t)] .$$

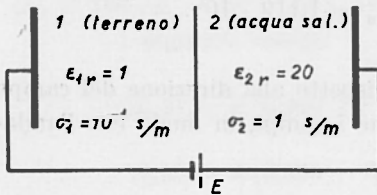


Fig. 5

β) Fermo restando il mezzo [1], sostituiamo alla « fase d'acqua dolce » una di « acqua salata », o di conduttore qualsiasi, i risultati saranno ben diversi dai precedenti. Nella fig. 5 si mostra una situazione del genere, benchè del tutto particolare, con: $(\epsilon_{2r} = 10, \sigma_2 = 1)$, inquanto:

$$\frac{\epsilon_2}{\epsilon_1 + \epsilon_2} - \frac{\sigma_2}{\sigma_1 + \sigma_2} = 0, E_1(t) = 0,909 E, E_2(t) = 0,0909 E,$$

campi « costanti » nel tempo, ma con $E_1(t) \gg E_2(t)$, con profili in (fig. 6).

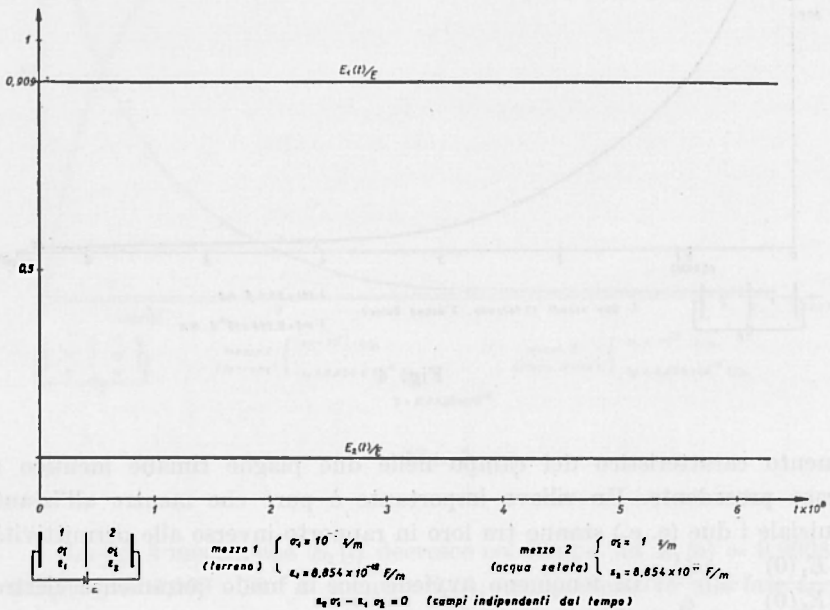


Fig. 6

Così la corrente totale risulta costante (v. fig. 7): $i(t) = 0,0909 E$, e i vettori di polarizzazione: $P_1 = 0, P_2 = 9 E_2$. Ponendoci sempre nello stesso caso, ma in condizioni più generali, variando allora legger-

mente i parametri elettrici della fase d'acqua salata ($\epsilon_2 = 20, \sigma_2 = 1$ S/m.) v. fig. 8; in modo che risulti ($\epsilon_2 \sigma_1 - \epsilon_1 \sigma_2 \neq 0$), ossia:

$$\frac{\epsilon_2}{\epsilon_1 + \epsilon_2} - \frac{\sigma_2}{\sigma_1 + \sigma_2} = 0,0433 ,$$

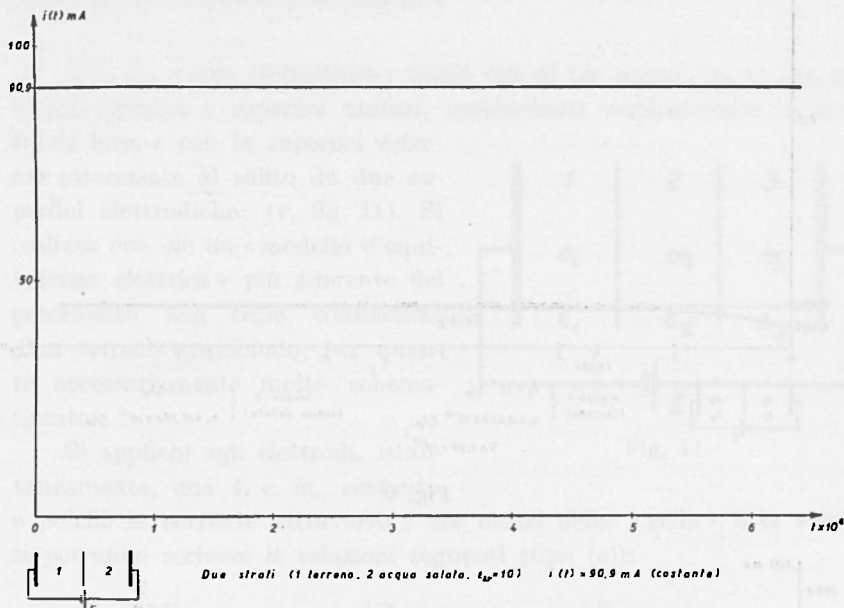


Fig. 7

si avrà (v. fig. 9):

$$\begin{aligned} E_1(t) &= E \left[0,909 + 0,0433 \exp. (-0,621 \cdot 10^{10} t) \right] \\ E_2(t) &= E \left[0,0909 - 0,0433 \exp. (-0,621 \cdot 10^{10} t) \right] \\ E_1(0) &= 0,9523 E \quad , \quad E_1(\infty) = 0,909 E \\ E_2(0) &= 0,0476 E \quad , \quad E_2(\infty) = 0,0909 E \end{aligned}$$

Il c. e. $E_1(t)$ appare quasi costante, solo leggermente decrescente, $E_2(t)$ s'incrementerà anch'esso debolmente, in accordo coll'osservazione [4']: $\epsilon_2 \sigma_1 - \epsilon_1 \sigma_2 = 88,54 \cdot 10^{-11} > 0$; la « corrente » attraversante i mezzi e i (v. fig. 10), « vettori di polarizzazione » in tal caso saranno:

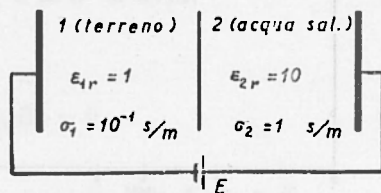


Fig. 8

$$i(t) = E \left[0,0909 + 0,002061 \exp. (-0,621 \cdot 10^{10} t) \right] , P_1 = 0 , P_2 = 19 E_2 .$$

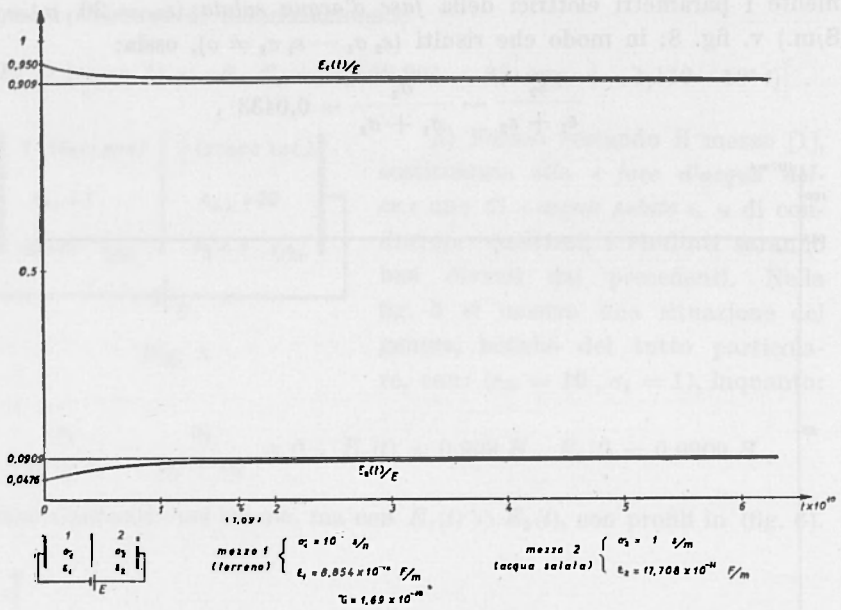


Fig. 9

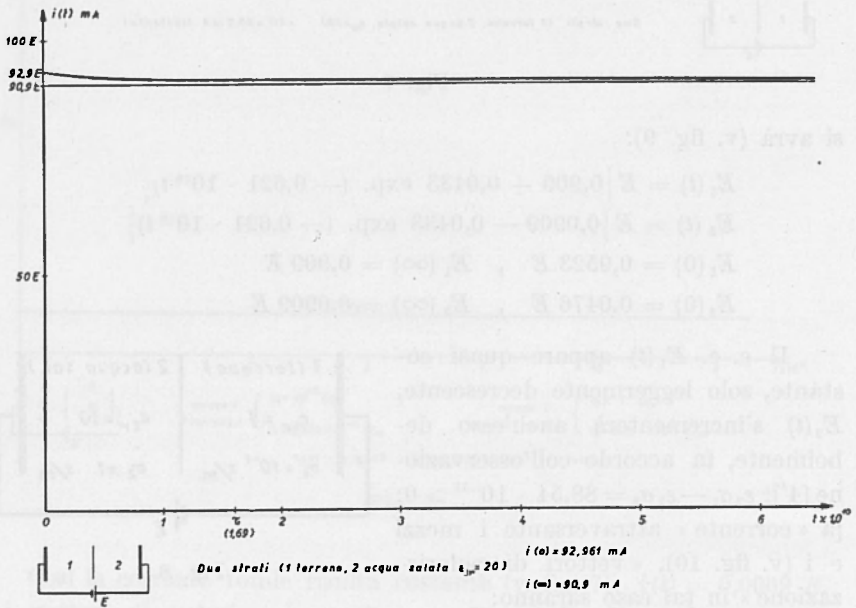


Fig. 10

La scarica, togliendo bruscamente il campo d'eccitazione, non segnerà più un lento andamento di decrescenza col tempo, a partire dal distacco del (c. e.), come per l'acqua dolce (fig. 3), ma s'adeguerà rapidamente a zero conforme all'esperienza: (guizzo quasi verticale all'oscillografo dell'*elettrorelassametro*).

§ 2) La « cella elementare » risulti ora di tre mezzi: $(\epsilon_1 \sigma_1)$, $(\epsilon_2 \sigma_2)$, $(\epsilon_3 \sigma_3)$, spessori e superfici unitari, combacianti verticalmente in serie tra di loro, e con le superfici estreme interessate al solito da due superfici elettrodiche: (v. fig. 11). Si realizza con ciò un « modello d'equivalenza elettrica » più aderente del precedente alla reale consistenza d'un terreno acquicludo, per quanto necessariamente molto schematizzato.

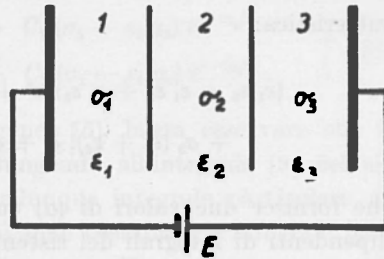


Fig. 11

Si applichi agli elettrodi, istantaneamente, una f. e. m. costante, e poichè la corrente attraverso i tre mezzi della « cella » è la stessa, si potranno scrivere le relazioni seguenti (tipo (o)):

$$\sigma_1 E_1 + \epsilon_1 \frac{dE_1}{dt} = \sigma_2 E_2 + \epsilon_2 \frac{dE_2}{dt} = \sigma_3 E_3 + \epsilon_3 \frac{dE_3}{dt} , \text{ ove: } E_1 , E_2 , E_3 ,$$

(c. e.) nell'interno dei mezzi, tali che:

$$E_1 + E_2 + E_3 = E , \quad \frac{dE_1}{dt} + \frac{dE_2}{dt} + \frac{dE_3}{dt} = 0 ,$$

soddisfacenti il sistema delle tre equazioni indipendenti ricavabili dalle precedenti. Eliminando (E_3) tra la 1^a e la 3^a si avrà:

$$E_3 = E - E_1 - E_2$$

$$\epsilon_1 \frac{dE_1}{dt} - \epsilon_2 \frac{dE_2}{dt} + \sigma_1 E_1 - \sigma_2 E_2 = 0 \tag{5}$$

$$(\epsilon_1 + \epsilon_3) \frac{dE_1}{dt} + \epsilon_3 \frac{dE_2}{dt} + (\sigma_1 + \sigma_3) E_1 + \sigma_3 E_2 = \sigma_3 E .$$

Il sistema omogeneo associato [5'] che s'identica con [5] ponendo $E = 0$ nella terza equazione, ammette soluzioni tipo $E_1 = \varrho_1 e^{at}$,

$E_2 = \varrho_2 e^{at}$, con $a_1, \varrho_1, \varrho_2$, costanti opportune, ϱ_1, ϱ_2 , non entrambe nulle.

Sostituendo in [5'], dividendo per (e^{at}) , e ordinando:

$$\begin{aligned} (\varepsilon_1 a + \sigma_2) \varrho_1 - (\varepsilon_2 a + \sigma_2) \varrho_2 &= 0 \\ \left[(\varepsilon_1 + \varepsilon_2) a + \sigma_1 + \sigma_3 \right] \varrho_1 + (\varepsilon_3 a + \sigma_3) \varrho_2 &= 0 \end{aligned} \quad [6]$$

sistema lineare omogeneo in ϱ_1, ϱ_2 , che ammette soluzioni non nulle se il determinante dei coefficienti della [6] è nullo, da cui l'equazione caratteristica:

$$\begin{aligned} (\varepsilon_1 \varepsilon_2 + \varepsilon_1 \varepsilon_3 + \varepsilon_2 \varepsilon_3) a^2 + \left[\sigma_1 (\varepsilon_1 + \varepsilon_3) + \sigma_2 (\varepsilon_1 + \varepsilon_3) + \right. \\ \left. + \sigma_3 (\varepsilon_1 + \varepsilon_2) \right] a + \sigma_1 \sigma_2 + \sigma_1 \sigma_3 + \sigma_2 \sigma_3 = 0, \end{aligned} \quad [7]$$

che fornisce due valori di (a) cui corrispondono altrettanti sistemi indipendenti di integrali del sistema.

Supponiamo che le radici della [7] siano reali e distinte: esse sono negative, come si vede esaminando i coefficienti dell'equazione, indichiamole con $(-a_1), (-a_2), (a_1, a_2 > 0)$. In corrispondenza di questi due valori il sistema [6] diviene:

$$\begin{aligned} (\sigma_1 - \varepsilon_1 a_1) \varrho_1 - (\sigma_2 - \varepsilon_2 a_1) \varrho_2 &= 0 \\ \left[(\sigma_1 + \sigma_3) - (\varepsilon_1 + \varepsilon_3) a_1 \right] \varrho_1 + (\sigma_3 - \varepsilon_3 a_1) \varrho_2 &= 0 \end{aligned} \quad \left. \vphantom{\begin{aligned} (\sigma_1 - \varepsilon_1 a_1) \varrho_1 - (\sigma_2 - \varepsilon_2 a_1) \varrho_2 = 0 \\ \left[(\sigma_1 + \sigma_3) - (\varepsilon_1 + \varepsilon_3) a_1 \right] \varrho_1 + (\sigma_3 - \varepsilon_3 a_1) \varrho_2 = 0 \end{aligned}} \right\} [6']$$

$$\begin{aligned} (\sigma_1 - \varepsilon_1 a_2) \varrho_1 - (\sigma_2 - \varepsilon_2 a_2) \varrho_2 &= 0 \\ \left[(\sigma_1 + \sigma_3) - (\varepsilon_1 + \varepsilon_3) a_2 \right] \varrho_1 + (\sigma_3 - \varepsilon_3 a_2) \varrho_2 &= 0 \end{aligned} \quad \left. \vphantom{\begin{aligned} (\sigma_1 - \varepsilon_1 a_2) \varrho_1 - (\sigma_2 - \varepsilon_2 a_2) \varrho_2 = 0 \\ \left[(\sigma_1 + \sigma_3) - (\varepsilon_1 + \varepsilon_3) a_2 \right] \varrho_1 + (\sigma_3 - \varepsilon_3 a_2) \varrho_2 = 0 \end{aligned}} \right\} [6'']$$

Ciascuno di questi due sistemi ammette infinite soluzioni, che possono ottenersi risolvendo la prima equazione di ciascun sistema. Per il sistema [6'] otteniamo, dalla prima equazione: $\varrho_1 / (\sigma_2 - \varepsilon_2 a_1) = \varrho_2 / (\sigma_1 - \varepsilon_1 a_1)$, e possiamo assumere: $\varrho_1 = \sigma_2 - \varepsilon_2 a_1, \varrho_2 = \sigma_1 - \varepsilon_1 a_1$, cui corrisponde il sistema d'integrali:

$$E_{11} = (\sigma_2 - \varepsilon_2 a_1) e^{-a_1 t}, \quad E_{21} = (\sigma_1 - \varepsilon_1 a_1) e^{-a_1 t}$$

per il sistema differenziale (5').

Dal sistema [6''] si ha:

$$\varrho_1 / (\sigma_2 - \varepsilon_2 a_2) = \varrho_2 / (\sigma_1 - \varepsilon_1 a_2), \quad \varrho_1 = \sigma_2 - \varepsilon_2 a_2, \quad \varrho_2 = \sigma_1 - \varepsilon_1 a_2$$

da cui si deduce il sistema di integrali:

$$E_{12} = (\sigma_2 - \varepsilon_2 a_2) e^{-a_2 t} \quad , \quad E_{22} = (\sigma_1 - \varepsilon_1 a_2) e^{-a_2 t} .$$

Allora l'integrale generale di [5'], si ottiene, dette C_1 e C_2 due costanti arbitrarie, ponendo:

$$E_1 = C_1 E_{11} + C_2 E_{12} \quad , \quad E_2 = C_1 E_{21} + C_2 E_{22} \quad ,$$

cioè:

$$\left. \begin{aligned} E_1(t) &= C_1 (\sigma_2 - \varepsilon_2 a_1) e^{-a_1 t} + C_2 (\sigma_2 - \varepsilon_2 a_2) e^{-a_2 t} \\ E_2(t) &= C_1 (\sigma_1 - \varepsilon_1 a_1) e^{-a_1 t} + C_2 (\sigma_1 - \varepsilon_1 a_2) e^{-a_2 t} . \end{aligned} \right\} [8]$$

Per risolvere il sistema non omogeneo [5], basta osservare che il suo integrale generale si ottiene, aggiungendo all'integrale [8] del sistema omogeneo associato [5'], un qualunque integrale particolare di [5]. Osservando che i termini noti di [5] sono costanti, un'integrale particolare sarà dato da: $E_1 = h$, $E_2 = K$, con h , K , opportune costanti. Sostituendo in [5] si deduce:

$$\sigma_1 h = \sigma_2 K \quad , \quad (\sigma_1 + \sigma_3) h + \sigma_3 K = \sigma_3 E \quad ,$$

da cui:

$$h = \frac{\sigma_2 \sigma_3 E}{\sigma_1 \sigma_2 + \sigma_1 \sigma_3 + \sigma_2 \sigma_3} \quad , \quad K = \frac{\sigma_1 \sigma_3 E}{\sigma_1 \sigma_2 + \sigma_1 \sigma_3 + \sigma_2 \sigma_3} .$$

Di conseguenza l'integrale generale di [5] si scrive:

$$E_1(t) = \frac{\sigma_2 \sigma_3 E}{\sigma_1 \sigma_2 + \sigma_1 \sigma_3 + \sigma_2 \sigma_3} + C_1 (\sigma_2 - \varepsilon_2 a_1) e^{-a_1 t} + C_2 (\sigma_2 - \varepsilon_2 a_2) e^{-a_2 t}$$

$$E_2(t) = \frac{\sigma_1 \sigma_2 E}{\sigma_1 \sigma_2 + \sigma_1 \sigma_3 + \sigma_2 \sigma_3} + C_1 (\sigma_1 - \varepsilon_1 a_1) e^{-a_1 t} + C_2 (\sigma_1 - \varepsilon_1 a_2) e^{-a_2 t}$$

$$\begin{aligned} E_3(t) &= \frac{\sigma_1 \sigma_2 E}{\sigma_1 \sigma_2 + \sigma_1 \sigma_3 + \sigma_2 \sigma_3} - C_1 \left[(\sigma_1 + \sigma_2) - (\varepsilon_1 + \varepsilon_2) a_1 \right] e^{-a_1 t} - \\ &\quad - C_2 \left[(\sigma_1 + \sigma_2) - (\varepsilon_1 + \varepsilon_2) a_2 \right] e^{-a_2 t} . \end{aligned}$$

Per determinare le costanti C_1 e C_2 osserviamo che all'istante ($t = 0$):

$$\varepsilon_1 E_1(0) = \varepsilon_2 E_2(0) = \varepsilon_3 E_3(0) \quad , \quad E_1(0) + E_2(0) + E_3(0) = E \quad ,$$

da cui:

$$E_1(o) = \frac{\varepsilon_2 \varepsilon_3 E}{\varepsilon_1 \varepsilon_2 + \varepsilon_1 \varepsilon_3 + \varepsilon_2 \varepsilon_3}, \quad E_2(o) = \frac{\varepsilon_1 \varepsilon_3 E}{\varepsilon_1 \varepsilon_2 + \varepsilon_1 \varepsilon_3 + \varepsilon_2 \varepsilon_3},$$

$$E_3(o) = \frac{\varepsilon_1 \varepsilon_2 E}{\varepsilon_1 \varepsilon_2 + \varepsilon_2 \varepsilon_3 + \varepsilon_2 \varepsilon_3}.$$

Tenendo conto delle due prime condizioni (la 3^a è conseguenza di esse):

$$E_1(o) = \frac{\sigma_1 \sigma_2 E}{\sigma_1 \sigma_2 + \sigma_1 \sigma_3 + \sigma_2 \sigma_3} + C_1 (\sigma_2 - \varepsilon_2 a_1) + C_2 (\sigma_2 - \varepsilon_2 a_2) =$$

$$= \frac{\varepsilon_2 \varepsilon_3 E}{\varepsilon_1 \varepsilon_2 + \varepsilon_1 \varepsilon_3 + \varepsilon_2 \varepsilon_3}$$

$$E_2(o) = \frac{\sigma_1 \sigma_3 E}{\sigma_1 \sigma_2 + \sigma_1 \sigma_3 + \sigma_2 \sigma_3} + C_1 (\sigma_1 - \varepsilon_1 a_1) + C_2 (\sigma_1 - \varepsilon_1 a_2) =$$

$$= \frac{\varepsilon_1 \varepsilon_2 E}{\varepsilon_1 \varepsilon_2 + \varepsilon_1 \varepsilon_3 + \varepsilon_2 \varepsilon_3}$$

da cui:

$$\left. \begin{aligned} & C_1 (\sigma_2 - \varepsilon_2 a_1) + C_2 (\sigma_2 - \varepsilon_2 a_2) = \\ & = E \left[\frac{\varepsilon_2 \varepsilon_3}{\varepsilon_1 \varepsilon_2 + \varepsilon_1 \varepsilon_3 + \varepsilon_2 \varepsilon_3} - \frac{\sigma_2 \sigma_3}{\sigma_1 \sigma_2 + \sigma_1 \sigma_3 + \sigma_2 \sigma_3} \right] \\ & C_1 (\sigma_1 - \varepsilon_1 a_1) + C_2 (\sigma_1 - \varepsilon_1 a_2) = \\ & = E \left[\frac{\varepsilon_1 \varepsilon_3}{\varepsilon_1 \varepsilon_2 + \varepsilon_1 \varepsilon_3 + \varepsilon_2 \varepsilon_3} - \frac{\sigma_1 \sigma_3}{\sigma_1 \sigma_2 + \sigma_1 \sigma_3 + \sigma_2 \sigma_3} \right] \end{aligned} \right\} [9]$$

Il determinante dei coefficienti di [9] è: $(\sigma_1 \varepsilon_2 - \sigma_2 \varepsilon_1) \cdot (a_2 - a_1)$, quindi:

$$C_1 = \frac{E}{a_2 - a_1} \left[\frac{\varepsilon_3}{\varepsilon_1 \varepsilon_2 + \varepsilon_1 \varepsilon_3 + \varepsilon_2 \varepsilon_3} - \frac{\sigma_3 a_2}{\sigma_1 \sigma_2 + \sigma_1 \sigma_3 + \sigma_2 \sigma_3} \right]$$

$$C_2 = \frac{E}{a_1 - a_2} \left[\frac{\varepsilon_3}{\varepsilon_1 \varepsilon_3 + \varepsilon_1 \varepsilon_3 + \varepsilon_2 \varepsilon_3} - \frac{\sigma_3 a_1}{\sigma_1 \sigma_2 + \sigma_1 \sigma_3 + \sigma_2 \sigma_3} \right],$$

$$E_1(t) = \frac{\sigma_2 \sigma_3 E}{\sigma_1 \sigma_2 + \sigma_1 \sigma_3 + \sigma_2 \sigma_3} + \frac{E}{a_2 - a_1} \left(\frac{\varepsilon_3}{\varepsilon_1 \varepsilon_2 + \varepsilon_1 \varepsilon_3 + \varepsilon_2 \varepsilon_3} - \frac{\sigma_3 a_2}{\sigma_1 \sigma_2 + \sigma_1 \sigma_3 + \sigma_2 \sigma_3} \right) (\sigma_2 - \varepsilon_2 a_1) e^{-a_1 t} +$$

$$+ \frac{E}{a_1 - a_2} \left(\frac{\varepsilon_3}{\varepsilon_1 \varepsilon_2 + \varepsilon_1 \varepsilon_3 + \varepsilon_2 \varepsilon_3} - \frac{\sigma_3 a_1}{\sigma_1 \sigma_2 + \sigma_1 \sigma_3 + \sigma_2 \sigma_3} \right) (\sigma_2 - \varepsilon_2 a_2) e^{-a_2 t}$$

$$E_2(t) = \frac{\sigma_1 \sigma_3 E}{\sigma_1 \sigma_2 + \sigma_1 \sigma_3 + \sigma_2 \sigma_3} + \frac{E}{a_2 - a_1} \left(\frac{\varepsilon_3}{\varepsilon_1 \varepsilon_2 + \varepsilon_1 \varepsilon_3 + \varepsilon_2 \varepsilon_3} - \frac{\sigma_3 a_2}{\sigma_1 \sigma_2 + \sigma_1 \sigma_3 + \sigma_2 \sigma_3} \right) (\sigma_1 - \varepsilon_1 a_1) e^{-a_1 t} +$$

$$+ \frac{E}{a_1 - a_2} \left(\frac{\varepsilon_3}{\varepsilon_1 \varepsilon_2 + \varepsilon_1 \varepsilon_3 + \varepsilon_2 \varepsilon_3} - \frac{\sigma_3 a_1}{\sigma_1 \sigma_2 + \sigma_1 \sigma_3 + \sigma_2 \sigma_3} \right) (\sigma_1 - \varepsilon_1 a_2) e^{-a_2 t}$$

$$E_3(t) = \frac{\sigma_1 \sigma_2 E}{\sigma_1 \sigma_2 + \sigma_1 \sigma_3 + \sigma_2 \sigma_3} - \frac{E}{a_2 - a_1} \left(\frac{\varepsilon_3}{\varepsilon_1 \varepsilon_2 + \varepsilon_1 \varepsilon_3 + \varepsilon_2 \varepsilon_3} - \frac{\sigma_3 a_2}{\sigma_1 \sigma_2 + \sigma_1 \sigma_3 + \sigma_2 \sigma_3} \right) [\sigma_1 + \sigma_2 - (\varepsilon_1 + \varepsilon_2) a_1] e^{-a_1 t} -$$

$$- \frac{E}{a_1 - a_2} \left(\frac{\varepsilon_3}{\varepsilon_1 \varepsilon_2 + \varepsilon_1 \varepsilon_3 + \varepsilon_2 \varepsilon_3} - \frac{\sigma_3 a_1}{\sigma_1 \sigma_2 + \sigma_1 \sigma_3 + \sigma_2 \sigma_3} \right) [\sigma_1 + \sigma_2 - (\varepsilon_1 + \varepsilon_2) a_2] e^{-a_2 t}$$

La corrente totale che attraversa i tre mezzi è perciò:

$$i(t) = E \frac{\sigma_1 \sigma_2 \sigma_3}{\sigma_1 \sigma_2 + \sigma_1 \sigma_3 + \sigma_2 \sigma_3} +$$

$$+ \frac{E}{a_2 - a_1} \left[(\sigma_1 - \varepsilon_1 a_1) (\sigma_2 - \varepsilon_2 a_1) \left(\frac{\varepsilon_3}{\varepsilon_1 \varepsilon_2 + \varepsilon_1 \varepsilon_3 + \varepsilon_2 \varepsilon_3} - \frac{\sigma_3 a_2}{\sigma_1 \sigma_2 + \sigma_1 \sigma_3 + \sigma_2 \sigma_3} \right) e^{-a_1 t} - \right.$$

$$\left. - (\sigma_1 - \varepsilon_1 a_2) (\sigma_2 - \varepsilon_2 a_2) \left(\frac{\varepsilon_3}{\varepsilon_1 \varepsilon_2 + \varepsilon_1 \varepsilon_3 + \varepsilon_2 \varepsilon_3} - \frac{\sigma_3 a_1}{\sigma_1 \sigma_2 + \sigma_1 \sigma_3 + \sigma_2 \sigma_3} \right) e^{-a_2 t} \right]$$

e i vettori di polarizzazione si scriveranno:

$$P_1 = (\varepsilon_{1r} - 1) E_1, P_2 = (\varepsilon_{2r} - 1) E_2, P_3 = (\varepsilon_{3r} - 1) E_3$$

a) Applichiamo quanto sopra a qualche situazione spesso ricorrente nel terreno: *due strati argillosi uguali, impermeabili, racchiudenti una fase d'acqua dolce*: (v. fig. 12); con i seguenti parametri:

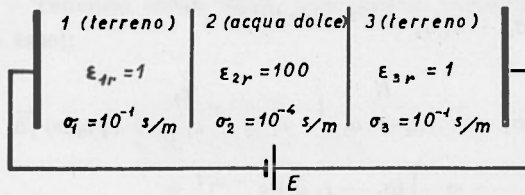


Fig. 12

$$\begin{aligned} \varepsilon_{1r} &= \varepsilon_{3r} = 1, \quad \sigma_1 = \\ &= \sigma_3 = 10^{-1} S/m., \quad \varepsilon_{2r} = \\ &= 100, \quad \sigma_2 = 10^{-6} S/m.: \\ &\text{le permittività assolu-} \\ &\text{te saranno: } \varepsilon_1 = \varepsilon_3 = \\ &= 8,854 \cdot 10^{-12} F/m; \\ &\varepsilon_2 = 8,854 \cdot 10^{-10} F/m. \end{aligned}$$

La [7] diviene:

$$1,575 \cdot 10^{-20} \alpha^2 + 1,788 \cdot$$

$10^{-10} \alpha + 1,002 \cdot 10^{-2} = 0$, il cui discriminante positivo vale $\Delta = 313,3818 \cdot 10^{-22}$; da cui, successivamente: $\alpha_1 = +5 \cdot 71 \cdot 10^7$, $\alpha_2 = +1,129 \cdot 10^{10}$, $C_1 = -9,98 E$, $C_2 = 6,995 \cdot 10^{-4} E$. Anche qui vogliamo notare il « peso relativo » dei vari coefficienti (di permittività e conduttività):

$$\frac{\varepsilon_3}{\varepsilon_1 \varepsilon_2 + \varepsilon_1 \varepsilon_3 + \varepsilon_2 \varepsilon_3} = 5,62 \cdot 10^8; \quad \frac{\sigma_3 \alpha_2}{\sigma_1 \sigma_2 + \sigma_1 \sigma_3 + \sigma_2 \sigma_3} = 11,267 \cdot 10^{10};$$

$$\frac{\sigma_3 \alpha_1}{\sigma_1 \sigma_3 + \sigma_1 \sigma_3 + \sigma_2 \sigma_3} = 56,99 \cdot 10^7$$

$$E_1(t) = E \left[0,998 \cdot 10^{-3} + 0,5035 e^{-5,7 \cdot 10^7 t} - 0,699 \cdot 10^{-2} e^{-1,128 \cdot 10^{10} t} \right],$$

$$E_2(t) = E \left[0,998 - 0,9929 e^{-5,7 \cdot 10^7 t} + 2,682 \cdot 10^{-8} e^{-1,129 \cdot 10^{10} t} \right],$$

$$E_3(t) = E \left[1,002 \cdot 10^{-3} + 0,4849 e^{-5,7 \cdot 10^7 t} - 0,699 \cdot 10^{-2} e^{-1,129 \cdot 10^{10} t} \right],$$

$$E_3(t) = E - E_1(t) - E_2(t).$$

Per quanto riguarda lo studio delle tre funzioni trovate, notiamo che possono trascurarsi i termini contenenti ($e^{-1,129 \cdot 10^{10} t}$), tenendo conto della relativa piccolezza dei loro coefficienti, e di quella della « costante di tempo », (dell'ordine di 10^{-10} sec), in confronto a quelli contenenti l'altro esponenziale.

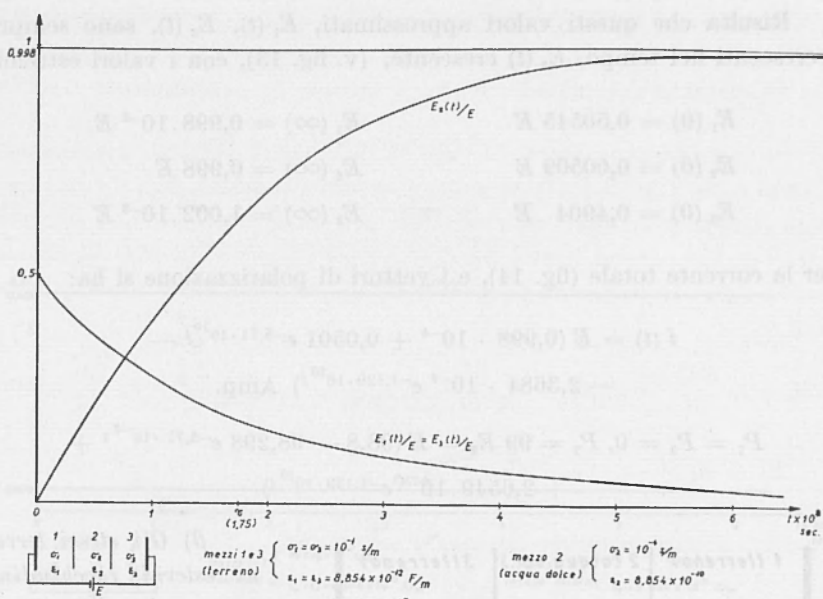


Fig. 13

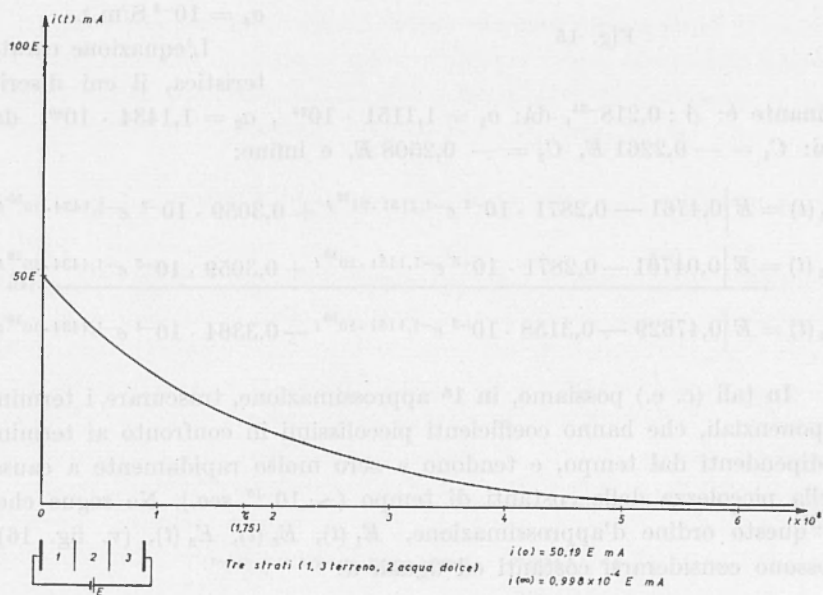


Fig. 14

Risulta che questi valori approssimati, $E_1(t)$, $E_3(t)$, sono sempre decrescenti nel tempo, $E_2(t)$ crescente, (v. fig. 13), con i valori estremi:

$$\begin{aligned} E_1(0) &= 0,50545 E & E_1(\infty) &= 0,998 \cdot 10^{-3} E \\ E_2(0) &= 0,00509 E & E_2(\infty) &= 0,998 E \\ E_3(0) &= 0,4904 E & E_3(\infty) &= 1,002 \cdot 10^{-3} E \end{aligned}$$

Per la corrente totale (fig. 14), e i vettori di polarizzazione si ha:

$$i(t) = E (0,998 \cdot 10^{-4} + 0,0501 e^{-5,71 \cdot 10^{10} t} - 2,3684 \cdot 10^{-9} e^{-1,129 \cdot 10^{10} t}) \text{ Amp.}$$

$$P_1 = P_3 = 0, P_2 = 99 E_2 = E (98,8 - 98,298 e^{-5,71 \cdot 10^{-7} t} + 2,6549 \cdot 10^{-8} e^{-1,129 \cdot 10^{10} t})$$

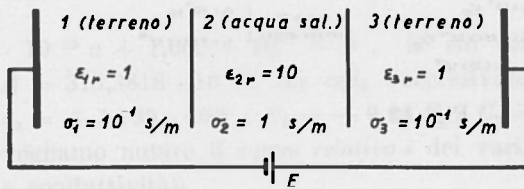


Fig. 15

β) Gli stessi terreni esterni racchiudono ora una fase di « acqua salata », (v. fig. 15), ($\epsilon_{1r} = \epsilon_{3r} = 1$, $\sigma_1 = \sigma_3 = 10^{-4}$ S/m., $\epsilon_{2r} = 10$, $\sigma_2 = 10^{-4}$ S/m.).

L'equazione caratteristica, il cui discriminante è: $\Delta : 0,218^{-24}$, dà: $\alpha_1 = 1,1151 \cdot 10^{21}$, $\alpha_2 = 1,1434 \cdot 10^{10}$, da cui: $C_1 = -0,2261 E$, $C_2 = -0,2508 E$, e infine:

$$E_1(t) = E \left[0,4761 - 0,2871 \cdot 10^{-2} e^{-1,1151 \cdot 10^{21} t} + 0,3059 \cdot 10^{-2} e^{-1,1434 \cdot 10^{10} t} \right]$$

$$E_2(t) = E \left[0,04761 - 0,2871 \cdot 10^{-3} e^{-1,1151 \cdot 10^{21} t} + 0,3059 \cdot 10^{-3} e^{-1,1434 \cdot 10^{10} t} \right]$$

$$E_3(t) = E \left[0,47629 - 0,3158 \cdot 10^{-2} e^{-1,1151 \cdot 10^{21} t} - 0,3364 \cdot 10^{-2} e^{-1,1434 \cdot 10^{10} t} \right]$$

In tali (c. e.) possiamo, in 1^a approssimazione, trascurare i termini esponenziali, che hanno coefficienti piccolissimi in confronto ai termini indipendenti dal tempo, e tendono a zero molto rapidamente a causa della piccolezza delle costanti di tempo ($\sim 10^{-10}$ sec.). Ne segue che, in questo ordine d'approssimazione, $E_1(t)$, $E_2(t)$, $E_3(t)$, (v. fig. 16); possono considerarsi costanti ed uguali a:

$$E_1(t) \sim 0,4761 E, E_2(t) \sim 0,04761 E, E_3(t) = 0,4762 E$$

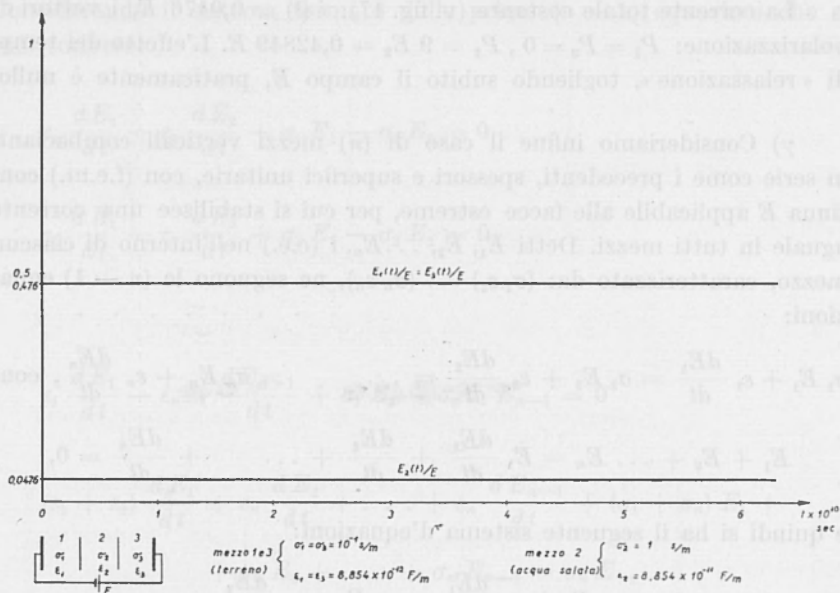


Fig. 16

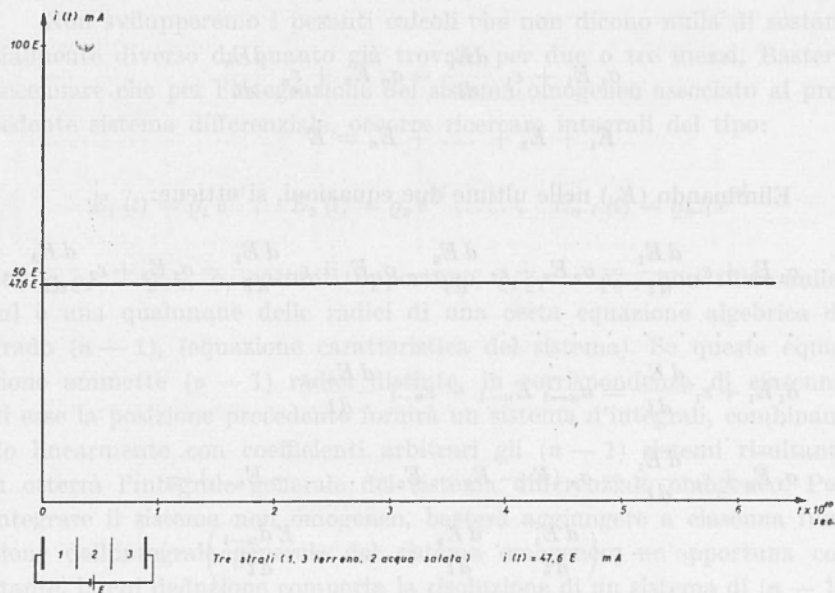


Fig. 17

La corrente totale costante (v. fig. 17): $i(t) = 0,0476 E$, i vettori di polarizzazione: $P_1 = P_3 = 0$, $P_2 = 9 E_2 = 0,42849 E$. L'effetto dei tempi di « rilassazione », togliendo subito il campo E , praticamente è nullo.

γ) Consideriamo infine il caso di (n) mezzi verticali combacianti in serie come i precedenti, spessori e superfici unitarie, con (f.e.m.) continua E applicabile alle facce estreme, per cui si stabilisce una corrente uguale in tutti mezzi. Detti E_1, E_2, \dots, E_n , i (c.e.) nell'interno di ciascun mezzo, caratterizzato da: $(\sigma_1 \varepsilon_1) \dots (\sigma_n \varepsilon_n)$, ne seguono le $(n - 1)$ equazioni:

$$\sigma_1 E_1 + \varepsilon_1 \frac{dE_1}{dt} = \sigma_2 E_2 + \varepsilon_2 \frac{dE_2}{dt} = \dots = \sigma_n E_n + \varepsilon_n \frac{dE_n}{dt}, \text{ con:}$$

$$E_1 + E_2 + \dots + E_n = E, \quad \frac{dE_1}{dt} + \frac{dE_2}{dt} + \dots + \frac{dE_n}{dt} = 0,$$

e quindi si ha il seguente sistema d'equazioni:

$$\sigma_1 E_1 + \varepsilon_1 \frac{dE_1}{dt} = \sigma_2 E_2 + \varepsilon_2 \frac{dE_2}{dt}$$

$$\sigma_1 E_1 + \varepsilon_1 \frac{dE_1}{dt} = \sigma_3 E_3 + \varepsilon_3 \frac{dE_3}{dt}$$

.....

$$\sigma_1 E_1 + \varepsilon_1 \frac{dE_1}{dt} = \sigma_n E_n + \varepsilon_n \frac{dE_n}{dt}$$

$$E_1 + E_2 + \dots + E_n = E$$

Eliminando (E_n) nelle ultime due equazioni, si ottiene:

$$\sigma_1 E_1 + \varepsilon_1 \frac{dE_1}{dt} = \sigma_2 E_2 + \varepsilon_2 \frac{dE_2}{dt}, \quad \sigma_1 E_1 + \varepsilon_1 \frac{dE_1}{dt} = \sigma_3 E_3 + \varepsilon_3 \frac{dE_3}{dt},$$

.....

$$\sigma_1 E_1 + \varepsilon_1 \frac{dE_1}{dt} = \sigma_{n-1} E_{n-1} + \varepsilon_{n-1} \frac{dE_{n-1}}{dt}$$

$$\sigma_1 E_1 + \varepsilon_1 \frac{dE_1}{dt} = \sigma_n (E - E_1 - E_2 - \dots - E_{n-1}) -$$

$$- \varepsilon_n \left(\frac{dE_1}{dt} + \frac{dE_2}{dt} + \dots + \frac{dE_{n-1}}{dt} \right)$$

$$E_n = E - E_1 - E_2 - \dots - E_{n-1}.$$

Considerando il sistema formato dalle prime $(n - 1)$ equazioni che si può scrivere:

$$\varepsilon_1 \frac{dE_1}{dt} - \varepsilon_2 \frac{dE_2}{dt} + \sigma_1 E_1 - \sigma_2 E_2 = 0$$

$$\varepsilon_1 \frac{dE_1}{dt} - \varepsilon_3 \frac{dE_3}{dt} + \sigma_1 E_1 - \sigma_3 E_3 = 0$$

.

$$\varepsilon_1 \frac{dE_1}{dt} - \varepsilon_{n-1} \frac{dE_{n-1}}{dt} + \sigma_1 E_1 - \sigma_{n-1} E_{n-1} = 0$$

$$(\varepsilon_1 + \varepsilon_2) \frac{dE_1}{dt} + \varepsilon_n \frac{dE_2}{dt} + \dots + \varepsilon_n \frac{dE_{n-1}}{dt} + (\sigma_1 + \sigma_n) E_1 + \sigma_n E_2 + \dots + \sigma_n E_{n-1} = \sigma_n E$$

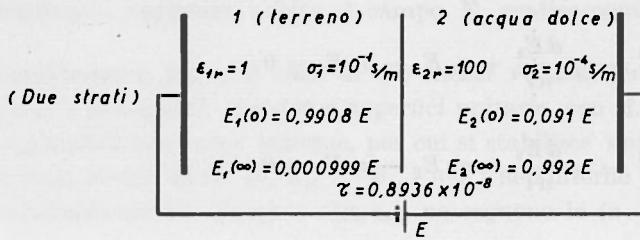
possiamo ricavare $E_1(t), E_2(t), \dots, E_{n-1}(t)$, e mediante la relazione: $E_n(t) = E - E_1(t) - E_2(t) - \dots - E_{n-1}(t)$, s'otterrà il campo $E_n(t)$ in funzione del tempo, di E , delle $(\varepsilon), (\sigma)$.

Non svilupperemo i pesanti calcoli che non dicono nulla di sostanzialmente diverso da quanto già trovato per due o tre mezzi. Basterà accennare che per l'integrazione del sistema omogeneo associato al precedente sistema differenziale, occorre ricercare integrali del tipo:

$$E_1(t) = \rho_1 e^{\alpha t}, \quad E_2(t) = \rho_2 e^{\alpha t}, \dots, \quad E_{n-1}(t) = \rho_{n-1} e^{\alpha t}$$

con $\rho_1 \rho_2 \dots \rho_{n-1}$, α , costanti opportune, $\rho_1 \rho_2 \dots \rho_{n-1}$ non tutte nulle, (α) è una qualunque delle radici di una certa equazione algebrica di grado $(n - 1)$, (equazione caratteristica del sistema). Se questa equazione ammette $(n - 1)$ radici distinte, in corrispondenza di ciascuna di esse la posizione precedente fornirà un sistema d'integrali, combinando linearmente con coefficienti arbitrari gli $(n - 1)$ sistemi risultanti si otterrà l'integrale generale del sistema differenziale omogeneo. Per integrare il sistema non omogeneo, basterà aggiungere a ciascuna funzione dell'integrale generale del sistema omogeneo, un'opportuna costante, la cui deduzione comporta la risoluzione di un sistema di $(n - 1)$ equazioni lineari nelle $(n - 1)$ costanti.

Tabella 1° (terreno. $\epsilon_{1r}=1$, $\sigma_1=10^{-4}$ s/m, acqua dolce)



(Vedi fig.3)

(terreno 1 = terreno 3: $\epsilon_{1r}=1$, $\sigma_1=10^{-4}$ s/m, acqua dolce)

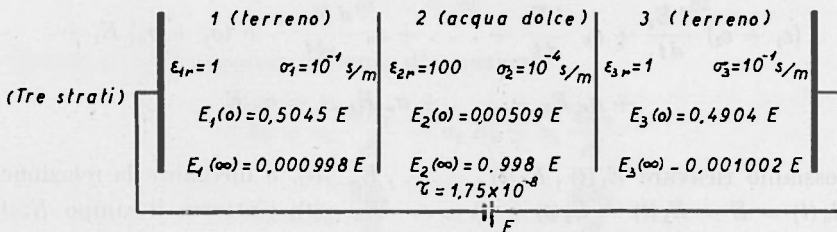
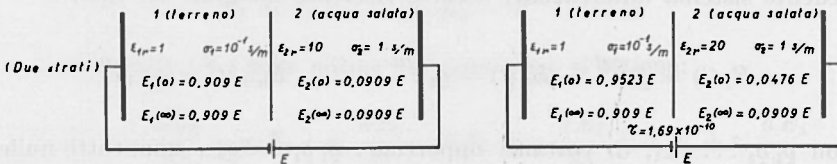


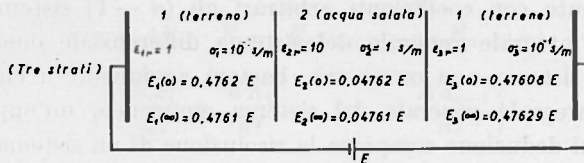
Tabella II° (terreno: $\epsilon_{1r}=1$, $\sigma_1=10^{-4}$ s/m; acqua salata: $\epsilon_{2r}=10$; $\epsilon_{3r}=20$, $\sigma_3=1$ s/m)



(Vedi fig. 6)

(Vedi fig. 9)

(terreno 1 = terreno 3: $\epsilon_{1r}=1$, $\sigma_1=10^{-4}$ s/m; acqua salata, $\epsilon_{2r}=10$, $\sigma_3=1$ s/m)



(Vedi fig. 16)

Per il calcolo effettivo basta sostituire nel sistema differenziale non omogeneo: $E_1 = \bar{E}_1, E_2 = \bar{E}_2, \dots, E_{n-1} = \bar{E}_{n-1}$, con cui si ottengono le relazioni:

$$\bar{E}_2 = \frac{\sigma_1}{\sigma_2} \bar{E}_1 ; \bar{E}_3 = \frac{\sigma_1}{\sigma_3} \bar{E}_1 ; \dots ; \bar{E}_{n-1} = \frac{\sigma_1}{\sigma_{n-1}} \bar{E}_1 ;$$

$$\left(1 + \frac{\tau_1}{\sigma_2} + \frac{\sigma_1}{\sigma_3} + \dots + \frac{\sigma_1}{\sigma_n} \right) \bar{E}_1 = E ,$$

da cui il termine generico (ricordando che: $\bar{E}_1 + \bar{E}_2 + \dots + \bar{E}_n = E$):

$$\bar{E}_{n-1} = \frac{\sigma_1 \sigma_2 \dots \sigma_{n-2} \sigma_{n-1} E}{\sigma_1 \sigma_2 \dots \sigma_{n-1} + \sigma_1 \sigma_3 \dots \sigma_{n-1} \sigma_n + \sigma_1 \sigma_2 \dots \sigma_{n-2} \sigma_n + \sigma_2 \sigma_3 \dots \sigma_{n-1} \sigma_n}$$

Possiamo inoltre facilmente calcolare i valori iniziali ($t = 0$):

$$E_1(0) , E_2(0) \dots E_n(0) ,$$

ricordando che:

$$\varepsilon_1 E_1(0) = \varepsilon_2 E_2(0) = \dots = \varepsilon_n E_n(0), E_1(0) + E_2(0) + \dots + E_n(0) = E .$$

Queste relazioni conducono ad un sistema lineare identico a quello trovato per il calcolo di $\bar{E}_1, \bar{E}_2, \dots, \bar{E}_n$ con l'unica differenza che al posto delle σ figurano le ε , le soluzioni saranno quindi, (riportando il termine generico):

$$E_n(0) = \frac{\varepsilon_1 \varepsilon_2 \dots \varepsilon_{n-2} \varepsilon_{n-1} E}{\varepsilon_1 \varepsilon_2 \dots \varepsilon_{n-1} + \varepsilon_1 \varepsilon_3 \dots \varepsilon_{n-1} \varepsilon_n + \dots + \varepsilon_1 \varepsilon_2 \dots \varepsilon_{n-2} \varepsilon_n + \varepsilon_2 \varepsilon_3 \dots \varepsilon_{n-1} \varepsilon_n}$$

Nel caso che le radici della « caratteristica » siano reali, distinte e negative; ($-\alpha_1, -\alpha_2, \dots, -\alpha_{n-1}$), i valori di $\bar{E}_1, \bar{E}_2, \dots, \bar{E}_n$, assumono l'importante significato di « valori di saturazione » per i campi $E_1(t), E_2(t), \dots, E_n(t)$.

Per vederlo basta notare che:

$$E_k(t) = \bar{E}_k(t) + A_{1k} e^{-\alpha_1 t} + A_{2k} e^{-\alpha_2 t} + \dots + A_{n-1,k} e^{-\alpha_{n-1} t}$$

$A_{1k}, A_{2k}, \dots, A_{n-1,k}$ cost., per $k = 1, 2, \dots, n$), quindi $\lim_{t \rightarrow \infty} E_k(t) = \bar{E}_k$.

RIASSUNTO

L'A., partendo da una classica impostazione di Maxwell, valuta i « tempi di rilassazione » delle polarizzazioni indotte (P. I.) nei suoli. Applica la presente teoria, (puramente fisica), soprattutto alla prospezione degli « acquiferi », distinguendo i suoli imbibiti d'acqua (dolce o molto ionizzata) dai suoli anidri. Misurazioni con « Elettrogeorelaxametri », (costruiti anche in Italia, oltre che negli U.S.A., in Giappone, in Russia), lungo allineamenti tipo Wenner, sostituiranno o, se si vuole, completeranno gli incerti ed equivoci « sondaggi elettrici » nella ricerca idrica.

SUMMARY

The Author, starting from a classic statement of Maxwell, values the "relaxation times" of the inducted polarisations (P. I.) in the ground. He applies the present (purely physical) theory to the prospection of "aquifers" distinguishing the water imbued grounds (fresh or greatly ionized water) from anhydrous grounds. The measurements with "electrorelaxameters" (built even in Italy, besides in U.S.A., Japan and Russia) along rangings of the Wenner type will replace or at least complete the uncertain and equivocal "electric loggings" in the hydric research.

BIBLIOGRAFIA

- (1) VACQUIER V., and KINTZINGER P. R., *Induced electrolytic polarisation of wet disseminated clays*. 35th Annual Meeting American Geophysical Union, Washington, May 1954.
- VACQUIER V., KINTZINGER P. R., HOLMES C. R., FRISCHE R. H., *Prospecting for Ground Water by Induced Electrical Polarization*. New Mexico Instituto of Mining and Technology Research and Development Division, 1956.
- (2) BELLUIGI A., *Sull'effetto e. m. diretto di emittori alternativi in un suolo omogeneo*. Annali di Geofisica, 1954.
- BELLUIGI A., *Sul m. geoelettrico « ELFLEX » per la ricerca diretta del petrolio*. Boll. Servizio geologico d'Italia, 1955.