SOLUZIONI GENERALI DELLE EQUAZIONI DIFFERENZIALI LINEARI OMOGENEE DEL SECONDO ORDINE (*)

D. C. Borghi

Introduzione. — Data un'equazione differenziale lineare omogenea del 2° ordine per una funzione incognita $V(t)$.

$$\frac{d^2 V}{d t^2} + P_1(y) \frac{d V}{d t} + Q_1(t) V(t) = 0 \qquad [01]$$

ed esclusa la soluzione banale $V = 0$; ponendo

$$V(t) = U(t) \exp\left(-\frac{1}{2} \int^t P_1 \, dt \right) \qquad [02]$$

la [01] dà origine ad un'equazione differenziale che diremo *normale* (**) cioè

$$\frac{d^2 U}{d t^2} + P(t) U = 0 \qquad [03]$$

dove il coefficiente $P(t)$, che è detto *invariante* dell'equazione differenziale, com'è facile verificare è dato da

$$P(t) = Q_1(t) - \frac{1}{4} P_1^2(t) - \frac{1}{2} \frac{d P_1(t)}{d t} \qquad [04]$$

La trasformazione [03] è possibile sotto la condizione, scarsamente limitativa, che $P_1(t)$ sia differenziabile.

È quasi ozioso ricordare che un gran numero di problemi pratici della fisica è rappresentato da equazioni che possono essere ridotte al tipo « normale » (omogeneo o meno) come [03]; per un esempio della massima importanza si veda ogni caso fattorizzabile dell'equazione di Schrödinger.

(*) Data l'importanza del metodo esposto, nella presente nota, per le molteplici applicazioni che ne derivano ai problemi geofisici, si è ritenuto opportuno pubblicare, unitamente al testo originale italiano, anche la traduzione inglese per esteso (*N. d. R.*).

(**) Cf. E. Kamke, *Differential Gleichungen*, Leipzig 1944, Bd. I°, 119; S. Brodetsky, *Proc. Edimburgh Math. Soc.* 34 (1916) 45.

1. *Sviluppo in serie delle soluzioni dell'equazione differenziale omogenea del 2° ordine:* $U'' = [k^2 + f(t)]U(t)$. — Data l'equazione differenziale « normale »

$$\frac{d^2 U}{d t^2} = (k^2 + f(t))\, U \qquad [1]$$

dove $f(t)$ è una *funzione nota* (*) e $k^2 = \text{cost.}$, poniamo

$$U = e^{kt} \varnothing \;, \quad k = \pm \sqrt{k^2} \qquad [2]$$

e definiamo la funzione $\varnothing$ in modo che per $f = \text{cost.}$, sia $\varnothing = 1$:

$$\varnothing = e^{\int \gamma dt} \qquad [3]$$

Questa condizione riporta la [1] al caso notissimo $f = 0$, che dà le soluzioni armoniche e^{kt}, cioè si intende che $f = 0$ quando si riduce ad una costante.

Sostituendo [2] in [1] si ottiene l'equazione di *Riccati*:

$$\gamma' + \gamma^2 + 2 k \gamma = f \qquad [4]$$

Supponiamo ora di determinare un valore t_k della variabile t, tale che $f_k = f(t_k)$ soddisfi alla condizione:

$$f_k = \gamma^2 (t_k) = \gamma_k^2 \qquad [5]$$

Si ha allora la soluzione di [4] nel punto t_k:

$$\gamma_k' + 2 k \gamma_k = 0 \qquad [6]$$

cioè

$$\gamma_k = exp(-2 k t_k - 2 a) \;; \qquad 2 a = cost \qquad [7]$$

e anche

$$f(t_k) = exp(-4 k t_k - 4 a) \qquad [8]$$

da cui si può ricavare t_k una volta fissata la costante arbitraria a. L'arbitrarietà di a assicura l'esistenza del punto t_k.

(*) Per $f(t)$ identicamente nullo, la [1] ha come soluzione combinazioni lineari di funzioni circolari o iperboliche. Brodetzky, (art. cit.), ha mostrato che le soluzioni per $f(t)$ non identicamente nullo hanno sviluppi in serie che presentano molte analogie con le funzioni circolari e iperboliche.

Si può allora avere lo sviluppo di γ in serie di Taylor nell'intorno di t_k:

$$\gamma = \gamma_K + \frac{(t - t_k)}{1\,!}\gamma_k' + \frac{(t - t_k)^2}{2\,!}\gamma_k'' + \dots \qquad [9]$$

con

$$\gamma_k = e^{-2kt_k - 2a} = A \qquad [10]$$

$$\gamma_k' = -2\,k\,A \qquad [11]$$

$$\gamma_k'' = f_k' - 2\,k\,\gamma_k' - 2\,(\gamma\gamma')_k = f_k' + (2\,k)^2 A + 2\,(2\,k)\,A^2 \qquad [12]$$

$$\gamma_k''' = f_k'' - 2\,k\,\gamma_k'' - (\gamma^2)_k'' =$$

$$= f_k'' - (2\,k) f_k' - (2\,k)^3 A - 2\,(2\,k)^2 A^2 - (\gamma^2)_k'' \,. \qquad [13]$$

Ora

$$\left.\begin{aligned}
(\gamma^2)' &= 2\,\gamma\,\gamma' \\
(\gamma^2)'' &= 2\,\gamma\,\gamma'' + 2\,\gamma'^2 \\
(\gamma^2)''' &= 2\,\gamma\,\gamma''' + 6\,\gamma'\,\gamma'' \\
(\gamma^2)^{IV} &= 2\,\gamma\,\gamma^{IV} + 8\,\gamma^{I}\gamma^{III} + 6\,\gamma^{II2}
\end{aligned}\right\} \qquad [14]$$

che per $\gamma_k \to 0$, $\gamma_k' \to 0$, dà $(\gamma^2)^{(n)} \to 0$. e simbolicamente

$$(\gamma^2)_k^{(n)} = (\gamma + \gamma)^{(n)} = \sum_{0}^{n-1}{}_r \binom{n}{r}\gamma^{(n-z)}\gamma^{(r)} \qquad [15]$$

Quindi

$$\left.\begin{aligned}
\gamma_k^{(n)} &= f_k^{(n-1)} - 2\,k\,\gamma_k^{(n-1)} - (\gamma^2)_k^{(n-1)} = \\
&= f_k^{(n-1)} - 2\,k\,\gamma_k^{(n-1)} - \sum_{0}^{n-1}{}_t \binom{n-1}{r}\gamma^{(n-1-r)}\gamma^{(r)}
\end{aligned}\right\} \qquad [16]$$

Per determinare A, occorre la condizione che per $f \equiv$ cost. deve essere $\phi \equiv 1$. Considerando che la [2] e la [3] danno

$$U = exp\left(k\,t + \int \gamma\,d\,t\right)$$

e che tale espressione deve coincidere con e^{kt} quando $f \equiv cost \equiv 0$, si riconosce che ciò si verifica quando $\gamma_k = 0$, ossia:

$$A = 0 \;\; ; \;\; a = +\infty \qquad [17]$$

Pertanto avremo

$$\gamma_k = 0 \qquad [18]$$

$$\gamma_k' = 0 \qquad [19]$$

$$\gamma_k'' = f_k' \qquad [20]$$

$$\gamma_k''' = f_k'' - 2\,k f_k' \qquad [21]$$

La condizione

$$\gamma_k = 0 \qquad [22]$$

significa che t_k è uno zero della funzione $f(t)$, e quindi presuppone la possibilità di avere

$$f_k = 0 \qquad [23]$$

e cioè che $f(t)$ *ammetta almeno uno zero.* Se ciò non si verificasse, al posto dell'equazione [1] si ponga

$$\frac{d^2 U}{dt^2} = [k^2 + h^2 + (f - h^2)]\,U \qquad [24]$$

dove $h^2 = cost.$ è la minima distanza di $f(t)$ dallo zero, oppure è il valor medio di $f(t)$, oppure è un valore di $f(t)$ maggiorante in valore assoluto rispetto al minimo (assoluto) di $f(t)$, o altre definizioni analoghe. È bene osservare subito che questa apparente arbitrarietà della h^2 verrà in seguito eliminata, nel § 5°, dalle condizioni ai limiti, che determinano anche gli autovalori.

Ponendo allora

$$F(t) = f(t) - h^2 \;\; ; \qquad K^2 = k^2 + h^2 \qquad [25]$$

al posto di $f(t)$, e cioè aggiungendo e sottraendo la stessa quantità h^2 nella parentesi al secondo membro della [1], si ha l'equazione identica alla [1]

$$\frac{d^2 U}{d\,t^2} = (K^2 + F(t))\,U \qquad [26]$$

che però soddisfa alla condizione voluta [23]. Nel seguito, scriveremo sempre $f(t)$, che dovrà intendersi sostituita da $F(t)$ quando $f(t)$ non ha zeri (*).

(*) È chiaro che nei punti t_k si deve trovare $F(t_k) = 0$, quando $f(t)$ non ha zeri.

Ora abbiamo

$$\gamma^{(n)} = f^{(n-1)} - p f^{(n-2)} + p^2 f^{(n-3)} - \ldots\ldots + (-1)^{n-1} p^{n-1} f + \\ + (-1)^n (p^n \gamma + p^{n-1} G - p^{n-2} G' + \ldots\ldots) - G^{(n-1)} \qquad [27]$$

con

$$G_k' = 2\gamma_k \gamma_k' = 0 \qquad [28]$$

$$p = 2k \qquad [29]$$

Ora dalle formule ricorrenti [15] appare che, poiché $\gamma_k = 0$, $\gamma'_k = 0$, tutte le derivate $G_k(^n)$ sono nulle.

Cioè, tralasciando per semplicità tutti gli indici k,

$$\left\{ \begin{array}{l} \gamma = 0 \\ \gamma' = 0 \\ \gamma'' = f' \\ \gamma''' = f'' - p f' \\ \gamma^{IV} = f''' - p f'' + p^2 f' \end{array} \right. \qquad [30]$$

e quindi

$$\gamma^{(n)} = \sum_{r\,0}^{n-1} (-1)^r p^r f^{(n-1-r)} \qquad [31]$$

e quindi da [9], essendo t_0 un valore di t in cui $f(t)$ oppure $F(t)$ si annulla, si ha

$$\gamma = \sum_{n\,1}^{\infty} \frac{(t - t_0)^n}{n!} \sum_{r\,0}^{n-1} (-1)^r (2k)^r f_0^{(n-1-r)} \qquad [32]$$

Riassumendo da [2], [3], [31], [32]

$$U = exp \left\{ k t + \sum_{n\,1}^{\infty} \sum_{r\,0}^{n-1} \frac{(-1)^r}{n!} (2k)^r f_0^{(n-1-r)} \int (t - t_0)^n \, dt \right\} =$$

$$= exp \left\{ k t + \sum_{n\,1}^{\infty} \sum_{r\,0}^{n-1} \frac{(-1)^r}{n!} \frac{(2k)^r}{n+1} f_0^{(n-1-r)} (t - t_0)^{n+1} \right\} =$$

$$= exp \left\{ k t + \sum_{n\,1}^{\infty} \sum_{r\,0}^{n-1} \frac{(-1)^r (2k)^r}{(n+1)!} f_0^{(n-1-r)} (t - t_0)^{n+1} \right\}$$

$$= exp \{ k t + S \} \qquad [33]$$

con $S = log\, \emptyset$.

La [33] è lo sviluppo in serie cercato. In realtà gli sviluppi possibili sono due, corrispondenti ai due segni di $k = \pm \sqrt{k^2}$. Come è noto, ciò serve a determinare le due costanti arbitrarie collegate con un'equazione differenziale del secondo ordine.

Non è superfluo osservare che, dal punto di vista algebrico e da quello pratico della calcolazione delle soluzioni, il problema può considerarsi risolto di fatto con la [33]. Gli ulteriori sviluppi non sono che una possibile semplificazione o esplicitazione di essa.

Giova osservare che la soluzione [33] è particolarmente adatta alle calcolazioni numeriche, perché dipende solo da kt e dalle *derivate* $f_0^{(n)}$. Ora la derivazione è un'operazione che in generale è di assai più agevole calcolazione che non una integrazione; da ciò l'utilità della [33].

2) *Espressione esplicita della soluzione* [33]

L'espressione che appare in [33]

$$\log \phi = S = \sum_{1}^{\infty}{}_{n} \sum_{0}^{n-1}{}_{r} (-1)^r \frac{p^r}{(n+1)!}(t-t_0)^{n+1} f_0^{(n-1-r)} \qquad [34]$$

per i successivi valori di r, ricordato che $f_0^{(0)} = f_0 = 0$ e ponendo

$$\tau = t - t_0 \qquad [35]$$

dà le successive sommatorie, disponibili su un triangolo:

$$S = \sum_{2}^{\infty}{}_{n} \frac{\tau^{n+1}}{(n+1)!} f_0^{(n-1)} - p \sum_{3}^{\infty}{}_{n} \frac{\tau^{n+1}}{(n+1)!} f_0^{(n-2)} + + p^2 \sum_{4}^{\infty}{}_{n} \frac{\tau^{n+1}}{(n+1)!} f_0^{(n-3)} - \ldots\ldots \qquad [36]$$

Ora possiamo, nelle singole somme, sostituire alla n un altro indice che riduce ad uno stesso valore, per es. $(n+1)$, tutti gli esponenti simbolici $(n-r)$ delle f_0, cioè si può fare

$$S = \sum_{0}^{\infty}{}_{n} \frac{\tau^{n+3}}{(n+3)!} f_0^{(n+1)} - p \sum_{0}^{\infty}{}_{n} \frac{\tau^{n+4}}{(n+4)!} f_0^{(n+1)} + + p^2 \sum_{0}^{\infty}{}_{n} \frac{\tau^{n+5}}{(n+5)!} f_0^{(n+1)} \quad \ldots\ldots \qquad [37]$$

Sommando in colonna i coefficienti della stessa derivata $f_o^{(n+1)}$, per uno dei noti teoremi della doppia serie, abbiamo:

$$S = \sum_{o}^{\infty}{}_n \sum_{o}^{\infty}{}_r \frac{\tau^{n+3+r}(-1)^r p^r}{(n+3+r)!} f_o^{(n+1)} \qquad [38]$$

Poniamo

$$q = p\tau \qquad [39]$$

e anche

$$\tau^{n+3} B_3(n, q) = \sum_{o}^{\infty}{}_r \frac{(-1)^r p^r \tau^{n+3+r}}{(n\,3 + r)!} = \tau^{n+3} \sum_{o}^{\infty}{}_r \frac{(-1)^r q^r}{(n+3+r)!} \qquad [40]$$

cioè

$$B_3(n, q) = \sum_{o}^{\infty}{}_r \frac{(-1)^r q^r}{(n+3+r)!} \quad (\star)$$

$$[41]$$

$$S = \sum_{o}^{\infty}{}_n \tau^{n+3} \cdot B_3(n, q)\, f_o^{(n+1)}$$

Ora prendiamo la funzione

$$B_3(n, q) = \sum_{o}^{\infty}{}_r \frac{(-1)^r q^r}{(n+3+r)!} = \frac{1}{q^{n+3}} \sum_{o}^{\infty}{}_r \frac{(-1)^r q^{n+3+r}}{(n+3+r)!} =$$

$$[42]$$

$$= \frac{(-1)^{n+3}}{q^{n+3}} \left[\sum_{r=o}^{\infty} - \sum_{r=o}^{r=2} \right] \frac{(-1)^r q^r}{r!} = \frac{(-1)^{n+3}}{q^{n+3}} \left(e^{-q} - \sum_{o\,r}^{n+2} \frac{(-1)^r q^r}{r!} \right)$$

quindi

$$B_3(n, q) = \frac{(-1)^{n+3}}{n+3} \left(e^{-q} - \sum_{o}^{n+2}{}_r \frac{(-1)^r q^r}{r!} \right) \quad (\star\star) \qquad [43]$$

(*) In generale si definisce:

$$[41\text{-A}]$$

$$B_s(n, q) = \sum_{o}^{\infty}{}_r \frac{(-1)^r q^r}{(n+s+r)!}$$

In particolare:

$$B_o(o, q) = e^{-q}$$

$$[41\text{-B}]$$

(**) La somma rappresentata entro la parentesi può essere definita formalmente quale *funzione esponenziale incompleta*, in quanto il suo valore diviene e^{-q} per $n \to \infty$.

Di conseguenza, l'espressione S, e quindi V, è completamente determinata quando siano noti i valori di $f_n^{(n+1)}$. La [43] indica pure che per $n \to \infty$ le $B_3(n,q)$ per $q \gtrless 0$, tendono a $(-1)^{n+1}(e^{\pm q} - e^{\pm q})/q^{n+3} \to 0/q^{n+3}$

3. *Riduzione delle* B_3 (n.q) *alla funzione* Γ *incompleta.* — Con un metodo già indicato da *Cauchy* e *Saalschütz* (cfr. Whittaker & Watson, Modern Analysis, Cambridge[4], 1950, pag. 244) ponendo:

$$\beta(n, q) = (-1)^{n+3} q^{n+3} B_3(n, q) \qquad [44]$$

si ha

$$\Gamma(z) = \lim_{q \to \infty} \int_0^q q^{z-1} \beta(n, q)\, d q \qquad [45]$$

dove z è reale ed è > 1 ed n è l'intero *immediatamente superiore* a z, se z non è intero.

Se z è intero, allora è ovviamente

$$n = +z > 1 \qquad [46]$$

Ora, integrando per parti si ha

$$\int_0^q q^{z-1} \beta(n, q)\, d q = \left[\frac{q^z}{z} \beta(n, q)\right]_o^q + \frac{1}{z} \int_0^q q^z \beta(n-1, q)\, d q =$$

$$= \frac{1}{z} q^z \beta(n, q) + \frac{1}{z} \int_0^q q^z \beta(n-1, q)\, d q \qquad [47]$$

Prendiamo ora il *caso* $q \geqslant 0$.

Allora il primo membro di [47] è la definizione della funzione Γ incompleta (o « digamma »), che si indica con $\Gamma\ (q, z)$, e si ha

$$\Gamma(q, z) = \frac{1}{z} q^z \beta(n, q) + \frac{1}{z} \Gamma(q, z+1) \qquad [48]$$

quindi

$$\beta(n, q) = z q^{-z} \Gamma(q, z) - q^{-z} \Gamma(q, x+1) =$$

$$= q^{-n} [n \Gamma(q, n) - \Gamma(q, n+1)] \cdot \ (q \geq 0) \qquad [49]$$

Le $\Gamma\ (q, n)$ sono tabulate da K. Pearson (*), che dà le funzioni

$$I(u, n) = \frac{\Gamma(u, n)}{\Gamma(u, \infty)} \qquad [50]$$

con

$$\Gamma(u, \infty) = \Gamma(u) = (u-1)\,! \qquad [51]$$

$$u = \frac{q}{\sqrt{n+1}} \qquad [52]$$

Per $q < 0$, invece si può sempre usare la formula [49] ma per i valori negativi di q si deve calcolare $I\ (-u, n)$ in funzione di $I\ (u, n)$ dalle tavole di Pearson, con la formula (**):

$$\frac{I(-u, p)}{(-u)^{p+1}} = \frac{[I'(o, p)]^2}{I'(u, p)} \cdot \left\{ 1 + \frac{u^2(p+1)^2}{(p+2)^2(p+3)} + \right.$$

$$+ \frac{u^4(p+1)^3}{(p+2)(p+3)^2(p+4)(p+5)} + \qquad [53]$$

$$\left. + \frac{u^6(p+1)^4}{(p+2)(p+3)(p+4)^2(p+5)(p+6)(p+7)} + \ldots \right\}$$

con

$$I'(u, p) = \frac{I(u, p)}{u^{p+1}} \qquad [54]$$

Le $I'(u, p)$ sono sulla tavola III; il valore speciale $I'(0, p)$ è dato dalla formula

$$I'(o, p) = (p+1)^{\sqrt{p-1}} / \Gamma(p+1) \qquad [55]$$

4. *Una notevole riduzione.* — La funzione definita in [3],

$$\emptyset(\tau) = exp \sum_{0}^{\infty}{}_n \beta(n, q) f_o^{(n+1)} \tau^{n+3} \ ; \quad u = e^{kt} \emptyset(\tau) \qquad [56]$$

(*) K. Pearson, *Tables of the Incomplete function*, « Biometrika », Cambridge, 1951.

(**) K. Pearson, *op. cit.*, pg. VI, formula [III] ter.

che, a parte il fattore e^{ikt}, è soluzione della [1], con

$$\beta(n, q) = \sum_{0}^{\infty}{}_r \frac{(-1)^r q^r}{(n+3+r)!} \qquad [57]$$

può a sua volta svilupparsi in serie di MacLaurin:

$$\phi(\tau) = 1 + \sum_{1}^{\infty}{}_s \frac{\tau^s}{s!} \phi_0^{(s)} \qquad [58]$$

Essendo:

$$\phi_0 = \phi(_0) = 1$$

ed inoltre avendosi le derivate

$$\frac{d}{d\tau} \sum_{0}^{\infty}{}_n \beta(n, q) f_0^{(n+1)} \tau^{n+}{}_0 = \sum_{0}^{\infty}{}_n \sum_{0}^{\infty} \frac{(-1)^r p^r \tau^{n+2+r}}{(n+2+r)!} f_0^{(n+1)}$$

e in generale

$$\frac{d^s}{d\tau^s}\phi(\tau) = \sum_{0}^{\infty}{}_{n,r} (-1)^r p^r f_0^{(n+1)} \frac{\tau^{n+2+r-s}(n+3+r)(n+2+r)\ldots(n+3+r-s)}{(n+3+r)!}$$

$$= \sum_{0n,r}^{\infty} (-1)^r p^r f_0^{(n+1} \frac{\tau^{n+3+r-s}}{(n+3+r-s)!} \qquad [59]$$

si vede subito che nel punto $\tau = 0$ sono nulli tutti gli addendi per cui sia $n + 3 + r - s \neq 0$ mentre l'unico addendo che ha

$$n + 3 + r - s = 0 \qquad [60]$$

si riduce a

$$(-1)^r p^r f_0^{(n+1)} = (-1)^{s-n-3} p^{s-n-3} f_0^{(n+1)}$$

ritenendo che $\frac{0^0}{0!} = 1$ come si usa negli sviluppi in serie (es. la serie di cos x per $x \to 0$) e pertanto

$$\frac{d^s \phi(\tau)}{d\tau^s} = \sum_{0}^{s-3}{}_n (-1)^{s-n-3} p^{s-n-3} f_0^{(n+1)} \qquad [61]$$

Ma l'esponente r non può essere inferiore a zero, quindi

$$r = s - n - 3 \geq 0$$

ed essendo $r = 0$ per $n = s - 3$, e dovendo d'altra parte anche n essere non inferiore a zero. si ha

$$n \geq s - 3 \geq 0$$

e quindi *risultano nulle tutte le derivate con* $s < 3$.

Perciò, ponendo

$$s = 3 + u \qquad (u = 0, 1, \ldots)$$

si ha la condizione

$$n + r = u = 0, 1, 2, \ldots$$

e quindi per $s \geqslant 3$, si ha

$$\left(\frac{d^{3+u}\phi}{d\tau^{3+u}}\right)_o = \sum_n^u \sum_u^{u-n>0} (-1)^{u-n} p^{u-n} f_o^{(n+1)} \qquad [62]$$

con la condizione che $u - n$ sia sempre positivo. Perciò

$$\begin{aligned}
\phi_o' &= 0 \\
\phi_o'' &= 0 \\
\phi_o''' &= f_o^{(1)} \\
\phi_o^{IV} &= -p f_o^{(1)} + f_o^{(2)} \\
\phi_o^{V} &= p^2 f_o^{(1)} - p f_o^{(2)} + f_o^{(3)}
\end{aligned} \qquad [63]$$

e in generale, per $n \geqslant 0$,

$$\phi_o^{(3+u)} = \sum_{r\,o}^{u} (-1)^{u+r} p^{u-r} f^{(r+1)} \qquad [64]$$

Pertanto, la serie di McLaurin è

$$\phi(\tau) = 1 + \sum_{s\,o}^{\infty} \frac{\tau^{3+s}}{(3+s)\,!} \sum_{r\,o}^{s} (-1)^{s+r} p^{s-r} f_o^{(r+1)} \qquad [65]$$

e definendo i polinomi:

$$\gamma_s(p, f_o) = \sum_{r\,o}^{s} (-1)^{s+r} p^{s-r} f_o^{(r+1)} \qquad [66]$$

si ha

$$\phi(\tau) = 1 + \sum_{s\,o}^{\infty} \frac{\tau^{3+s}}{(3+s)\,!} \gamma_s(p, f_o) \qquad [67]$$

Nel caso in cui p *è immaginario*, i polinomi $\gamma_s(p, f_0)$ si possono scindere in una parte reale $R_s(p, f_0)$, ed in una parte immaginaria $I_s(p, f_0)$. Abbiamo infatti, *per* s *pari*:

$$\gamma_s(ip, f_0) = \sum_0^s {}_l (-1)^l i^l p^l f_0^{(s+1-l)} =$$

$$= f_0^{(s+1)} - ipf_0^{(s)} - p^2 f_0^{(s-1)} + ip^3 f_0^{(s-2)} + p^4 f_0^{(s-3)} \ldots\ldots =$$

$$= f_0^{(s+1)} - p^2 f_0^{(s-1)} + p^4 f_0^{(s-3)} - \ldots\ldots - \qquad [68]$$

$$- i\{pf_0^{(s)} - p^3 f_0^{(s-2)} + p^5 f_0^{(s-4)} - \ldots\ldots\} =$$

$$= \sum_0^{\frac{1}{2}s} {}_l (-1)^l p^{2l} f_0^{(s+1-2l)} - i \sum_0^{\frac{1}{2}s} {}_l (-1)^l p^{2l+1} f_0^{(s-2l)} ;$$

cioè

$$\gamma_{2n}(ip, f_0) = \sum_0^n {}_l (-1)^l p^{2l} f_0^{(2n+1-2l)} - i \sum_0^{n-1} {}_l (-1)^l p^{2l+1} f_0^{(2n-2l)} =$$

$$= R_{2n}(p, f_0) - i I_{2n}(p, f_0) \qquad [69]$$

mentre per s *dispari* $= 2n + 1$

$$\gamma_{2n+1}(ip, f_0) = \sum_0^{2n+1} {}_l (-1)^l i^l p^l f_0^{(2n+2-l)} =$$

$$= \sum_0^n {}_l (-1)^l p^{2l} f_0^{(2n+2-2l)} - i \sum_0^n {}_l (-1)^l p^{2l+1} f_0^{(2n+1-2l)} = \qquad [70]$$

$$= R_{2n+1}(p, f_0) - i I_{2n+1}(p, f_0)$$

con

$$\left\{\begin{array}{l} R_{2n}(p, f_0) = \sum_0^n {}_l (-1)^l p^{2l} f_0^{(2n+1-2l)} \\ I_{2n}(p, f_0 = \sum_0^n {}_l (-1)^l p^{2l+1} f_0^{(2n-2l)} \end{array}\right.$$

$$[71]$$

$$\left\{\begin{array}{l} R_{2n+1}(p, f_0) = \sum_0^n {}_l (-1)^l p^{2l} f_0^{(2n+2-2l)} \\ I_{2n+1}(p, f_0) = \sum_0^n {}_l (-1)^l p^{2l+1} f_0^{(2n+1-2l)} \end{array}\right.$$

Si ha dunque in generale

$$\varnothing(\tau) = 1 + \sum_{0}^{\infty}{}_{s} \frac{\tau^{3+s}}{(3+s)\,!}(R_s - i\,I_s) =$$

$$= 1 + \sum_{0}^{\infty}{}_{s} \frac{\tau^{3+2s}}{(3+2s)\,!} R_{2n}(p, f_o) - \qquad [72]$$

$$- i \sum_{0}^{\infty}{}_{s} \frac{\tau^{4+2s}}{(4+2s)\,!} I_{2n+1}(p, f_o)$$

5. *Determinazione di* h^2. — *Autovalori.* — Poiché abbiamo supposto che nel punto particolare t_k, $f_k = 0$, consegue che in tal punto la funzione $\varnothing$ assume ovviamente il valore

$$\varnothing_k = 1\,. \qquad [73]$$

Ora, quando la funzione U che entra nella equazione differenziale normale [1] ha due valori dati dalle condizioni ai limiti, ovvero anche quando è dato il valore di U e della sua derivata in un punto noto t_k, tali due valori dati determinano la soluzione generale dell'equazione differenziale.

Precisamente, i due segni della costante k^2 determinano due soluzioni ciascuno delle quali corrisponde ad uno dei due segni di k. Indicando con U_1 ed U_2 queste due soluzioni, la soluzione generale sarà:

$$U = My_1 + Ny_2 \qquad [74]$$

in cui M, N sono delle costanti.

A causa della condizione [57] si ottiene, per esempio,

$$\left\{\begin{array}{l} M\,e^{kt_k} + N\,e^{-kt_k} = U_k = U(k) \\ M\,e^{ka}\,\varnothing_a\ N\,e^{-ka}\,\varnothing_a{}^* = U_a = U(a) \\ M\,e^{kb}\,\varnothing_b + N\,e^{-kb}\,\varnothing_b{}^* = U_b = U(b) \end{array}\right. \qquad [75]$$

nel caso di due valori dati per U in due punti quali a, b. Qui $\varnothing^*{}_a$ ovvero $\varnothing^*{}_b$ indica il valore di $\varnothing_a$ o $\varnothing_b$ che corrisponde a $-k$ anziché a $+k$.

In maniera assolutamente analoga possiamo ottenere un sistema simile a [75] per il caso in cui i valori dati siano $U(a)$ ed $U'(a)$.

Il sistema [75] consta di tre equazioni con quattro incognite M, N, k, U_k; cosicché una di queste è indeterminata. Tuttavia tale indeterminazione può venir rimossa dal fatto che U è sempre determinata a meno di un fattore arbitrario, cosicché invece del sistema [75], si può operare col sistema

$$\left\{\begin{array}{l} e^{kt_k} + p\, e^{-kt_k} = U_k \\ e^{ka}\, \phi_a + p\, e^{-ka}\, \phi_a{}^{*} = U_a \\ e^{kb}\, \phi_b + p\, e^{-kb}\, \phi_b{}^{*} = U_b \end{array}\right. \qquad [76]$$

che ha solo tre incognite e cioè p, U_k, k. Naturalmente [76] può esser sostituito da un sistema simmetrico in cui p è il coefficiente del fattore e^{+kt}, mentre e^{-kt} ha per coefficiente 1.

In conseguenza possiamo prendere la

$$U = e^{kt}\, \phi + p\, e^{-kt} \phi^{*} \qquad [77]$$

per soluzione, a meno di un fattore.

È noto che quando la costante k dedotta da [76] ha uno spettro discreto od anche continuo di valori, tali valori vengono denominati *autovalori* dell'equazione data.

Vale ancora la pena d'osservare, che l'indeterminatezza del fattore di U viene generalmente rimossa con la ben nota *condizione di normalizzazione* della funzione U, in corrispondenza del problema effettivamente rappresentato dall'equazione differenziale data.

6. *Spettri multipli di autovalori.* — Nella precedente trattazione abbiamo semplicemente supposto l'esistenza di un punto t_k tale da generare l'equazione caratteristica

$$f(t) = 0\,. \qquad [78]$$

Consideriamo ora il caso più generale in cui l'equazione caratteristica [78] ha più di una soluzione (reale o complessa). In tal caso ci sono tanti sistemi simili a [75] per quanti sono i valori t_k determinati dall'equazione caratteristica [78].

Se il sistema [75] conduce ad uno spettro di autovalori, in tal caso esistono tanti spettri di autovalori per quanti sono i t_k, ossia si ottiene uno spettro multiplo di autovalori.

Denotiamo con K_a gli elementi singoli di uno spettro che corrisponde ad una singola soluzione $t_a = t_k$ dell'equazione caratteristica [78].

Se $f(t)$ è un polinomio, allora i t_a sono le radici dell'equazione algebrica $f(t) = 0$. Perciò esistono relazioni note tra le radici t_a ed i coefficienti del polinomio $f(t)$.

E poi ovvio che tali relazioni portano a corrispondenti relazioni tra gli autovalori dei vari spettri.

Perciò possiamo dire che gli spettri sono *vincolati* tra loro. Altrimenti, se $f(t)$ non è un polinomio e non v'è relazione tra le radici di $f(t) = 0$, gli spettri degli autovalori verranno detti *non vincolati*.

RIASSUNTO

La soluzione di un'equazione differenziale lineare del 2° ordine, avente funzioni note come coefficienti dei termini di ordine 1° e zero, viene ridotta ad una speciale serie di potenze i cui coefficienti sono funzioni delle derivate dei suddetti coefficienti dei termini di ordine 1° e zero, calcolate negli zeri delle medesime. Le equazioni [33] e [72] si prestano per calcolazioni numeriche. Inoltre sono dedotte alcune proprietà degli autovalori.