SU DI UN METODO DI ANALISI DELLE PERIODICITA'

FERRUCCIO MOSETTI

Premessa. — È stato mostrato dal Vercelli (*) che quando si abbia una qualunque funzione empirica (registrazione di uno strumento, o successione di dati statistici), oscillante nel tempo, che si possa supporre data da una legge del tipo $y(t) = f(t) + \sum_1^n{}_i \sin \frac{2\pi}{T_i}(t + \varphi_i)$, (ove con $f(t)$ si indica una qualsiasi funzione non periodica e con φ_i un certo tempo di sfasamento), i vari periodi componenti presenti nella sommatoria si possono analizzare sostituendo di volta in volta ad una qualunque ordinata y_0, una combinazione lineare simmetrica, con opportuni coefficienti, di un certo numero di ordinate adiacenti (a destra e a sinistra) ad y_0. Precisamente se $y_0(t) = f(t_0) + \sum_1^n{}_i \sin \frac{2\pi}{T_i}(t_0 + \varphi_i)$ assumeremo, per selezionare una data componente, la combinazione:

$$y_0 = 2\,a_0\,y_0 + a_1(y_{+1} + y_{-1}) + a_2(y_{+2} + y_{-2}) + \ldots\ldots + a_m(y_{+m} + y_{-m})$$

ove con $y_{\pm p}$ si indica un ordinata distante p unità (della scala arbitraria delle ascisse) a destra (+) o a sinistra (—) di y_0.

Avremo allora

$$y_{+1} = f(t_0 + 1) + \sum_1^n{}_i\, sin \frac{2\pi}{T_i}(t_0 + \varphi_i + 1) =$$

$$= f(t_0 + 1) + \sum_1^n{}_i\, sin \frac{2\pi}{T_i}(t_0 + \varphi_i)\, cos \frac{2\pi}{T_i} + \sum_1^n{}_i\, cos \frac{2\pi}{T_i}(t_0 + \varphi_i)\, sin \frac{2\pi}{T_i}$$

$$y_{-1} = f(t_0 - 1) + \sum_1^n{}_i\, sin \frac{2\pi}{T_i}(t_0 + \varphi_i)\, cos \frac{2\pi}{T_i} - \sum_1^n{}_i\, cos \frac{2\pi}{T_i}(t_0 + \varphi_i)\, sin \frac{2\pi}{T_i}$$

(*) F. VERCELLI. *Guida per l'analisi delle periodicità nei diagrammi oscillanti.* Memoria CCLXXXV del R. Comitato Talassografico Italiano del CNR - 1940.

eseguendo la combinazione lineare, le due sommatorie dei coseni nell'argomento $\frac{2\pi}{T_i}(t_0 + \varphi_i)$ si annullano, per cui avremo:

$$a_1(y_{+1} + y_{-1}) = a_1 f(t_0 + 1) + a_1 f(t_0 - 1) + 2a_1 \sum_1^n{}_i \sin\frac{2\pi}{T_i}(t_0 + \varphi_i) \cos\frac{2\pi}{T_i}$$

$$a_2(y_{+2} + y_{-2}) = a_2 f(t_0 + 2) + a_2 f(t_0 - 2) + 2a_2 \sum_1^n{}_i \sin\frac{2\pi}{T_i}(t_0 + \varphi_i) \cos\frac{4\pi}{T_i}$$

....

$$a_m(y_{+m} + y_{-m}) = a_m f(t_0 + m) + a_m f(t_0 - m) + 2a_m \sum_1^n{}_i \sin\frac{2\pi}{T_i}(t_0 + \varphi_i) \cos\frac{2\pi m}{T_i}$$

posto

$$F(T) = 2a_0 f(t_0) + a_1 [f(t_0+1) + f(t_0-1)] + a_2 [f(t_0+2) + f(t_0-2)] + \ldots$$

che rappresenta la trasformazione della parte non periodica e che quindi non ci interessa nell'analisi delle periodicità, avremo che:

$$Y_0 = F(t) + 2a_0 \sum_1^n{}_i \sin\frac{2\pi}{T_i}(t_0 + \varphi_i) + 2a_1 \sum_1^n{}_i \sin\frac{2\pi}{T_i}(t_0 + \varphi_i) \cos\frac{2\pi}{T_i} + \ldots\ldots\ldots$$

$$\ldots + 2a_m \sum_1^n{}_i \sin\frac{2\pi}{T_i}(t_0 + \varphi_i) \cos\frac{2\pi m}{T_i}$$

cioè, mediante la combinazione lineare effettuata, la parte periodica $\sum_1^n{}_i \sin\frac{2\pi}{T_i}(t_0 + \varphi_i)$ della y_0 si trasforma nella

$$\sum_1^n{}_i \sin\frac{2\pi}{T_i}(t_0 + \varphi_i) \left[2a_0 + 2a_1 \cos\frac{2\pi}{T_i} + 2a_2 \cos\frac{4\pi}{T_i} + \ldots + 2a_m \cos\frac{2\pi m}{T_i}\right]$$

essa risulta composta dagli stessi periodi e con le stesse fasi della funzione originale, salvo che l'ampiezza di ogni componente di periodo T_i risulta alterata della quantità

$$M_i = 2a_0 + 2a_1 \cos\frac{2\pi}{T_i} + 2a_2 \cos\frac{4\pi}{T_i} + \ldots + 2a_m \cos\frac{2\pi n}{T_i}$$

Potremo allora obbligare questa espressione ad annullarsi per un certo numero di periodi e calcolarci, in base a queste condizioni, il valore dei coefficienti a_0, a_1, ... a_m tali che, effettuando, ordinata per ordinata una combinazione del tipo della Y_0, si abbia per risultato l'annullamento di un certo numero di periodi o anche di tutti i periodi presenti nella $y(t)$ all'infuori di quello dell'onda che si vuol selezionare. Operando sucessivamente in tale maniera si possono separare tutti i periodi presenti nella funzione oscillante. Tale scomposizione non ha significato puramente matematico, come per esempio l'analisi di Fourier che scomporrebbe la funzione originaria in un certo numero di peperiodi prefissati, (anche se essi non esistono nella natura fisica del fenomeno che si studia), ma ha piuttosto il significato fisico di un filtro che, eliminando tutti gli altri periodi, « lascia passare », se è presente, uno solo.

Si voglia ad esempio separare l'onda di periodo p e si voglia giungere a questo risultato imponendo l'annullamento delle onde di periodo q, r, s, ... maggiore di p e l, h, g, ... minore di p. Non esiste ancora una regola generale che permetta di assumere i periodi q, r, s, l, h, g, ... in modo da selezionare nel miglior modo il periodo p e di far sì che la curva di selettività abbia un solo massimo in corrispondenza di questo e non altri, esterni o interni all'insieme g, h, ... r, s, bisognerà quindi procedere per tentativi onde scegliere la combinazione migliore atta alla selezione di p. Comunque sia, lo mostriamo con esempi in appendice, per selezionare l'onda di periodo p dovremo risolvere un sistema del tipo

$$\left\{\begin{array}{l}
a_0 + a_1 \cos \dfrac{2\pi}{T_q} + a_2 \cos \dfrac{4\pi}{T_q} + \ldots . a_m \cos \dfrac{2\pi m}{T_q} = 0 \\[2ex]
a_0 + a_1 \cos \dfrac{2\pi}{T_r} + a_2 \cos \dfrac{4\pi}{T_r} + \ldots . a_m \cos \dfrac{2\pi m}{T_r} = 0 \\[2ex]
a_0 + a_1 \cos \dfrac{2\pi}{T_s} + a_2 \cos \dfrac{4\pi}{T_s} + \ldots . a_m \cos \dfrac{2\pi m}{T_s} = 0 \\[2ex]
\qquad\qquad\vdots \\[2ex]
a_0 + a_1 \cos \dfrac{2\pi}{T_g} + a_2 \cos \dfrac{4\pi}{T_g} + \ldots . a_m \cos \dfrac{2\pi m}{T_g} = 0 \\[2ex]
a_0 + a_1 \cos \dfrac{2\pi}{T_h} + a_2 \cos \dfrac{4\pi}{T_h} + \ldots . a_m \cos \dfrac{2\pi m}{T_h} = 0 \\[2ex]
a_0 + a_1 \cos \dfrac{2\pi}{T_l} + a_2 \cos \dfrac{4\pi}{T_l} + \ldots . a_m \cos \dfrac{2\pi m}{T_l} = 0
\end{array}\right.$$

le varie espressioni $\cos \frac{2\pi m}{T_i}$ essendo note, (vedi anche tab. 1) il sistema è risolubile purché il numero delle condizioni imposte per l'annullamento (q, r, s, ... g, h, l) sia eguale ad m.

In tale maniera si ricavano i coefficienti a_0, a_1, ... a_m della combinazione lineare simmetrica. Applicando questa combinazione ad ogni successiva ordinata della $y = \sum_{1}^{n} {}_i \sin \frac{2\pi}{T_i} (t + \varphi_i)$ si elimina da essa totalmente, o parzialmente ogni altra componente fuorché quella di periodo p. Inoltre, sostituendo nell'espressione M_i successivamente ad ogni T_i il valore di svariati periodi, compreso p, si può ricavare, in funzione del periodo l'andamento della curva di selettività.

È però ben noto ai cultori di analisi periodale che operando in tal maniera, con il metodo delle combinazioni lineari simmetriche, non si può analizzare il diagramma dato lungo tutto l'intervallo estendentesi per l unità di ascissa, bensì soltanto, ove si operi con una combinazione ad m coefficienti, lungo un intervallo interno a questo e di lunghezza l-2m. Saranno insomma esclusi dall'analisi due tratti di lunghezza m verso gli estremi sinistro e destro dell'intervallo in esame. Questo fatto è dannosissimo nel caso pratico della previsione del fenomeno oscillante in base all'estrapolazione delle componenti ed alla loro sintesi oltre il limite noto del diagramma originario perché, se non si conosce il comportamento delle componenti entro tutto l'intervallo, fino al suo estremo destro, all'errore di estrapolazione che si commetterebbe prolungando queste componenti *oltre* il detto limite, si aggiunge l'errore che si commette prolungando *fino* a questo estremo le onde analizzate, la cui conoscenza si arresta ad una distanza m da esso.

Per questo abbiamo pensato di usare un nuovo sistema di analisi periodale fondato non su combinazioni lineari simmetriche di ordinate, bensì su combinazioni lineari asimmetriche.

Metodo delle combinazioni lineari asimmetriche.

Data una successione di numeri (o di ordinate di un diagramma) ... y_p , y_q , y_r ... che si suppongono retti da una funzione oscillante la cui parte periodica è del tipo

$$y = \Sigma_i \sin \frac{2\pi}{T_i} (t + \varphi_i)$$

si sostituisca ad un generico valore y_0 di questa successione, una combinazione lineare comprendente y_0 e m ordinate *a sinistra* di questa e si operi così di seguito per ogni valore della successione.

Compiremo allora la trasformazione

$$y_0 \rightarrow Y_0^* = a_0\, y_0 + a_1\, y_{-1} + a_2\, y_{-2} + \ldots . + a_m\, y_{-m}$$

essendo

$$y_0 = \sum_1^n{}_i \sin \frac{2\pi}{T_i}(t_0 + \varphi_i)$$

sarà

$$y_{-1} = \sum_1^n{}_i \sin \frac{2\pi}{T_i}(t_0 + \varphi_i - 1) = \sum_1^n{}_i \sin \frac{2\pi}{T_i}(t_0 + \varphi_i) \cos \frac{2\pi}{T_i} -$$

$$- \sum_1^n{}_i \cos \frac{2\pi}{T_i}(t_0 + \varphi_i) \sin \frac{2\pi}{T_i}$$

$$y_{-2} = \sum_1^n{}_i \sin \frac{2\pi}{T_i}(t_0 + \varphi_i) \cos \frac{4\pi}{T_i} - \sum_1^n{}_i \cos \frac{2\pi}{T_i}(t_0 + \varphi_i) \sin \frac{4\pi}{T_i}$$

$$y_{-3} = \sum_1^n{}_i \sin \frac{2\pi}{T_i}(t_0 + \varphi_i) \cos \frac{6\pi}{T_i} - \sum_1^n{}_i \cos \frac{2\pi}{T_i}(t_0 + \varphi_i) \sin \frac{6\pi}{T_i}$$

. . . .

$$y_{-m} = \sum_1^n{}_i \sin \frac{2\pi}{T_i}(t_0 + \varphi_i) \cos \frac{2\pi m}{T_i} - \sum_1^n{}_i \cos \frac{2\pi}{T_i}(t_0 + \varphi_i) \sin \frac{2\pi m}{T_i}$$

per cui risulterà

$$Y_0^* = a_0 \sum_1^n{}_i \sin \frac{2\pi}{T_i}(t_0 + \varphi_i) + a_1 \sum_1^n{}_i \sin \frac{2\pi}{T_i}(t_0 + \varphi_i) \cos \frac{2\pi}{T_i} +$$

$$+ a_2 \sum_1^n{}_i \sin \frac{2\pi}{T_i}(t_0 + \varphi_i) \cos \frac{4\pi}{T_i} + \ldots\ldots\ldots\ a_m \sum_1^n{}_i \sin \frac{2\pi}{T_i}(t_0 + \varphi_i) \cos \frac{2\pi m}{T_i} -$$

$$- a_1 \sum_1^n{}_i \cos \frac{2\pi}{T_i}(t_0 + \varphi_i) \sin \frac{2\pi}{T_i} - a_2 \sum_1^n{}_i \cos \frac{2\pi}{T_i}(t_0 + \varphi_i) \sin \frac{2\pi}{T_i} - \ldots\ldots\ldots$$

$$\ldots\ldots - a_m \sum_1^n{}_i \sin \frac{2\pi}{T_i}(t_0 + \varphi_i) \sin \frac{2\pi m}{T_i} =$$

$$= \sum_1^n{}_i \sin \frac{2\pi}{T_i}(t_0 + \varphi_i) \left[a_0 + a_1 \cos \frac{2\pi}{T_i} + a_2 \cos \frac{4\pi}{T_i} + \ldots\ldots\ c_m \cos \frac{2\pi m}{T_i} \right] -$$

$$-\sum_1^n{}_i \cos\frac{2\pi}{T_i}(t_o+\varphi_i)\left|a_1 \sin\frac{2\pi}{T_i}+a_2 \sin\frac{4\pi}{T_i}+\ldots\ldots\ldots a_m \sin\frac{2\pi m}{T_i}\right|$$

ponendo

$$M_i' = c_o + a_1 \cos\frac{2\pi}{T_i} + a_2 \cos\frac{4\pi}{T_i} + \ldots\ldots$$

$$-M_i'' = a_1 \sin\frac{2\pi}{T_i} + a_2 \sin\frac{4\pi}{T_i} + a_3 \sin\frac{6\pi}{T_i} + \ldots\ldots\ldots$$

risulterà

$$Y_o^\star = \sum_1^n{}_i \sin\frac{2\pi}{T_i}(t_o+\varphi_i) M_i' + \sum_1^n{}_i \cos\frac{2\pi}{T_i}(t_o+\varphi_i) M_i''$$

per ogni valore y_o;

risulta così che nella successione degli y_i sono ancora presenti tutte le componenti coi loro svariati periodi T_i; ognuna di esse avrà però l'ampiezza alterata dalla quantità

$$M_i^\star = \sqrt{M_i'^2 + M_i''^2}$$

e risulterà inoltre sfasata, rispetto alla corrispondente oscillazione del diagramma originario, della quantità

$$tang\ \Phi_i^\star = -\frac{M_i''}{M_i'}$$

In tal maniera rimane risolto il problema di analizzare completamente la funzione a partire da una distanza m dall'estremo sinistro del suo campo di esistenza, *e fino all'estremo destro incluso*, anche se, talvolta, gli sfasamenti $\Phi_i^\star$ così introdotti riducono di assai il vantaggio di operare con questo sistema.

In modo del tutto analogo si potrà analizzare la funzione fino al suo estremo sinistro incluso; basterà, a tal uopo fare uso della combinazione asimmetrica che trasforma una qualunque ordinate y_o nella

$$Y_o^{\star\star} = a_o y_o + a_1 y_{+1} + a_2 y_{+2} + \ldots\ldots\ldots a_m y_{+m}$$

ove y_{+1}, y_{+2}, ... y_{+m} sono le ordinate adiacenti a y_o e a destra di questa, distanziate di 1, 2, ... m unità di ascisse.

Analogamente al caso precedente potremo scrivere

$$Y_o^{**} = \sum_1^n{}_i \sin \frac{2\pi}{T_i}(t_o + \varphi_i)\, M_i' + \sum_1^n{}_i \cos \frac{2\pi}{T_i}(t_o + \varphi_i)\, M_i''$$

ove abbiamo indicato con

M_i' l'espressione: $a_o + a_1 \cos \frac{2\pi}{T_i} + a_2 \cos \frac{4\pi}{T_i} + \ldots\ldots + a_m \cos \frac{2\pi m}{T_i}$ e con

M_i'' l'espressione: $a_1 \sin \frac{2\pi}{T_i} + a_2 \sin \frac{4\pi}{T_i} + \ldots\ldots a_m \sin \frac{2\pi m}{T_i}$

M_i^{**} sarà eguale a $\sqrt{M_i'^2 + M_i''^2}$ cioè eguale a M_i^*

$$\text{mentre} \quad tang\, \Phi_i^{**} = \frac{M_i''}{M_i'}$$

In entrambi i casi, (della combinazione lineare simmetrica coi coefficienti a destra di y_o o a sinistra di y_o) quando si voglia eliminare un'onda di un certo periodo q occorre e basta che sia

$$M_q' = M_q'' = 0$$

Si voglia per esempio selezionare una certa onda di periodo p eliminando le adiacenti di periodi g, h, l, ... q, r, s.

Bisognerà risolvere il sistema lineare omogeneo

$$a_o + a_1 \cos \frac{2\pi}{T_g} + a_2 \cos \frac{4\pi}{T_g} + \ldots\ldots + a_m \cos \frac{2\pi m}{T_g} = 0$$

$$a_o + a_1 \cos \frac{2\pi}{T_h} + a_2 \cos \frac{4\pi}{T_h} + \ldots\ldots + a_m \cos \frac{2\pi m}{T_h} = 0$$

$$a_o + a_1 \cos \frac{2\pi}{T_l} + a_2 \cos \frac{4\pi}{T_l} + \ldots\ldots + a_m \cos \frac{2\pi m}{T_l} = 0$$

....

....

$$a_o + a_1 \cos \frac{2\pi}{T_q} + a_2 \cos \frac{4\pi}{T_q} + \ldots\ldots + a_m \cos \frac{2\pi m}{T_q} = 0$$

$$a_o + a_1 \cos \frac{2\pi}{T_r} + a_2 \cos \frac{4\pi}{T_r} + \ldots\ldots + a_m \cos \frac{2\pi m}{T_r} = 0$$

$$a_0 + a_1 \cos \frac{2\pi}{T_s} + a_2 \cos \frac{4\pi}{T_s} + \ldots\ldots + a_m \cos \frac{2\pi m}{T_s} = 0$$

$$a_1 \sin \frac{2\pi}{T_g} + a_2 \sin \frac{4\pi}{T_g} + \ldots\ldots + a_m \sin \frac{2\pi m}{T_g} = 0$$

$$a_1 \sin \frac{2\pi}{T_h} + a_2 \sin \frac{4\pi}{T_h} + \ldots\ldots + a_m \sin \frac{2\pi m}{T_h} = 0$$

$$a_1 \sin \frac{2\pi}{T_l} + a_2 \sin \frac{4\pi}{T_l} + \ldots\ldots + a_m \sin \frac{2\pi m}{T_l} = 0$$

$$a_1 \sin \frac{2\pi}{T_q} + a_2 \sin \frac{4\pi}{T_q} + \ldots\ldots + a_m \sin \frac{2\pi m}{T_q} = 0$$

$$a_1 \sin \frac{2\pi}{T_r} + a_2 \sin \frac{4\pi}{T_r} + \ldots\ldots + a_m \sin \frac{2\pi m}{T_r} = 0$$

$$a_1 \sin \frac{2\pi}{T_s} + a_2 \sin \frac{4\pi}{T_s} + \ldots\ldots + a_m \sin \frac{2\pi m}{T_s} = 0$$

per la cui risoluzione dovrà essere che il numero m delle incognite sia eguale al doppio delle condizioni g, h, l, ... q, r, s che si impongono.

In tal maniera riusciamo a determinare il numero e il valore dei coefficienti a_0 , a_1 , a_2 , ... che servono per selezionare una data onda di periodo p; sfruttando questi coefficienti potremo anche calcolarci il valore assunto da M_i^{**} (o da M_i^{*}) in funzione del periodo, onde conoscere l'andamento della curva di selettività della combinazione lineare asimmetrica usata, e, analogamente, ci potremo calcolare, sempre in funzione del periodo, lo sfasamento che essa apporta. Questo sfasamento è eguale in valore assoluto per i due tipi di combinazione a destra e a sinistra: esso varia solo di segno, nel senso che la combinazione a destra provoca un certo ritardo di fase sull'onda originaria, la combinazione a sinistra un anticipo.

Concludendo, il metodo delle combinazioni simmetriche permette di analizzare una funzione oscillante che si suppone formata da periodicità semplici, data in un certo dominio, fino ad una certa distanza dagli estremi a sinistra e a destra del dominio stesso. Da ciò la possibilità di poter conoscere l'andamento delle componenti solo riguardo una parte dei dati disponibili e di apportare anche grossi errori nell'estrapolazione a destra del limite noto del diagramma quando si voglia sfruttare l'analisi periodale al fine di previsione del fenomeno. Col metodo delle combinazioni lineari asimmetriche, che qua si è esposto, siamo invece in grado di analizzare la funzione oscillante entro tutto il dominio in cui essa è data, operando due volte, con le combinazioni asimmetriche a destra e a sinistra e riportando le componenti nelle loro fasi reali, tenendo conto, oltre che dell'alterazione dell'ampiezza, anche dello sfasamento.

APPENDICE I

Per il calcolo dei coefficienti delle combinazioni lineari asimmetriche occorre conoscere, per i vari periodi le espressioni M_i' e M_i''

$$M_i' = a_0 + a_1 \cos \frac{2\pi}{T_i} + a_2 \cos \frac{4\pi}{T_i} + \ldots\ldots$$

$$M_i'' = a_1 \sin \frac{2\pi}{T_i} + a_2 \sin \frac{4\pi}{T_i} + \ldots\ldots$$

come si è già visto, le quantità a_0, a_1, a_2 ... si calcolano di caso in caso in base al periodo dell'onda che si vuol selezionare *e cioè alle condizioni di annullamento che si impongono a determinate periodicità.*

I valori

$$\cos \frac{2\pi m}{T_i}\,, \quad \sin \frac{2\pi m}{T_i}$$

variano invece solo con il periodo; presentiamo nelle successive tabelle 1 e 2 i valori assunti da queste funzioni per alcuni periodi.

TABELLA 1 — M'_i *in funzione del periodo* T_i

$T_i =$										
2	a_0	$-\ a_1$	$+\ a_2$	$-\ a_3$	$+\ a_4$	$-\ a_5$	$+\ a_6$	$-\ a_7$	$+\ a_8$	. . . .
2,5	a_0	$-0{,}809a_1$	$+0{,}309a_2$	$+0{,}309a_3$	$-0{,}809a_4$	$+\ a_5$	$-0{,}809a_6$	$+0{,}309a_7$	$+0{,}309a_8$	. . . .
3	a_0	$-0{,}500a_1$	$-0{,}500a_2$	$+\ a_3$	$-0{,}500a_4$	$-0{,}500a_5$	$+\ a_6$	$-0{,}500a_7$	$-0{,}500a_8$	. . . .
3,5	a_0	$-0{,}222a_1$	$-0{,}900a_2$	$+0{,}623a_3$	$+0{,}623a_4$	$-0{,}900a_5$	$+0{,}222a_6$	$+\ a_7$	$-0{,}222a_8$	. . . .
4	a_0	0	$-\ a_2$	0	$+\ a_4$	0	$-\ a_6$	0	$+\ a_8$	. . . .
5	a_0	$+0{,}309a_1$	$-0{,}809a_2$	$-0{,}809a_3$	$+0{,}309a_4$	$+\ a_5$	$+0{,}309a_6$	$-0{,}809a_7$	$-0{,}809a_8$	. . . .
6	a_0	$+0{,}500a_1$	$-0{,}500a_2$	$-\ a_3$	$-0{,}500a_4$	$+0{,}500a_5$	$+\ a_6$	$+0{,}500a_7$	$-0{,}500a_8$	. . . .
7	a_0	$+0{,}623a_1$	$-0{,}222a_2$	$-0{,}900a_3$	$-0{,}900a_4$	$-0{,}222a_5$	$+0{,}623a_6$	$+\ a_7$	$+0{,}623a_8$	. . . .
8	a_0	$+0{,}707a_1$	0	$-0{,}707a_3$	$-\ a_4$	$-0{,}707a_5$	0	$+0{,}707a_7$	$+\ a_8$	. . . .
9	a_0	$+0{,}766a_1$	$+0{,}174a_2$	$-0{,}500a_3$	$-0{,}934a_4$	$-0{,}934a_5$	$-0{,}500a_6$	$+0{,}174a_7$	$+0{,}766a_8$	. . . .
10	a_0	$+0{,}809a_1$	$+0{,}309a_2$	$-0{,}309a_3$	$-0{,}809a_4$	$-\ a_5$	$-0{,}809a_6$	$-0{,}309a_7$	$+0{,}309a_8$	. . . .
12	a_0	$+0{,}865a_1$	$+0{,}500a_2$	0	$-0{,}500a_4$	$-0{,}865a_5$	$-\ a_6$	$-0{,}865a_7$	$-0{,}500a_8$	. . . .
16	a_0	$+0{,}924a_1$	$+0{,}707a_2$	$+0{,}383a_3$	0	$-0{,}383a_5$	$-0{,}707a_6$	$-0{,}924a_7$	$-\ a_8$	. . . .
20	a_0	$+0{,}951a_1$	$+0{,}809a_2$	$+0{,}588a_3$	$+0{,}309a_4$	0	$-0{,}309a_6$	$-0{,}588a_7$	$-0{,}809a_8$	. . . .
24	a_0	$+0{,}956a_1$	$+0{,}865a_2$	$+0{,}707a_3$	$+0{,}500a_4$	$+0{,}259a_5$	0	$-0{,}259a_7$	$-0{,}500a_8$	. . . .
32	a_0	$+0{,}930a_1$	$+0{,}924a_2$	$+0{,}831a_3$	$+0{,}707a_4$	$+0{,}555a_5$	$+0{,}383a_6$	$+0{,}195a_7$	0	. . .
48	a_0	$+0{,}939a_1$	$+0{,}966a_2$	$+0{,}924a_3$	$+0{,}865a_4$	$+0{,}793a_5$	$+0{,}707a_6$	$+0{,}609a_7$	$+0{,}500a_8$	. . . .
64	a_0	$+0{,}995a_1$	$+0{,}980a_2$	$+0{,}955a_3$	$+0{,}924a_4$	$+0{,}882a_5$	$+0{,}831a_6$	$+0{,}771a_7$	$+0{,}707a_8$	. . . .
∞	a_0	$+\ a_1$	$+\ a_2$	$+\ a_3$	$+\ a_4$	$+\ a_5$	$+\ a_6$	$+\ a_7$	$+\ a_8$	. . . .

TABELLA 2 — M''_i *in funzione dei vari periodi* T_i

T_i =									
2	0	0	0	0	0	0	0	0	
2,5	$+0{,}588a_1$	$-0{,}951a_2$	$+0{,}951a_3$	$-0{,}588a_4$	0	$+0{,}588a_6$	$-0{,}951a_7$	$+0{,}951a_8$	. . . . .
3	$+0{,}866a_1$	$-0{,}866a_2$	0	$+0{,}866a_4$	$-0{,}866a_5$	0	$+0{,}866a_7$	$-0{,}866a_8$	. . . . .
3,5	$+0{,}974a_1$	$-0{,}438a_2$	$-0{,}777a_3$	$+0{,}788a_4$	$+0{,}422a_5$	$-0{,}974a_6$	0	$+0{,}974a_8$	. . . . .
4	$+\ a_1$	0	$-\ a_3$	0	$+\ a_5$	0	$-\ a_7$	0	. . . . .
5	$+0{,}951a_1$	$+0{,}588a_2$	$-0{,}588a_3$	$-0{,}951a_4$	0	$+0{,}951a_6$	$+0{,}588a_7$	$-0{,}588a_8$	. . . . .
6	$+0{,}866a_1$	$+0{,}856a_2$	0	$-0{,}866a_4$	$-0{,}866a_5$	0	$+0{,}866a_7$	$+0{,}866a_8$	. . . . .
7	$+0{,}780a_1$	$+0{,}975a_2$	$+0{,}435a_3$	$-0{,}435a_4$	$-0{,}975a_5$	$-0{,}780a_6$	0	$+0{,}780a_8$	. . . . .
8	$+0{,}707a_1$	$+\ a_2$	$+0{,}707a_3$	0	$-0{,}707a_5$	$-\ a_6$	$-0{,}707a_7$	0	. . . . .
9	$+0{,}643a_1$	$+0{,}985a_2$	$+0{,}866a_3$	$+0{,}342a_4$	$-0{,}342a_5$	$-0{,}866a_6$	$-0{,}985a_7$	$-0{,}643a_8$	. . . . .
10	$+0{,}588a_1$	$+0{,}951a_2$	$+0{,}951a_3$	$+0{,}588a_4$	0	$-0{,}588a_6$	$-0{,}951a_7$	$-0{,}588a_8$	. . . . .
12	$+0{,}500a_1$	$+0{,}866a_2$	$+\ a_3$	$+0{,}866a_4$	$+0{,}500a_5$	0	$-0{,}500a_7$	$-0{,}856a_8$	. . . . .
16	$+0{,}383a_1$	$+0{,}707a_2$	$+0{,}924a_3$	$+\ a_4$	$+0{,}924a_5$	$+0{,}707a_6$	$+0{,}383a_7$	0	. . . . .
20	$+0{,}309a_1$	$+0{,}588a_2$	$+0{,}809a_3$	$+0{,}951a_4$	$+\ a_5$	$+0{,}951a_6$	$+0{,}809a_7$	$+0{,}588a_8$	. . . . .
24	$+0{,}259a_1$	$+0{,}500a_2$	$+0{,}707a_3$	$+0{,}866a_4$	$+0{,}966a_5$	$+\ a_6$	$+0{,}966a_7$	$+0{,}866a_8$	. . . . .
32	$+0{,}195a_1$	$+0{,}383a_2$	$+0{,}556a_3$	$+0{,}707a_4$	$+0{,}831a_5$	$+0{,}924a_6$	$+0{,}981a_7$	$+\ a_8$	. . . . .
48	$+0{,}131a_1$	$+0{,}259a_2$	$+0{,}383a_3$	$+0{,}500a_4$	$+0{,}609a_5$	$+0{,}706a_6$	$+0{,}793a_7$	0	. . . . .
64	$+0{,}099a_1$	$+0{,}179a_2$	$+0{,}292a_3$	$+0{,}385a_4$	$+0{,}474a_5$	$+0{,}559a_6$	$+0{,}638a_7$	0	. . . . .
∞	0	0	0	0	0	0	0	0	. . . . .

APPENDICE II

Esempi di calcolo di coefficienti per le combinazioni asimmetriche e confronto dei risultati con quelli delle combinazioni simmetriche.

a) Vogliamo mostrare come si ricavano, col metodo delle combinazioni simmetriche, i coefficienti atti a lisciare una curva oscillante, di eliminare cioè da essa le ondulazioni di periodo più piccolo. Siano per esempio da eliminare da una certa curva le oscillazioni di periodo di 2, 3, 4, 6, unità della scala arbitraria delle ascisse. Dovrà essere, per il metodo simmetrico:

$$M_2 = M_3 = M_4 = M_6 = 0 \quad 1)$$

Ricordando che le espressioni di M nel caso delle combinazioni simmetriche sono eguali a $2M'$, in base ai valori di M' dei periodi in questione (tabella 1) l'eguaglianza 1) equivale al sistema

$$\begin{cases} a_0 - a_1 + a_2 - a_3 + a_4 = 0 \\ a_0 - 0{,}5\, a_1 - 0{,}5\, a_2 + a_3 - 0{,}5\, a_4 = 0 \\ a_0 - a_2 + a_4 = 0 \\ a_0 + 0{,}5\, a_1 - 0{,}5\, a_2 - a_3 - 0{,}5\, a_4 = 0 \end{cases}$$

da cui si ottiene:

$$a_0 = a_2 - a_4\ , \quad a_1 = 2\, a_2 - a_3\ , \quad a_2 = \ {}_3 - a_4\ , \quad a_2 = 2\, a_4$$

essendo a_0 arbitrario scriveremo:

$$a_0 = 1\ , \quad a_1 = 2\ , \quad a_2 = 3/2\ , \quad a_3 = 1\ , \quad a_4 = 1/2\ .$$

Volendo che l'onda di periodo infinito rimanga di ampiezza inalterata, dovrà essere $M\infty = 1$, poiché con i coefficienti che abbiamo ricavato risulta $M\infty = 2\,(1 + 2 + 3/2 + 1 + 1/2) = 12$ dovremo dividere per 12 il valore dei coefficienti trovati, ottenendo

$$a_0 = 1/12\ , \quad a_1 = 1/6\ , \quad a_2 = 1/8\ , \quad a_3 = 1/12\ , \quad a_4 = 1/24$$

La combinazione lineare che trasforma ogni ordinata della $y = \sum_1^n{}_i \, sin \dfrac{2\pi}{T_i}(t + \varphi_i)$ in una curva dello stesso tipo in cui sono state eliminate le onde di periodo 2, 3, 4, 6, equivale ad operare su ogni ordinata y_0 e sulle sue adiacenti a destra e a sinistra con la

$$Y_0 = 2a_0 + 2a_1(y_{-1} + y_{+1}) + 2a_2(y_{-2} + y_{+2}) + \\ + 2a_3(y_{-3} + y_{+3}) + 2a_4(y_{-4} + y_{+4})$$

Sostituiremo cioè in definitiva alle ordinate

$$y_{-4} \; y_{-3} \; y_{-2} \; y_{-1} \; y_0 \; y_{+1} \; y_{+2} \; y_{+3} \; y_{+4}$$

i valori

$$1/24\,y_{-4} \; 1/12\,y_{-3} \; 1/8\,y_{-2} \; 1/6\,y_{-1} \; 1/6\,y_0 \; 1/6\,y_{+1} \; 1/8\,y_{+2} \; 1/12\,y_{+3} \; 1/24\,y_{+4}$$

sommando i quali avremo trasformato l'ordinata y_0 nella Y_0 con il risultato di avere eliminato da essa il contributo delle onde di periodo 2, 3, 4 e 6. Operando così di seguito per tutte le ordinate della curva data, ne eseguiremo il lisciamento. In base ai coefficienti così ottenuti possiamo calcolare il valore assunto da M per i vari periodi onde ricavare l'andamento della curva di selettività. Si ottiene precisamente: $M_2 = 0$, $M_{2,5} = -0{,}04$, $M_3 = 0$, $M_{3.5} = +0{,}02$, $M_4 = 0$, $M_5 = -0{,}04$, $M_6 = 0$, $M_8 = +0{,}20$, $M_{10} = +0{,}40$, $M_{12} = +0{,}54$, $M_{16} = +0{,}71$, $M_{20} = +0{,}80$, $M_{24} = +0{,}86$, $M_{32} = 0{,}92$, $M_{48} = +0{,}94$, $M_{64} = +0{,}96$, $M_\infty = +1{,}00$.

Sempre per annullare le componenti di periodo 2, 3, 4 e 6 calcoleremo ora i coefficienti per una combinazione lineare asimmetrica. Dovrà essere

$$M_2 = M_3 = M_4 = M_6 = 0 \quad \text{cioè}$$
$$M'_2 = M''_2 = M'_3 = M''_3 = M'_4 = M''_4 = M'_6 = M''_6 = 0$$

eguaglianza che, sulla scorta dei dati di tabella 1 e di tabella 2 equivale al sistema (poiché M_2'' è identicamente nullo)

$$\begin{cases} a_0 - a_1 + a_2 - a_3 + a_4 - a_5 + a_6 - a_7 = 0 \\ a_0 - 0{,}5\,a_1 - 0{,}5\,a_2 + a_3 - 0{,}5\,a_4 - 0{,}5\,a_5 + a_6 - 0{,}5\,a_7 = 0 \\ a_1 - a_2 + a_4 - a_5 + a_7 = 0 \\ a_0 - a_2 + a_4 - a_6 = 0 \\ a_1 - a_3 + a_5 - a_7 = 0 \\ a_0 + 0{,}5\,a_1 - 0{,}5\,a_2 - a_3 - 0{,}5\,a_4 + 0{,}5\,a_5 + a_6 + 0{,}5\,a_7 = 0 \\ a_1 + a_2 - a_4 - a_5 + a_7 = 0 \end{cases}$$

Dal quale si ricava

$$a_0 = a_2 - a_4 + a_6 \,,\; a_1 = a_3 - a_5 + a_7 \,,\; a_2 = - a_3 + a_4 + + 2\,a_5 - 2\,a_7 \,,\; a_3 = a_5 \,,\; a_4 = 2\,a_6 \,,\; a_5 = 2\,a_7 \,,\; a_6 = a_7$$

posto $a_0 = 1$ si ha

$$a_0 = 1 \,,\; a_1 = 1 \,,\; a_2 = 2 \,,\; a_3 = 2 \,,\; a_4 = 2 \,,\; a_5 = 2 \,,\; a_6 = 1 \,,\; a_7 = 1$$

in tal caso, sostituendo questi coefficienti in $M\infty$ si ottiene $M\infty = 12$, perché esso risulti invece in scala dovremo scrivere, dividendo per 12 tutti i coefficienti

$$a_0 = 1/12 \,,\; a_1 = 1/12 \,,\; a_2 = 1/6 \,,\; a_3 = 1/6 \,,\; a_4 = 1/6 \,,\; a_5 = 1/6 \,,$$
$$a_6 = 1/12 \,,\; a_7 = 1/12$$

Questo vuol dire che per eliminare, col metodo delle combinazioni lineari asimmmetriche, da una funzione $y = \sum_1^n \sin \frac{2\pi}{T_i} (t + \varphi_i)$ le onde componenti di periodo 2, 3, 4 e 6 dovremo sostituire ad ogni ordinata y_0 la combinazione

$$Y_0^{\star} = a_0\, y_0 + a_1\, y_{-1} + a_2\, y_{-2} + a_3\, y_{-3} + a_4\, y_{-4} + a_5\, y_{-5} + a_6\, y_{-6} + a_7\, y_{-7}$$

oppure

$$Y_0^{\star\star} = a_0\, y_0 + a_1\, y_{+1} + a_2\, y_{+2} + a_3\, y_{+3} + a_4\, y_{+4} + a_5\, y_{+5} + a_6\, y_{+6} + a_7\, y_{+7}$$

(a secondo che si voglia analizzare il diagramma fino al suo estremo destro oppure fino al suo estremo sinistro), ove i coefficienti a_0, a_1, ... a_7 hanno i valori più sopra riportati.

Converrà ora ricavare le curve di selettività e quelle di sfasamento per questa particolare combinazione lineare asimmetrica. In base ai coefficienti trovati e alle espressioni di M' e M'' (tabella 1 e 2) si otterrà la tabella 3

b) Volendo eseguire un altro tipo di perequazione, meno rigido, che permetta cioè di eliminare solo le più piccole ondulazioni, opereremo analogamente. Si voglia in questo caso annullare solo le componenti di periodo 2 e 3.

Per le combinazioni lineari simmetriche sarà allora $M_2 = M_3 = 0$ cioè

$$\begin{cases} a_0 - a_1 + a_2 = 0 \\ a_0 - 0{,}5\, a_1 - 0{,}5\, a_2 = 0 \end{cases}$$

da cui si ottiene $a_0 = 1$, $a_1 = 3/2$, $a_2 = 1/2$.

TABELLA 3

T	M'	M''	$M^* = M^{**}$	$tang\ \Phi^*$	Φ^*	$tang\ \Phi^{**}$	Φ^{**}
2	0	0	0	—	—	—	—
3	0	0	0	—	—	—	—
4	0	0	0	—	—	—	—
5	+0,016	+0,049	+0,052	—1	104°	+1	76°
6	0	0	0	—	—	—	—
8	—0,200	+0,083	+0,216	+0,415	22°40′	—0,415	157°20′
10	—0,244	+0,335	+0,414	+1,37	53°50′	—1,37	126°10′
12	—0,228	+0,539	+0,585	+2,36	67°05	—2,36	112°55′
16	+0,142	+0,711	+0,730	—5,03	101°15′	+5,03	78°45′
20	+0,372	+0,730	+0,810	—1,96	117°	+1,96	63°
24	+0,508	+0,750	+0,905	—1,48	124°	+1,48	56°
32	+0,715	+0,581	+0,921	—0,81	141°	+0,81	39°
48	+0,865	+0,426	+0,970	—0,492	154°	+0,492	26°
64	+0,923	+0,333	+0,981	—0,360	160°	+0,360	20°
∞	+1,000	0	+1,000	0	180°	0	0°

Riducendo questi coefficienti in modo da avere che $M\infty = 1$, dovremo sostituire a

$$y_{-2} \quad y_{-1} \quad y_0 \quad y_1 \quad y_2$$

$$1/12\, y_{-2} \quad 1/4\, y_{-1} \quad 1/3\, y_0 \quad 1/4\, y_1 \quad 1/12\, y_2$$

sommando questi valori per ogni ordinata y_0 della successione data avremo come risultato l'eliminazione delle componenti di periodo 2 e 3.

Ove si operi invece con una combinazione lineare asimmetrica dovremo porre

$$M'_2 = M''_2 = M'_3 = M''_3 = 0 \ ,$$

questa eguaglianza, poiché M''_2 risulta identicamente nullo, equivale al sistema

$$\begin{cases} a_0 - a_1 + a_2 - a_3 = 0 \\ a_0 - 0{,}5\, a_1 - 0{,}5\, a_2 + a_3 = 0 \\ a_1 - a_2 = 0 \end{cases}$$

da cui ricaviamo $a_0 = 1$, $a_1 = 2$, $a_2 = 2$, $a_3 = 1$
dividendo per 6 tali coefficienti in maniera che $M\infty$ sia eguale ad 1 si avrà

$$a_0 = 1/6 \ , \ a_1 = 1/3 \ , \ a_2 = 1/3 \ , \ a_3 = 1/6$$

La combinazione asimmetrica da eseguire per eliminare le onde di periodo 2 e 3 risulta dunque per ogni y_0

$$1/6\, y_0 + 1/3\, y_{-1} + 1/3\, y_{-2} + 1/6\, y_{-3} \text{ oppure } 1/6\, y_0 + 1/3\, y_1 + 1/3\, y_2 + 1/6\, y_3$$

Come si è già fatto precedentemente potremo calcolare anche in questo caso con l'aiuto delle tabelle 1 e 2 il valore di M' e M'' in funzione di T, e gli sfasamenti per l'asimmetria a destra e per l'asimmetria a sinistra.

c) Visto il caso del lisciamento della curva esamineremo ora quello della selezione dell'asse medio, dell'onda cioè di periodo infinito, o prossimo a questo, che si comporta come una curva media attorno alla quale oscilla la funzione. In tale asse medio sono presenti solo le onde di periodo lunghissimo mentre si eliminano tutte quelle di periodo breve, per es. 4, 8, 12, 16, ecc. A causa però delle condizioni che si impongono per l'annullamento di questo periodi « centrali », si ottiene che l'ampiezza 1 risulta non solo per l'onda di periodo infinito ma anche per le componenti più piccole (di periodo 2 e 3 per esempio) per cui le combinazioni lineari per la selezione dell'asse medio bisogna applicarle non sulla curva originale bensì su quella perequata. Cerchiamo per esempio ora una combinazione simmetrica che elimini le onde di periodo 4 e 8. Dovrà essere cioè $M_4 = M_8 = 0$, il che vuol dire:

$$\begin{cases} a_0 - a_2 + a_4 = 0 \\ a_0 + 0{,}707\, a_1 - 0{,}707\, a_3 - a_4 = 0 \end{cases}$$

per risolvere il sistema dovremo porre $a_1 = a_3 = 0$, per cui si ottiene, tenendo altresì conto dell'arbitrarietà di a_0 : $a_0 = 1$, $a_2 = 2$, $a_4 = 1$, oppure riducendo i coefficienti in modo che risulti $M\infty = 1$, $a_0 = 1/8$, $a_2 = 1/4$, $a_4 = 1/8$.

Come si vede in questo caso possiamo trascurare le ordinate di ascissa dispari: per cui, per eliminare le onde di periodo 4 e 8 da una $y = \sum_1^n {}_i \, sin \frac{2\pi}{T_i} (t + \varphi_i)$ basterà sostituire di seguito, per ogni y_0, alla successione

$$y_{-4} \; y_{-2} \; y_0 \; y_2 \; y_4 \qquad \text{la successione}$$

$$1/8\, y_{-2} \quad 1/4\, y_{-2} \quad 1/8\, y_0 \quad 1/4\, y_2 \quad 1/8\, y_4$$

e sommare i termini.

Volendo ora che sia $M_4{}^\star = M_8{}^\star = 0$ nel caso delle combinazioni asimmetriche, considerando anche qua solo le ordinate di ascissa pari e tenendo conto che allora M_2'' è identicamente nullo, dovremo risolvere il sistema

$$\begin{cases} a_2 - a_6 = 0 \\ a_0 - a_2 + a_4 - a_6 = 0 \\ a_0 - a_4 = 0 \end{cases}$$

dal quale si ricava $a_0 = 1$, $a_2 = 1$, $a_4 = 1$, $a_6 = 1$ o, perché risulti $M\infty = 1$, $a_0 = 1/4$, $a_2 = 1/4$, , $a_4 = 1/4$, $a_6 = 1/4$.

Si otterrà cioè l'eliminazione dalla successione data, delle componenti di periodo 4 e 8, sostituendo ad ogni y_0 di questa la combinazione

$$1/4\,(y_0 + y_{-2} + y_{-4} + y_{-6}) \text{ oppure la } 1/4\,(y_0 + y_2 + y_4 - y_6)$$

come sempre, a seconda che si voglia analizzare la successione fino al suo estremo destro compreso oppure fino al suo estremo sinistro. Questa combinazione, come si vede, è molto più comoda e di calcolo più rapido che non quella simmetrica.

d) In maniera del tutto analoga a questo modo di operare per l'eliminazione di una o più componenti lasciandone inalterate tutte le altre, si possono calcolare i coefficienti atti all'eliminazione di tutte le ondulazioni presenti lasciandone (teoricamente) inalterata una sola.

Si voglia per esempio eliminare tutte le componenti di una $y = \sum_1^n$ s$in \dfrac{2\pi}{T_i}(t + \varphi_i)$ selezionando quella di periodo 2. Basterà allora, quando non si richieda, ed in pratica è quasi sempre sufficiente, una selezione troppo spinta, porre, nel caso delle combinazioni lineari simmetriche $M_3 = M_4 = M_6 = M\infty = 0$, il che equivale al sistema

$$\begin{cases} a_0 - 0{,}5\, a_1 - 0{,}5\, a_2 + a_3 - 0{,}5\, a_4 = 0 \\ a_0 - a_2 + a_4 = 0 \\ a_0 + 0{,}5\, a_1 - 0{,}5\, a_2 - a_3 - 0{,}5\, a_4 = 0 \\ a_0 + a_1 + a_2 + a_3 + a_4 = 0 \end{cases}$$

risolvendo questo sistema, come al solito, si ricava che per raggiungere lo scopo voluto basterà sostituire ad ogni ordinata y_0 del diagramma originario la combinazione:

$$1/24\, y_{-4} - 1/12\, y_{-3} + 1/8\, y_{-2} - 1/6\, y_{-1} + 1/6\, y_0 - 1/6\, y_1 +$$
$$+ 1/8\, y_2 - 1/12\, y_3 + /1/24\, y_4$$

Volendo ottenere il medesimo risultato col metodo delle combinazioni asimmetriche dovremo risolvere il sistema

$$M_3^\star = M_4^\star = M_5^\star = M^\star_\infty = 0 \text{ cioè } M_3' = M_3'' = M_4' = M_4'' =$$
$$= M_6' = M_5'' = M'_\infty = M''_\infty = 0$$

essendo M''_∞ identicamente nullo ci risulterà il sistema (vedi tabelle 1 e 2)

$$\begin{cases} a_0 - 0{,}5\, a_1 - 0{,}5\, a_2 + a_3 - 0{,}5\, a_4 - 0{,}5\, a_5 + a_6 - 0{,}5\, a_7 = 0 \\ a_1 - a_2 + a_4 - a_5 + a_7 = 0 \\ a_0 - a_2 + a_4 - a_6 = 0 \\ a_1 - a_3 + a_5 - a_7 = 0 \\ a_0 + 0{,}5\, a_1 - 0{,}5\, a_2 - a_3 - 0{,}5\, a_4 + 0{,}5\, a_5 + a_6 + 0{,}5\, a_7 = 0 \\ a_1 + a_2 - a_4 - a_5 + a_7 = 0 \\ a_0 + a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5 + a_6 + a_7 = \rho \end{cases}$$

risolvendolo come al solito si ottiene che per selezionare, con ampiezza invariata, l'onda di periodo 2 bisognerà eseguire su ogni valore y_0 della successione data la combinazione

$$1/12\, y_0 - 1/12\, y_1 + 1/6\, y_2 - 1/6\, y_3 + 1/6\, y_4 - 1/6\, y_5 + 1/12\, y_6 - 1/12\, y_7$$

oppure la sua analoga con le ordinate a sinistra di y_0.

Istituto Nazionale di Geofisica — Osserv. di Trieste — Agosto 1953.

RIASSUNTO

Si è pensato di costruire un metodo di analisi delle periodicità fondato, anziché sulle combinazioni lineari simmetriche, su combinazioni lineari asimmetriche di ordinate, che permetta l'analisi completa fino ai limiti destro e sinistro del dominio in cui la funzione è data. Questo metodo comporta oltre che un'alterazione di ampiezza anche uno sfasamento delle componenti, del quale si può però tener rigorosamente conto. Si espongono anche alcuni esempi di calcolo dei coefficienti per questo tipo di analisi delle periodicità, e si confrontano i risultati con quelli del metodo delle combinazioni simmetriche.

SUMMARY

A method has been proposed for analyzing periodicity, based on assymmetric linear combinations of ordinates instead of symmetric linear combinations, which allows a complete analysis within the left and right limits of the domain in which the function is given. This method gives, besides an amplitude alteration, a phase shift of the components which can be rigorously accounted for.

Some examples of the calculation of the coefficients for this type of analysis of the periodicity are described, and the results are compared with those resulting from the method of symmetric combinations.