

DENSITÀ ELETTRONICA NELL'ALTA ATMOSFERA E INTERPRETAZIONE DELLE CURVE $h' (f)$ DELL'ALTEZZA VIRTUALE DELLA IONOSFERA

F. MARIANI

Introduzione. — Numerosi autori hanno trattato il problema della propagazione di onde elettromagnetiche in mezzi ionizzati. Per primo Appleton ⁽¹⁾ ha dato l'espressione analitica dell'indice di rifrazione di « fase » μ ; questo, in generale, varia con legge assai complicata colla frequenza f dell'onda, colla densità elettronica (funzione dell'altezza), coll'angolo tra campo magnetico terrestre e direzione di propagazione; una volta noto μ è possibile, nell'approssimazione dell'ottica geometrica, dedurre l'indice di rifrazione di « gruppo »

$\mu' = \frac{d(\mu f)}{df}$, che però ha una forma esplicita ancora più complessa.

Gran parte delle applicazioni della teoria, effettuate dai vari autori, sono fondate sull'ipotesi semplificativa che il campo magnetico terrestre \vec{H} sia trascurabile (sia cioè $H = 0$) ⁽²⁾, ⁽³⁾, ⁽⁴⁾, oppure sulle approssimazioni estreme di propagazione « quasi longitudinale » o « quasi trasversale »: l'applicazione della formula esatta è stata compiuta solo per certi casi particolari ⁽¹⁾ ⁽⁵⁾ ⁽⁶⁾ ⁽⁷⁾ ⁽⁸⁾ ⁽⁹⁾; recentemente H. A. Whale e J. P. Stanley ⁽¹⁰⁾ hanno studiato la dipendenza esatta di μ e μ' dai vari parametri ottenendo risultati numerici relativi alla propagazione sia del raggio ordinario sia di quello straordinario per una serie abbastanza estesa di direzioni di propagazione e per due valori della frequenza; d'altra parte, D. H. Shinn e H. A. Whale ⁽¹¹⁾, hanno dimostrato che valutando nell'ipotesi $H = 0$ l'altezza h_m del massimo di densità elettronica e lo spessore di uno strato « parabolico » si ottengono in generale valori considerevolmente differenti da quelli ottenuti colla trattazione esatta e di entità crescente al crescere della latitudine: così, per es., il metodo di Appleton Beynon ⁽¹²⁾ ⁽¹³⁾ che dà valori quasi esatti per l'altezza h_m , può condurre a errori percentuali del 50-80% nella valutazione dello spessore degli strati.

Nel presente lavoro si dà una estesa serie di risultati mostrandoci, per la latitudine geomagnetica di Roma, la dipendenza di μ' dai vari parametri, per direzione di propagazione verticale; si valuta inoltre, in funzione della frequenza f il « cammino ottico » di un'onda elettromagnetica riflessa o attraversante tutto o parte di uno strato ionosferico; infine si sviluppa un metodo di confronto delle curve sperimentali della altezza virtuale nei vari casi che normalmente possono presentarsi, con i risultati del calcolo, allo scopo di dedurre le caratteristiche geometriche della distribuzione in altezza delle densità elettroniche corrispondenti ai vari strati.

Le ipotesi su cui il calcolo è basato sono le seguenti:

a) È applicabile la teoria di Appleton, ed è trascurabile l'assorbimento; gli elettroni sono pertanto supposti liberi.

b) È presente il campo magnetico terrestre, che si assimila a quello di un dipolo posto al centro della terra.

c) In ciascuno strato la densità elettronica N varia coll'altezza z con legge parabolica ».

1. *Teoria.* — La formula di Appleton per l'indice di rifrazione di fase μ si scrive

$$\mu^2 = 1 - \frac{2x(1-x)}{D} \quad [1]$$

dove:

$$x = \frac{f_0^2}{f^2}$$

$$f_0^2 = \frac{N e^2}{\pi m}$$

f = frequenza dell'onda impiegata.

N = densità di elettroni alla generica quota z .

e, m = carica e massa dell'elettrone in unità C.G.S.

$$D = 2(1-x) - y^2 \sin^2 \vartheta + [y^4 \sin^4 \vartheta + 4y^2(1-x)^2 \cos^2 \vartheta]^{1/2}$$

$$y = \frac{f_H}{f}$$

$$f_H = \frac{e H}{2 \pi m c} = \text{frequenza giromagnetica.}$$

H = valore del campo magnetico, in oersted.

$c = 1 \cdot 30^{10}$ cm/sec velocità della luce nel vuoto.

ϑ = angolo tra campo magnetico e direzione di propagazione.

I segni + e - si riferiscono rispettivamente alla propagazione del raggio ordinario e del raggio straordinario. Notiamo inoltre che si ha

$$\mu' = \frac{d(\mu f)}{df} = \mu + f \frac{d\mu}{df} = \frac{1}{\mu} \left[\mu^2 + \frac{1}{2} f \frac{d\mu^2}{df} \right] \quad [2]$$

Dalle [2] e [1] deriva allora, immediatamente:

$$\mu\mu' = 1 - \frac{2x^2}{D} + \frac{x(1-x)}{D^2} M \quad [3]$$

con

$$M = 4x + 2y^2 \operatorname{sen}^2 \vartheta - 2 \frac{2y \cos^2 \vartheta (1-x)(3x-1) - y^3 \operatorname{sen}^4 \vartheta}{[y^2 \operatorname{sen}^4 \vartheta + 4y \cos^2 \vartheta (1-x)]^{1/2}} \quad [4]$$

Il prodotto $\mu\mu'$, che vale 1 nel caso che il campo magnetico sia nullo, è altrimenti diverso dall'unità.

La densità di elettroni N , varia coll'altezza z secondo la legge

$$N(z) = N_0 \left[1 - \left(1 - \frac{z}{z_0} \right)^2 \right] \quad 0 < z < 2z_0 \quad [5]$$

L'origine delle altezze è scelta alla quota dove inizia lo strato; z_0 è il semispessore di questo, cioè la distanza tra l'origine e la quota corrispondente al massimo di densità elettronica N_0 . Nel seguito tutte le volte che considereremo il cammino ottico relativo a uno strato, converremo di porre l'origine sempre alla quota di inizio della sua distribuzione di densità.

L'espressione [5], che ha il vantaggio di prestarsi al calcolo numerico, è soddisfacente anche dal punto di vista fisico in quanto approssima una distribuzione di tipo gaussiano o quella di un semplice strato di Chapman. Convieni anzi notare che il parametro z_0 che meglio approssima una distribuzione di Chapman uguaglia il doppio della scala delle altezze (*scale height*) dell'atmosfera.

La variazione coll'altezza dell'intensità del campo magnetico è data dalla espressione

$$H(\lambda, r) = \left[\frac{M}{R^3} (1 + 3 \operatorname{sen}^2 \lambda)^{1/2} \right] \frac{R^3}{r^3} = H(\lambda, R) \frac{R^3}{(R+h)^3} \quad [6]$$

h = altezza rispetto al suolo.

R = 6370 km = raggio terrestre.

r = $R + h$ = distanza dal centro della terra.

λ = latitudine magnetica.

M = momento magnetico del dipolo terrestre.

$H(\lambda, R)$ = 0.444 oersted, intensità del campo magnetico al suolo, a Roma.

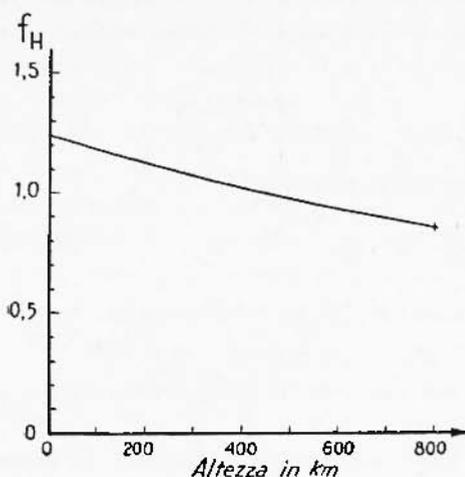


Fig. 1

La fig. 1 mostra l'andamento dell'intensità H col'altezza.

L'angolo di inclinazione i assume, a Roma, il valore $i_0 \simeq 58^\circ 30'$; pertanto, se la direzione di propagazione è la verticale, come è il normale caso delle ionosonde, ϑ avrà il valore $\vartheta_0 = 31^\circ 30'$.

Il cammino ottico di gruppo $L_{z_1 z_2}(f)$ relativo a un intervallo di quote $z_1 z_2$ e corrisponde ad una frequenza f , è dato dalla espressione

$$L_{z_1 z_2}(f) = \int_{z_1}^{z_2} \mu'(x, y, \vartheta_0) dz \quad [7]$$

e, in generale, dipende dalla frequenza critica f_c dello strato attraversato; esso pertanto, ove sia necessario indicarlo esplicitamente, sarà scritto

$$f_c L_{z_1 z_2}(f)$$

Tenendo conto della [5] abbiamo

$$z = z_0 \left[1 \pm \left(1 - \frac{N}{N_0} \right)^{1/2} \right] = z_0 \left[1 \pm \left(1 - x \frac{f^2}{f_c^2} \right)^{1/2} \right] \quad [8]$$

Il segno $-$ vale per $z < z_0$, che è anche il caso che abitualmente dovremo prendere in considerazione; il segno $+$ invece vale per $z > z_0$ e l'unico uso che se ne fa è nello scrivere la [51].

Differenziando la [8], avendo scelto il segno $+$, otteniamo

$$dz = \frac{z_0 f^2}{2 f_c^2} \frac{1}{\left(1 - x \frac{f^2}{f_c^2} \right)^{1/2}} dx \quad [9]$$

La [7] diviene perciò

$$f_c L_{z_1 z_2}(f) = \frac{z_0 f^2}{2 f_c^2} \int_{x(z_1)}^{x(z_2)} \frac{\mu'(x, y, \vartheta_0)}{\left(1 - x \frac{f^2}{f_c^2} \right)^{1/2}} dx \quad [10]$$

Nel seguito noi useremo la [10] introducendo opportuni cambiamenti di variabile nell'integrando allo scopo di renderlo finito in ogni punto dell'intervallo di integrazione e, altresì, di avere come limiti inferiore e superiore di integrazione, rispettivamente 0 e l'unità. L'integrale può essere calcolato in forma analitica esatta solo per alcuni casi particolari, tra cui quando sia $H = 0$; nel caso nostro dovremo calcolarlo numericamente. Per la necessità di limitare i calcoli numerici già abbastanza penosi, useremo il metodo di integrazione nume-

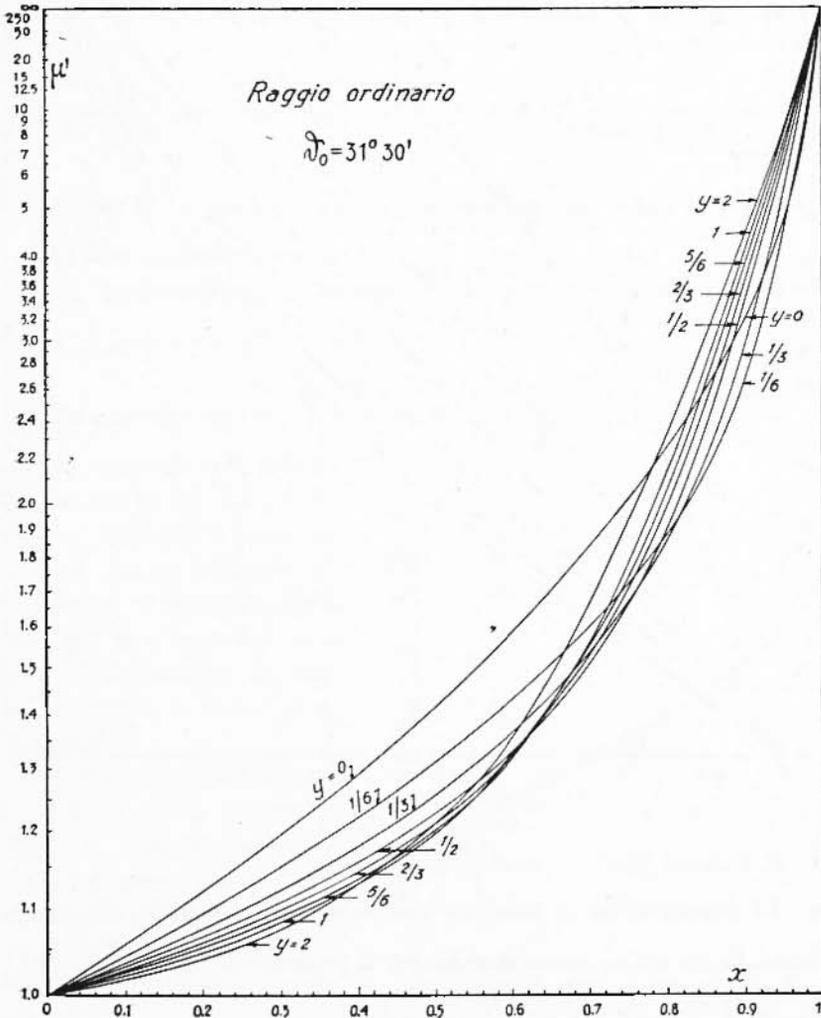


Fig. 2

rica di Gauss approssimando l'integrando con un polinomio di 13° grado, ciò che implica la conoscenza dei suoi valori in solo 7 punti.

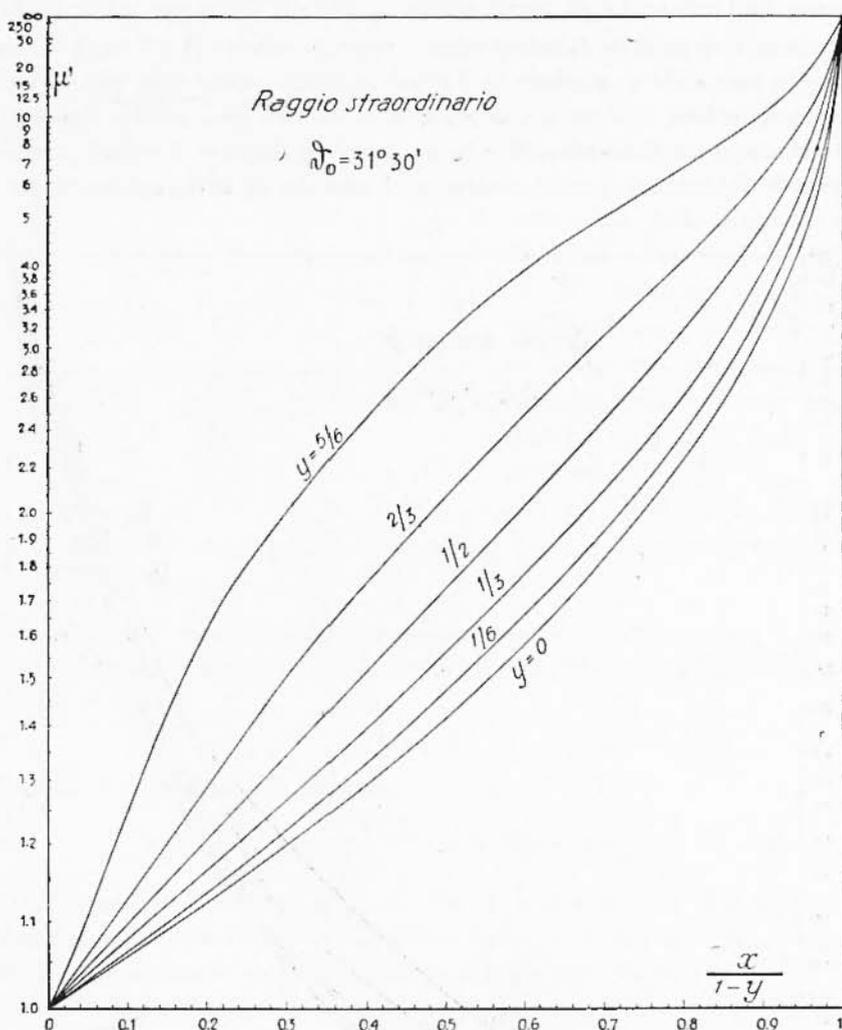


Fig. 3

2. Calcolo di μ' . — a) Raggio ordinario.

La propagazione è possibile per valori di x soggetti alla limitazione: $0 < x < 1$. Si sono scelti per il parametro $y = \frac{f_n}{f}$ i valori $0, \frac{1}{6}, \frac{1}{3}, \frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{5}{6}, 1, 2$

La fig. 2 mostra il risultato del calcolo; poiché $\lim_{x \rightarrow 1} \mu' = +\infty$, per le ordinate si è usata una scala reciproca. La curva per $y = 0$ corrisponde al caso $H = 0$; si vede che, in presenza di campo magnetico e a parità di frequenza, la velocità di propagazione di un'onda elettromagnetica è alquanto maggiore che in assenza di campo finché x non supera un certo valore x^* : al di là di questo invece la velocità diviene rapidamente inferiore.

Nell'integrazione della [10] è stato necessario conoscere l'andamento di μ' per valori di x molto prossimi all'unità; a tale scopo ponendo nelle [1] e [3] $1 - x = \delta \ll 1$ si deduce la seguente espressione di μ' .

$$\mu' = \frac{1}{\delta^{1/2} \operatorname{sen} \vartheta} \left[1 - \frac{3}{2} \delta \cotg^2 \vartheta + \delta^2 \cotg^2 \vartheta \left(1 + \left\{ \frac{15}{8} - \frac{5}{2 y^2} \right\} \cotg^2 \vartheta \right) \right]. \quad [11]$$

Valori di μ' per $x \rightarrow 1$ sono mostrati per vari valori di y in fig. 3.

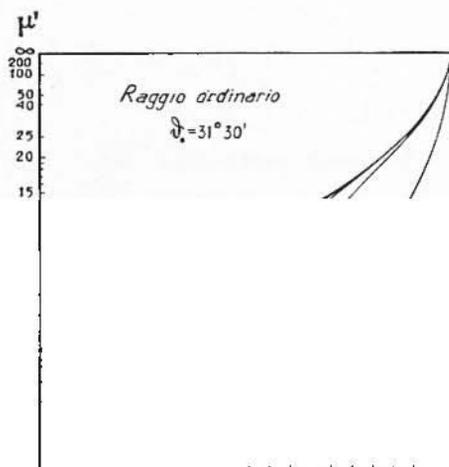
b) *Raggio straordinario.*

La propagazione è possibile ⁽¹⁴⁾ per valori di x tali che $0 \leq x < 1 - y$ cioè $0 \leq \frac{x}{1-y} \leq 1$.

Sono stati scelti per y i valori $0, \frac{1}{6}, \frac{1}{3}, \frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{5}{6}$.

Il risultato del calcolo è mostrato in fig. 4; si vede che la velocità di propagazione è sempre minore che in assenza di campo magnetico, nel qual caso del resto non c'è distinzione tra raggio ordinario e raggio straordinario.

Il confronto delle figure 2, 3 e 4 con quelle corrispondenti di Shinn-Whale ⁽¹¹⁾, ottenute per $\vartheta_0 = 23^\circ 16'$ mostra, a parità degli altri parametri, differenze sensibili solo per il raggio ordinario.



3. Calcolo di $\frac{f_c L_{oz}(f)}{z_0}$ per uno strato avente il suo massimo di densità elettronica all'altezza di 100 km sul suolo.

1° caso: Frequenza f minore della frequenza critica.

Notiamo che la frequenza critica f_c^* relativa al raggio straordinario è maggiore di quella f_c , relativa al raggio ordinario; si deve avere evidentemente

$$\frac{x(z_0)}{1-y} = 1 \quad [12]$$

in corrispondenza della quota z_0 : la frequenza f_0 assume a questa quota il valore $f_0 = f_c$; pertanto la [12] diviene

$$\frac{f_c^2}{f_c^{*2}} = 1 - \frac{f_H}{f_c^*} \quad [13]$$

da cui

$$f_c^* = \frac{2f_c^2}{-f_H + (f_H^2 + 4f_c^2)^{1/2}} \quad [14]$$

Così alle frequenze critiche $f_c = 2, 3, 4$ Mc/sec corrispondono rispettivamente le frequenze critiche $f_c^* = 2.677, 3.649, 4.635$ Mc/sec.

a) *Raggio ordinario*: $\frac{f}{f_c} < 1$.

Sia z la quota di riflessione della frequenza f . La [10] si scrive

$$f_c L_{oz}(f) = \frac{z_0}{2} \frac{f^2}{f_c^2} \int_0^1 \frac{\mu' dx}{\left(1 - x \frac{f^2}{f_c^2}\right)^{1/2}} \quad [15]$$

In questa espressione $\lim_{x \rightarrow 1} \mu' = +\infty$, mentre il denominatore invece è sempre finito; ponendo però $x = 1 - \varrho^2$ si ottiene

$$f_c L_{oz}(f) = z_0 \frac{f^2}{f_c^2} \int_0^1 \frac{\mu' \varrho d\varrho}{\left[1 - (1 - \varrho^2) \frac{f^2}{f_c^2}\right]^{1/2}} \quad [16]$$

Si vede dalla [11] che ora $\lim_{x \rightarrow 1} \mu' \varrho = \frac{1}{\sin \vartheta}$ e quindi l'integrando rimane finito in tutto l'intervallo di integrazione.

Nel calcolo esplicito della [16] occorrerebbe considerare la pro-

gressiva variazione di H e quindi di f_{II} e di y con l'altezza; noi invece prenderemo, per ogni frequenza, quel valore costante di y , che corrisponde all'altezza di 100 km dal suolo. Questa approssimazione è giustificata sia perché lo spessore dello strato è presumibilmente di poche decine di chilometri e quindi la variazione di f_{II} non è superiore a 1-2%, sia perché il cammino ottico maggiormente si discosta dal percorso geometrico dell'onda in vicinanza del massimo di densità elettronica; così anche le normali variazioni di altezza di questo massimo con l'ora, con la stagione ecc., non sono tali da far uscire dai limiti della approssimazione del calcolo.

Le curve ascendenti di fig. 5 mostrano $\frac{f_c L_{oz}(f)}{z_0}$ per tre valori della frequenza critica $f_c = 2, 3, 4$ Mc/sec.

La linea tratteggiata mostra invece il cammino ottico calcolato con la formula di Appleton semplificata.

Si nota che $\frac{f_c L_{oz}(f)}{z_0}$ risulta, per ogni frequenza, maggiore di quello corrispondente di Appleton-Beynon; però mentre quest'ultimo dipende rigorosamente dal rapporto f/f_c , il primo, a parità di f/f_c mostra una leggera dipendenza da f : così i cammini ottici per $f_c = 2$ e 4 Mc/sec differiscono a parità di f/f_c al più di qualche per cento (vedi tabella I).

b) *Raggio straordinario: $f < f_c^*$.*

La [10] questa volta si scrive

$$f_c^* L_{oz}(f) = \frac{z_0}{2} \frac{f^2}{f_c^2} \int_0^{x=1-y} \frac{u'}{\left(1 - x \frac{f^2}{f_c^2}\right)^{1/2}} dx \quad [17]$$

Ponendo $x = (1-y)v$ e $v = 1 - \varrho^2$ si ottiene

$$\frac{\mu' \varrho d\varrho}{\left|1 - (1-y)(1 - \varrho^2)\right|^{1/2}} \quad [18]$$

In quest'ultima forma l'integrando si conserva finito nell'intervallo di integrazione.

Le curve di fig. 6 mostrano l'andamento di $\frac{f_c^* L_{oz}(f)}{z_0}$ in funzione

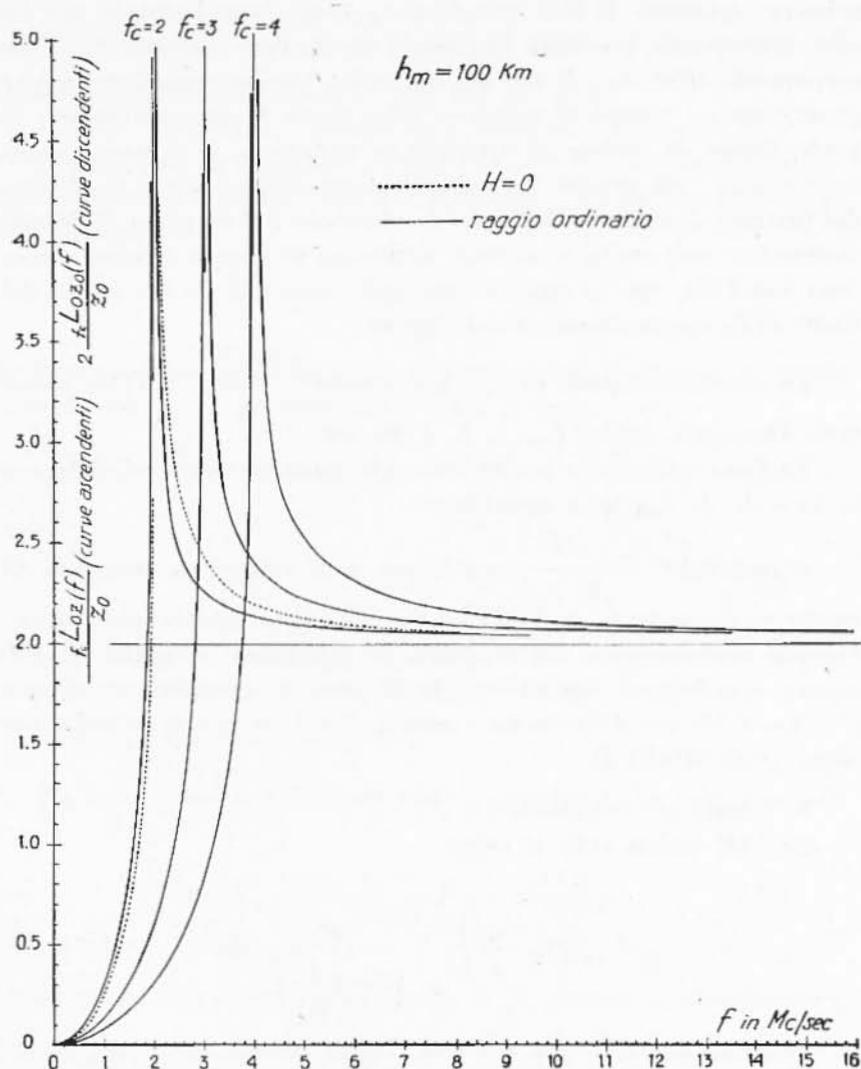


Fig. 5

di f per $f^* = 2.677, 3.649, 4.635 \text{ Mc./sec.}$

In questo caso il cammino ottico esatto è, per ogni frequenza, minore di quello corrispondente di Appleton-Beynon; la sua dipendenza da f , a parità di f/f_c , è più accentuata che nel caso del raggio ordinario: per $f_c = 2$ e 4 Mc./sec i cammini ottici differiscono fino a

10-15 % in vicinanza della frequenza critica.

2° caso: frequenza f maggiore della frequenza critica.

Questo secondo caso ha interesse per la valutazione del cammino ottico $\int_{f_c}^f L_{oz_0}(f)$ corrispondente all'intero semi-spessore z_0 dello strato e permetterà di studiare la riflessione da strati sovrastanti a quello considerato, tenendo nel dovuto conto la ritardazione da questo introdotta; qualora i dati sperimentali consentano un confronto sufficientemente accurato con la teoria è possibile altresì avere informazioni sulla validità della [5] anche al disopra del massimo di densità elettronica.

Calcoleremo il cammino ottico che corrisponde all'intervallo di quote tra 0 e z_0 , per il solo raggio ordinario.

La [10] si scrive

$$f_c L_{oz_0}(f) = \frac{z_0}{2} \frac{f^2}{f_c^2} \int_0^x \frac{|x'| dx}{\left(1 - x \frac{f_c^2}{f^2}\right)^{1/2}} \quad [19]$$

Questa volta il numeratore dell'integrando è ovunque finito; invece il denominatore tende a zero quando x tende a $\frac{f_c^2}{f^2}$

Ponendo $x = \frac{f_c}{f^2} v$ e $v = 1 - \varrho$ otteniamo

$$f_c L_{oz_0}(f) = z_0 \int |v'| d\varrho \quad [20]$$

Il cammino ottico corrispondente all'intero strato è $2 \int_{f_c}^f L_{oz_0}(f)$;

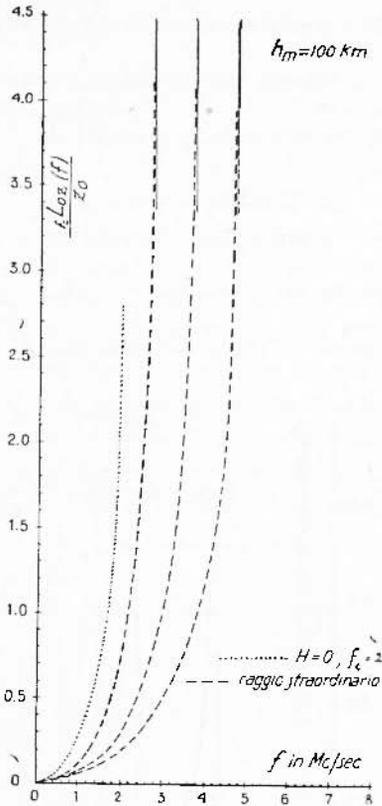


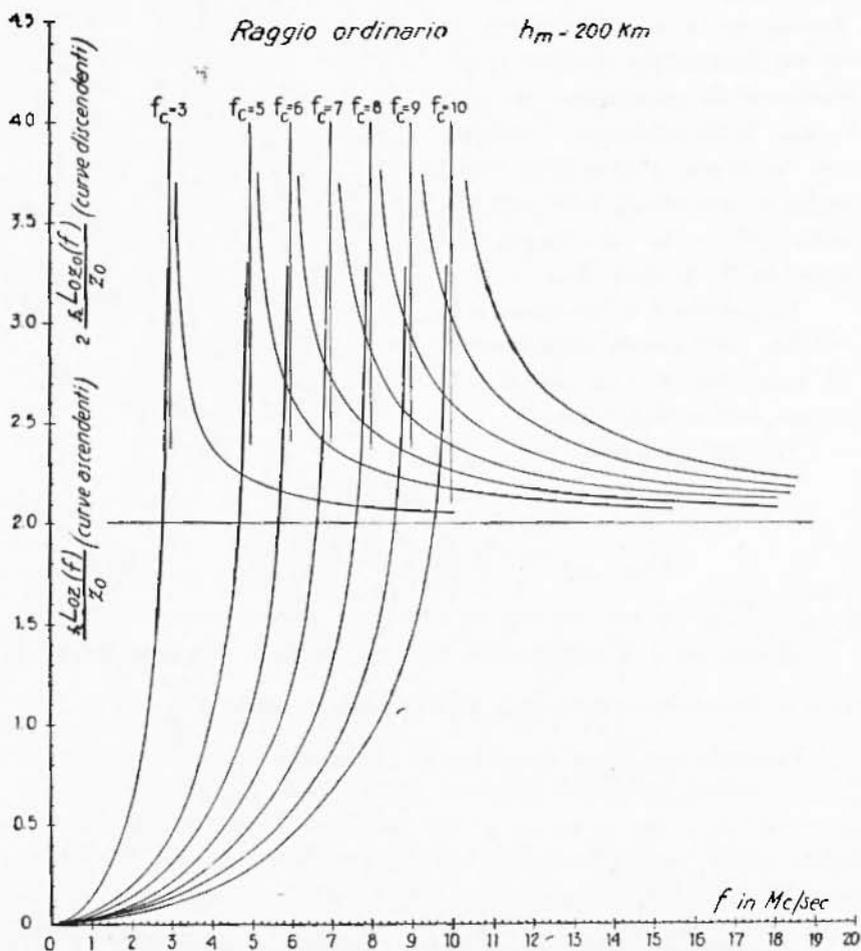
Fig. 6

le curve ascendenti di fig. 5 mostrano l'andamento di $\frac{2 \int_{f_c}^f L_0 z_0(f)}{z_0}$.

Anche questa volta si nota la assai leggera dipendenza del cammino ottico da f , a parità di $\frac{f}{f_c}$.

4. Estensione del calcolo a strati sovrastanti (per es. F_1 e F_2).

Consideriamo questa volta solo la propagazione del raggio ordinario nei due casi $\frac{f}{f_c} < 1$ e $\frac{f}{f_c} > 1$; prenderemo per l'altezza h_m rispetto al suolo del massimo di densità elettronica i due valori 200 e



500 km. La fig. 7 mostra le quantità $\frac{f_c L_{0z}(f)}{z_0}$ e $\frac{2 f_c L_{0z_0}(f)}{z_0}$ per l'altezza di 200 km; i valori per $h_m = 500$ km sono praticamente non diversi; anche le curve corrispondenti a uguali valori di f/f_c non mostrano sensibili differenze; i valori numerici esatti $\frac{f_c L_{0z}(f)}{z_0}$ e $\frac{2 f_c L_{0z_0}(f)}{z_0}$ per

il raggio ordinario sono riportati nella tabella I nella quale per confronto si riportano anche i valori esatti relativi a $h_m = 500$ km, $h_m = 100$ km e quelli approssimati di Appleton, per $f/f_c < 1$ e > 1 .

Può presentarsi il caso che le due distribuzioni di densità $N(z)$ e $v(z)$, corrispondenti ai due strati siano sovrapposte per un certo intervallo di quote: noi supporremo che in questo intervallo la densità risultante $\delta(z)$ sia la somma delle due densità $N(z)$ e $v(z)$ come se ciascuno strato non si « accorgesse » della presenza dell'altro. La situazione è del tipo di quelle descritte in fig. 8 nella quale le linee piene rappresentano le funzioni $N(z)$ e $v(z)$ e la linea a punti la funzione $\delta(z) = N(z) + v(z)$.

L'origine delle altezze è fissata, per ora, alla quota dove inizia lo strato più basso. Siano

$$\left\{ \begin{array}{l} N(z) = N_0 \left[1 - \left(1 - \frac{z}{z_0} \right)^2 \right] \quad 0 \leq z \leq 2 z_0 \\ = 0 \quad \text{altrove} \end{array} \right. \quad [21]$$

$$\left\{ \begin{array}{l} v(z) = v_0 \left[1 - \left(1 - \frac{z - (z_0 + a)}{\zeta_0} \right)^2 \right] \quad z_0 + a \leq z \leq z_0 + a + 2 \zeta_0 \\ = 0 \quad \text{altrove} \end{array} \right. \quad [22]$$

dove

v_0 = densità elettronica al massimo dello strato più alto.

ζ_0 = suo semispessore,

a , variabile tra $-z_0$ e $+z_0$ - differenza di quota, con segno, tra la quota di inizio della distribuzione relativa allo strato più alto e quella del massimo di densità dello strato inferiore.

Spostando per comodità l'origine dell'asse z nel punto di quota $z + a$ e ponendo $l = z - (z_0 + a)$, otteniamo, nella zona di sovrapposizione, una densità

$$\frac{N_0 + v_0}{2} \left[1 - \left(1 - \frac{l}{z_0} \right)^2 \right] \left[1 - \left(1 - \frac{l}{\zeta_0} \right)^2 \right] \quad [23]$$

TABELLA I

f/f_c	Formula di Appleton con $H=0$	Formula di Appleton esatta $h_m = 100$ km			Formula di Appleton esatta $h_m = 200$ km								Formula di Appleton esatta $h_m = 500$ km					
		$f_c=2$	$f_c=3$	$f_c=4$	$f_c=3$	$f_c=5$	$f_c=6$	$f_c=7$	$f_c=8$	$f_c=9$	$f_c=10$	$f_c=3$	$f_c=5$	$f_c=6$	$f_c=7$	$f_c=8$	$f_c=9$	$f_c=10$
0.1	0.010	0.012	0.012	0.012														
0.3	0.093	0.111	0.110	0.109	0.109	0.106	0.105	0.104	0.103	0.102	0.101	0.108	0.105	0.104	0.103	0.101	0.101	0.100
0.5	0.274	0.326	0.317	0.310	0.315	0.305	0.305	0.303	0.302	0.299	0.297	0.312	0.300	0.297	0.295	0.299	0.297	0.296
0.7	0.607	0.715	0.694	0.675	0.689	0.672	0.668	0.666	0.662	0.657	0.655	0.685	0.669	0.665	0.661	0.657	0.653	0.648
0.8	0.879	1.039	1.005	0.977														
0.9	1.325	1.598	1.542	1.509	1.541	1.519	1.495	1.478	1.463	1.454	1.448	1.522	1.499	1.482	1.466	1.453	1.446	1.440
0.95	1.740	2.162	2.090	2.046	2.087	2.049	2.010	1.991	1.968	1.949	1.938	2.069	2.043	1.996	1.968	1.954	1.941	1.931
0.975	2.128	2.740	2.650	2.629	2.654	2.639	2.546	2.507	2.479	2.463	2.434	2.635	2.563	2.517	2.479	2.455	2.440	2.421
1.025	7.272	4.866	4.469	4.190														
1.05	3.888	3.677	3.483	3.406	3.468	3.383	3.386	3.404	3.424	3.448	3.483							
1.10	3.35	2.901	2.885	2.895														
1.20	2.878	2.505	2.548	2.589	2.556	2.628	2.637	2.674	2.692	2.705	2.717							
1.30	2.646	2.363	2.406	2.437														
1.40	2.509	2.294	2.334	2.363	2.310	2.390	2.404	2.417	2.427	2.434	2.441							
1.50	2.414																	
1.60	2.346	2.206	2.235	2.256	2.240	2.275	2.282	2.289	2.297	2.301	2.306							
1.80	2.255	2.163	2.190	2.206	2.184	2.210	2.217	2.218	2.225	2.231	2.233							
2	2.196	2.128	2.148	2.155	2.150	2.166	2.169	2.176	2.177	2.181	2.183							
2.5	2.118	2.081	2.095	2.100														
3	2.079	2.061	2.068	2.070	2.065	2.068	2.070	2.072	2.073	2.074	2.075							
3.5	2.058	2.046	2.048	2.048														
4	2.042	2.038	2.042	2.044														

Le frequenze sono in Mc/sec.

La densità $\delta(l_m)$ vale allora

$$\delta(l_m) = \frac{\frac{N_0^2}{z_0^2} + \frac{N_0 v_0}{\zeta_0^2} - \frac{N_0 v_0 a^2}{z_0^2 \zeta_0^2} + \frac{v_0^2}{\zeta_0^2} - \frac{2 N_0 v_0 a}{\zeta_0 z_0^2}}{\frac{N_0}{z_0^2} + \frac{v_0}{\zeta_0^2}} \quad [25]$$

Sostituendo alle densità N_0 e v_0 le corrispondenti frequenze critiche, le [24] e [25] divengono

$$l_m = \frac{\zeta_0 z_0^2 f_Y^2 - \zeta_0^2 a f_c^2}{\zeta_0^2 f_c^2 + z_0^2 f_Y^2} \quad [26]$$

$$v_c = \frac{\zeta_0^2 f_c^4 + z_0^2 f_Y^4 + f_c^2 f_Y^2 [z_0^2 - a^2 - 2a\zeta_0]}{\zeta_0^2 f_c^2 + z_0^2 f_Y^2} \quad [27]$$

$v_c = \left[\frac{e^2}{\pi m} \delta(l_m) \right]^{1/2}$ = frequenza critica corrispondente al massimo di $\delta(l)$
 f_c e f_Y = frequenze critiche rispettivamente dello strato inferiore e dello strato superiore, ove ciascuno di essi esistesse indipendentemente dall'altro.

Ci riuscirà comodo in seguito porre $\delta(l)$ nella forma

$$\delta(\zeta) = \delta_0 \left[1 - \left(1 - \frac{\zeta}{\zeta_0} \right)^2 \right] \quad [28]$$

Si ricava immediatamente confrontando le [23] e [28]

$$\zeta_0 = z_0 \zeta_0 \frac{v_c}{[\zeta_0^2 f_c^2 + z_0^2 f_Y^2]^{1/2}} \quad [29]$$

e

$$\delta_0 = \delta(l_m) \quad [30]$$

A titolo di es. per gli strati di fig. 8 nei quali si ha $z_0 = 40$ km, $\zeta_0 = 50$ km, $f_c = 3$ Mc/sec, $f_Y = 3,35$ Mc/sec, $a = -10$ km, si ottiene $v_c = 4.03$ Mc/sec, $\zeta_0 = 40$ km, $l_m = 27.75$ km, $\delta_0 = 2.04 \cdot 10^7$ (cm³)⁻¹

5. È interessante conoscere anche il cammino ottico corrispondente ad una parte di strato; per es., nel caso di fig. 8 la deduzione della esatta curva teorica $h'(f)$ dell'altezza virtuale rende necessario conoscere il cammino ottico che corrisponde a intervalli di quota come $0 \mid - \mid z_A$ e $z_A \mid - \mid z_A + l_m$.

Ci limitiamo anche qui a considerare soltanto il raggio ordinario, distinguendo, al solito, i due casi $\frac{f}{f_c} < 1$ e $\frac{f}{f_c} > 1$.

Il calcolo è stato effettuato prendendo per f_H il suo valore a 500 km dal suolo (ciò corrisponde nel nostro schema a considerare uno strato col suo massimo di densità a 500 km da terra), e ritenendo che esso si mantenga costante nell'intervallo di integrazione della [10].

I risultati potranno applicarsi con buona approssimazione anche a distanze dalla terra considerevolmente diverse.

1° caso: $\frac{f}{f_c} < 1$. — Sia z_B (fig. 8) la quota del punto B; in generale, tranne il caso in cui z_B sia proprio la quota di riflessione delle onde di frequenza f , caso già considerato nei paragrafi precedenti, la variabile x assumerà per z_B un valore $\alpha < 1$. Avremo pertanto per la [10], colla posizione $x = \alpha Q$

$$f_c L_{Oz_B}(f) = \frac{z_0}{2} \frac{f^2}{f_c^2} \int_0^1 \frac{R^2 \alpha \tilde{a}_Q}{\left(1 - \alpha \frac{f^2}{f_c^2} Q\right)^{1/2}} \quad [31]$$

con integrando ovunque finito.

Il valore di $\frac{f_c L_{Oz_B}(f)}{z_0}$ è stato calcolato per valori di $\alpha = 0.2, 0.5, 0.8$ e per le tre frequenze critiche $f_c = 3, 6, 10$ Mc/sec.

Le curve ascendenti di fig. 9 mostrano $\frac{f_c L_{Oz_B}(f)}{z_0}$ in funzione di f

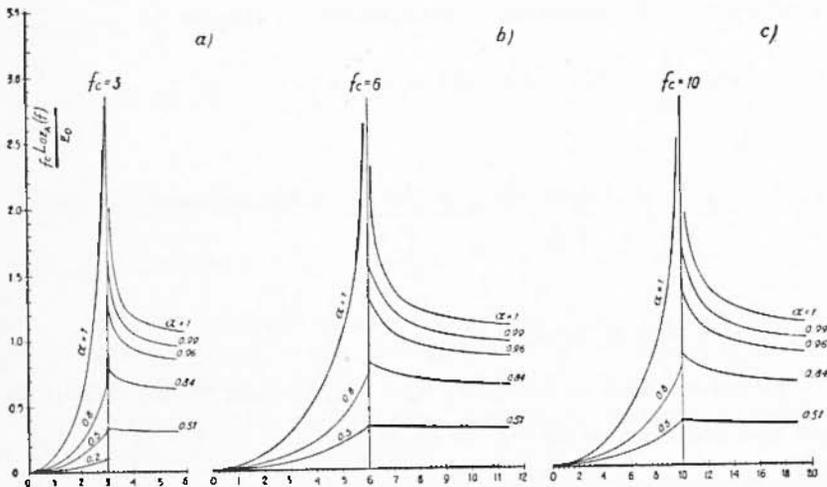


Fig. 9

per i diversi valori di α . Il valore z_B corrispondente ad α si deduce subito dalla [8]; la tabella II, a doppia entrata, mostra i valori di $\frac{z_B}{z_0}$ per vari valori di α e $\frac{f}{f_c}$.

TABELLA II

$f/f_c \backslash \alpha$	0.2	0.5	0.8	1
0.3	0.0135	0.022	0.036	0.045
0.5	0.025	0.064	0.105	0.133
0.7	0.050	0.130	0.219	0.285
0.9	0.084	0.228	0.406	0.561
0.95	0.094	0.258	0.472	0.688
1	0.105	0.293	0.553	1

Si noti che la colonna per $\alpha=1$ dà (in unità z_0) le altezze reali di riflessione delle frequenze f corrispondenti a ciascun $\frac{f}{f_c}$.

2° caso: $\frac{f}{f_c} > 1$. — La [10] si scrive

$$f_c L_{Oz_B}(f) = \frac{z_0}{2} \frac{f^2}{f_c^2} \int_0^{x=\alpha \frac{f_c^2}{f^2}} \frac{|v'| dx}{\left(1 - x \frac{f^2}{f_c^2}\right)^{1/2}} = \frac{z_0 \alpha}{2} \int_0^1 \frac{|v'| d\varrho}{(1 - \alpha \varrho)^{1/2}} \quad [32]$$

con $\alpha < 1$ e avendo posto $x = \alpha \frac{f_c^2}{f^2} \varrho$.

In questo caso il valore z_B che corrisponde ad un fissato valore di α non dipende da f/f_c : si ha infatti $z_B = z_0 [1 - (1 - \alpha)^{1/2}]$.

Le curve discendenti di fig. 9 mostrano l'andamento di $\frac{f_c L_{Oz_B}(f)}{z_0}$.

6. *Esempi di applicazione del calcolo alla deduzione delle altezze virtuali.* — a) Sia presente un solo strato (per es. strato E). Dallo ionogramma si deduce subito la frequenza critica f_c dello strato. L'altezza virtuale $h'(f)$, cioè nei nostri termini il cammino ottico totale corrispondente alla distanza tra il suolo e la quota di riflessione della frequenza f , si potrà scrivere

$$h'(f) = h_{01} + z_0 \frac{f_c L_{0z}(f)}{z_0} \quad 0 \leq f \leq f_c \quad [33]$$

essendo h_{01} la quota dove inizia (rispetto al suolo) la distribuzione di densità dello strato. Graficando $h'(f)$ sperimentale rispetto a $\frac{f_c L_{0z}(f)}{z_0}$ si ottiene una retta di coefficiente angolare z_0 , intersecante l'asse delle h nel punto h_{01} .

b) Siano presenti due (o più) strati totalmente separati l'uno dall'altro.

Siano f_c, f_i le frequenze critiche dei due strati lette direttamente sullo ionogramma e siano h_{02}, h_{01} le quote dove iniziano rispettivamente le distribuzioni di densità relative allo strato superiore e allo strato inferiore. Allora, per quote superiori a h_{02} , sarà

$$h'(f) = h_{02} + 2z_0 \left(\frac{f_c L_{0z_0}(f)}{z_0} - 1 \right) + z_0 \frac{f_i L_{0z_0}(f)}{z_0} \quad [34]$$

o, anche

$$h'(f) - 2z_0 \left(\frac{f_c L_{0z_0}(f)}{z_0} - 1 \right) = h_{02} + z_0 \frac{f_i L_{0z_0}(f)}{z_0}, \quad f_c \leq f \leq f_i \quad [35]$$

Il primo membro della [35] si può ritenere noto dalla [33] e quindi, graficandone i valori rispetto a $\frac{f_i L_{0z_0}(f)}{z_0}$ si deducono sia h_{02}

che z_0 , in modo analogo al caso precedente. Sullo ionogramma si può distinguere il caso sopra considerato semplicemente constatando se è o no verificata la relazione di linearità [35].

L'eventuale presenza di altri strati sovrastanti e separati si tratterebbe in modo del tutto equivalente.

Una non linearità delle curve ottenute potrebbe indicare, in ogni caso, la non validità della ipotesi [5] oppure l'esistenza di strati ioniz-

zati intermedi non altrimenti rivelabili o, infine, una parziale sovrapposizione delle densità elettroniche degli strati del tipo di fig. 8.

c) Siano presenti due strati sovrapposti. — Conviene esaminare separatamente i casi in cui sia $a < 0$ e $a > 0$.

1. $a < 0$. Questo è il caso più interessante che si verifica con una certa frequenza in quanto il semispessore dello strato soprastante è spesso maggiore della distanza tra i due massimi di densità che di solito è di poche decine di km; sullo ionogramma questo caso è rivelato da una discontinuità della tangente alla curva $h'(f)$ per una frequenza f_A . La fig. 10 indica per es. l'altezza virtuale $h'(f)$ per gli strati rappresentati in fig. 8 e per $h_m = 200$ km. Nelle nostre nota-

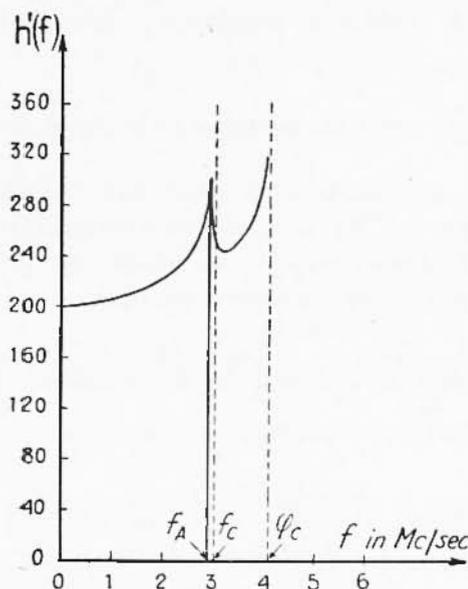


Fig. 10

zioni la quota a cui si manifesta la discontinuità è quella $z_A = z_0 + a$ che corrisponde all'inizio della distribuzione elettronica dello strato più alto. Graficando $h'(f)$ relativa alla prima porzione di curva, per tentativi rispetto ai valori di $\frac{f_c L_0 z_r(f)}{z_0}$ corrispondenti a

varie frequenze critiche f_c si otterrà un andamento rettilineo quando la f_c considerata è proprio quella corrispondente allo strato inferiore; si dedurranno allora immediatamente i valori h_{01} e z_0 . D'altra parte la quota z_A del punto A è

$$z_A = z_0 \left[1 - \left(1 - \frac{f_A^2}{f_c^2} \right)^{1/2} \right] \quad [36]$$

e ad essa, per frequenze $f > f_A$ corrisponderà un valore di $a = \frac{f_A^2}{f^2}$ finché $f < f_c$ e $a = \frac{f_A^2}{f_c^2}$ per $f > f_c$, cosicché, usando le curve di fig. 9 è facile dedurre il cammino ottico $L_{0z_A}(f)$ che corrisponde, per ogni frequenza, all'intervallo di quote tra 0 e z_A .

L'altezza virtuale nel caso $f > f_A$ si scrive

$$h'(f) = h_{01} + f_c L_{OZ_A}(f) + \xi_0 \frac{q_c L_{O\xi_A}(f)}{\xi_0} = h_{01} + f_c L_{OZ_A}(f) + \xi_0 \left[\frac{q_c L_{O\xi}(f) - q_c L_{O\xi_A}(f)}{\xi_0} \right]; \quad [37]$$

q_c è letta senz'altro sullo ionogramma.

Ancora per la [8] potremo scrivere l'incognito valore di ξ_A

$$\xi_A = \xi_0 \left[1 - \left(1 - \frac{f_A^2}{f_c^2} \right)^{1/2} \right] \quad [38]$$

che, per frequenze $f > f_A$, corrisponde anch'esso a valori di $\alpha = \frac{f_A^2}{f^2}$.

Osserviamo che $\frac{q_c L_{O\xi}(f)}{\xi_0}$ si deduce dalla fig. 7 e $\frac{q_c L_{O\xi_A}(f)}{\xi_0}$ dalla fig. 9, cosicchè, per ogni frequenza f , è possibile graficare $h'(f) - h_{01} - L_{OZ_A}(f)$ in funzione di $\frac{q_c L_{O\xi}(f) - q_c L_{O\xi_A}(f)}{\xi_0}$; si otterrà una semiretta uscente dall'origine con coefficiente angolare ξ_0 .

A questo punto saranno noti f_c , z_0 , q_c , ξ_0 ; inoltre come risulta dalla fig. 8 si avrà anche

$$a = z_A - z_0 = -z_0 \left(1 - \frac{f_A^2}{f_c^2} \right)^{1/2} \quad [39]$$

e

$$l_m - \xi_0 - \xi_A = \xi_0 \left(1 - \frac{f_A^2}{f_c^2} \right)^{1/2} \quad [40]$$

che, tenuto conto della [39] si può anche scrivere

$$l_m = \xi_0 \left[1 - \frac{f_c^2}{q_c^2} \left(1 - \frac{a^2}{z_0^2} \right) \right]^{1/2}; \quad [41]$$

pertanto, risolvendo rispetto a ξ_0 e f_c , il sistema formato dalle [26] e [29] si ricavano le seguenti espressioni

$$f_c^2 = \frac{S^2}{z_0^2} \frac{\xi_0^2}{z_0^2 q_c^2 - \xi_0^2 f_c^2} \quad [42]$$

$$\xi_0 = S \frac{\xi_0^2}{z_0^2 q_c^2 - \xi_0^2 f_c^2} = \frac{z_0^2}{S} f_c^2 \quad [43]$$

con

$$S = z_0^2 q_c^2 \frac{l_m}{\xi_0^2} + a f_c^2 \quad [44]$$

Inoltre è

$$h_{00} = h_{01} + z_0 + a \quad [45]$$

II. $a > 0$. Questo caso è notevolmente più difficile ad esaminare ma, in compenso, si può ritenere piuttosto raro. I sottocasi possibili sono sostanzialmente quelli mostrati in fig. 11.

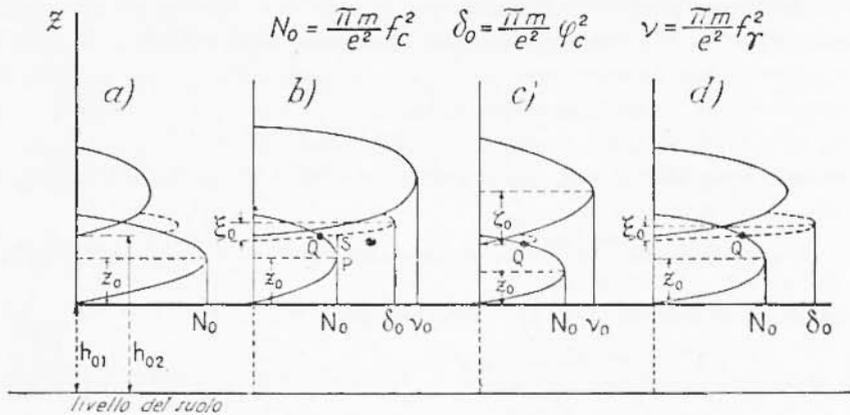


Fig. 11

Il caso *a*, più semplice, permette solo la deduzione delle caratteristiche dello strato inferiore che schermava completamente, ove ci sia, lo strato superiore. Nel caso *b* sono noti sperimentalmente f_c , q_c , f ; usando la [33] otteniamo z_0 e h_{01} ; ora però, per frequenze f comprese tra f_c e q_c , l'altezza virtuale è influenzata in modo non prevedibile dalla ritardazione tra le quote $z_p \rightarrow z_Q$ e $z_Q \rightarrow z_S$; essa, comunque, si scrive nella forma

$$h'(f) = h_{01} + f_c L_{oz_0}(f) + f_c L_{z_0 z_Q}(f) + q_c L_{z_Q z_S}(f) \quad [46]$$

da cui, con semplici trasformazioni, si deduce che

$$h'(f) - h_{01} - 2 f_c L_{oz_0}(f) = - f_c L_{oz_Q}(f) - q_c L_{oz_Q}(f) + \xi_0 \frac{q_c L_{oz_Q}(f)}{\xi_0} \quad [47]$$

Il grafico del primo membro della [47] rispetto a $\frac{q_c L_{oz_Q}(f)}{\xi_0}$ man mano che f si approssima a q_c , tende asintoticamente a una retta limite di coefficiente angolare ξ_0 e intersecante l'asse delle ordinate nel punto

$$h^* = - f_c L_{oz_Q}(q_c) - q_c L_{oz_Q}(q_c) \quad [48]$$

Una volta noto ξ_0 , facendo uso delle formule [29] e [27], si ottengono le seguenti espressioni per ζ_0 e a :

$$\zeta_0 = \frac{\tilde{\zeta}_0 z_0 f_0}{(z_0^2 q_c^2 - \tilde{\zeta}_0^2 f_c^2)^{1/2}} \quad [49]$$

$$a = -\zeta_0 + \left[\tilde{\zeta}_0^2 \left(1 - \frac{q_c^2 - f_c^2}{f_0^2} \right) + z_0^2 \left(1 - \frac{q_c^2 - f_0^2}{f_c^2} \right) \right]^{1/2} = \quad [50]$$

$$= \zeta_0 \left[-1 + \frac{\tilde{z}_0 q_c}{J_c f_0 \tilde{\zeta}_0} (f_0^2 - q_c^2 + f_c^2)^{1/2} \right] ;$$

mediante la [45] si ottiene poi h_{02} .

I casi *c* e *d*, assai più complicati, si verificano quando sullo ionogramma risultano due sole frequenze critiche di cui la prima è certamente quella dello strato sottostante mentre l'altra Φ può essere, a priori, sia la q_c sia la f_c .

Essi sono caratterizzati dall'essere rispettivamente $q_c < f_c$ e $q_c > f_c$, ma non può stabilirsi immediatamente quale delle due alternative sia verificata.

Sono noti direttamente f_c e Φ ; con il metodo sopra indicato per il caso *b* e nell'ipotesi di trovarsi nel caso *d* si possono dedurre anche h_{01} , z_0 e ξ_0 . Notiamo inoltre che ambedue i termini al secondo membro della [48] sono integrali del tipo [32] corrispondenti rispettivamente a due valori di a , tra loro proporzionali $a_1 = \frac{f_0^2}{f_c^2}$ e $a_2 = \frac{f_0^2}{q_c^2}$.

È allora semplice, per tentativi, determinare l'appropriato valore di a_1 che soddisfa la [48] stessa, da cui si deduce infine $f_0 = a_1^{1/2} f_c$. Noto così f_0 si ottengono le quote corrispondenti al punto Q , nel quale i grafici delle due distribuzioni paraboliche di densità elettronica si intersecano

$$z_Q = z_0 \left[1 + \left(1 - \frac{f_0^2}{f_c^2} \right)^{1/2} \right] \quad [51]$$

$$\tilde{z}_Q = \tilde{z}_0 \left[1 - \left(1 - \frac{f_0^2}{q_c^2} \right)^{1/2} \right] \quad [52]$$

Dovrà essere allora

$$h'(f) = h_{01} + f_c J_{oz_0}(f) + f_c J_{z_0 z_Q}(f) + \Phi J_{\tilde{z}_Q}(f) \quad [53]$$

e, se la [53] si riduce ad una identità per $f_c < f < \Phi$, allora effettiva-

mente la distribuzione di densità osservata al disopra dello strato più basso sarà $\delta(f)$ cosicché

$$\Phi = \varphi_c \quad , \quad a = z_Q - z_0 = z_0 \left(1 - \frac{f_0^2}{f_c^2} \right)^{1/2} ;$$

altrimenti ci si troverà nel caso c. Quest'ultima eventualità introduce l'ulteriore indeterminazione del punto Q ; il valore di z_0 può determinarsi in modo analogo ai casi precedenti esaminando il comportamento della curva $h' = h' \left(\frac{f}{f_0} \right)$ ma rimane indeterminato il valore di a e quindi di h_{02} .

Roma — Istituto Nazionale di Geofisica — Ottobre 1952.

RIASSUNTO

Si calcola l'indice di rifrazione di gruppo per la propagazione verticale di un'onda elettromagnetica nella ionosfera per la latitudine di Roma, usando la formula esatta data per primo da Appleton e considerando l'influenza del campo magnetico terrestre ma trascurando l'assorbimento.

Quindi si calcola per tre valori della altezza del massimo di densità elettronica e per vari valori della frequenza critica, il « cammino ottico » corrispondente a un'onda di frequenza f , riflessa o attraversante uno strato. In modo analogo si determina il cammino ottico corrispondente a una parte di strato attraversato.

Si sviluppa infine un metodo generale di confronto delle curve della altezza virtuale $h'(f)$ colla teoria, per determinare in modo generale i parametri geometrici della distribuzione di densità elettronica; rigraficando le curve $h'(f)$ si ottengono direttamente lo spessore z_0 di ciascuno strato e la sua altezza rispetto al suolo, sia per il caso di strati totalmente separati che parzialmente sovrapposti.

Il metodo di analisi si sta ora applicando allo studio delle caratteristiche locali della ionosfera, in vista di un più approfondito confronto con fenomeni geomagnetici e solari.

SUMMARY

In this paper we calculate the group refractive index, relative the vertical propagation of an electromagnetic wave in the ionosphere for the latitude of Rome, using the exact formula first given by Appleton,

considering the influence of the magnetic field but neglecting the absorption determined by the electron impacts.

Afterwards we calculate on this basis, for three values of maximum electronic density height and for various values of the critical frequency, the « optical path » corresponding to a wave of given frequency f , which penetrates a « parabolic » layer and either crosses it or is reflected by it. With analogous calculation we determine the optical path corresponding to a portion of crossed layer.

Afterwards we develop a method for comparing the experimental curve of the virtual height $h'(f)$ with the theory in order to determine, in a general manner, the geometrical parameters of the electronic distribution in ionospheric layers; we redraw the experimental $h'(f)$ curves obtaining directly the thickness z_0 of every layer and its height above ground level, considering both the cases of totally separated and of partially superposed layers.

We are using this method of analysis in order to study the characteristics of the ionosphere here in Rome, for a successive comparison with geomagnetic and solar data.

BIBLIOGRAFIA

- (1) APPLETON E. V., J. Inst. Elect. Engts, 1932, 71, 642.
- (2) APPLETON E. V., Proc. Roy. Soc., 1937, 162, 451.
- (3) BOOKER H. G. - SEATON H. L., Phys. Rev., 1940, 57, 87.
- (4) PIERCE J. A., Phys. Rev., 1947, 71, 698.
- (5) BAYPAY R. R. - MATHUR K. B., Indian J. Phys., 1937, 11, 165.
- (6) MILLINGTON G., Proc. Phys. Soc., 1938, 50, 1.
- (7) MILLINGTON G., Proc. Phys. Soc., 1938, 50, 561.
- (8) DE VOOCT A. H., Tijds. Nederland. Radiogenootschap. 1948 (nov.), 183.
- (9) PÖEVEERLEIN H., Z. Angew. Phys., 1951, 3, 135.
- (10) WHALE H. A. - STANLEY J. P., I. Atmosph. Terr. Phys., 1950, 1, 82.
- (11) SHINN D. H. - WHALE H. A., J. Atmosph. Terr. Phys., 1952, 2, 85.
- (12) APPLETON E. V. - BEYNON W. J. G., Proc. Phys. Soc., 1940, 52, 518.
- (13) APPLETON E. V. - BEYNON W. J. G., Proc. Phys. Soc., 1947, 59, 58.
- (14) RATCLIFFE J. A., Wireless Eng., 1933, 10, 354.