

# SULLE PROPRIETÀ ELASTICHE DEL MANTELLO INTERNO DELLA TERRA

P. E. VALLE

*Introduzione.* — L'ipotesi che lo strato  $D$  del mantello della Terra sia sostanzialmente uniforme e che nello strato la distribuzione della temperatura si avvicini alla distribuzione adiabatica, è stata recentemente avvalorata dalle ricerche di F. Birch <sup>(1)</sup>.

Queste ricerche hanno inoltre posto in evidenza che i materiali che costituiscono lo strato  $D$ , presentano, a pressione zero, un'elasticità tanto elevata da non poter essere identificati con nessuno dei comuni silicati. In particolare viene esclusa la possibilità che tali materiali possano essere identificati con l'olivina.

L'elasticità dello strato  $D$  è peraltro confrontabile con la elasticità di alcuni ossidi come  $MgO$ ,  $Al_2O_3$ ,  $TiO_2$ , la cui densità è inoltre assai prossima alla densità dello strato a pressione zero, ottenuta per estrapolazione dal modello  $A$  di K. E. Bullen.

Questo fatto ha indotto F. Birch a ritenere che lo strato  $D$  sia costituito da ossidi di magnesio, silicio e ferro, in fasi di alta pressione, aventi una struttura analoga a quella degli ossidi sopraccitati.

Nello strato  $C$  si avrebbero gradualmente cambiamenti di fase o di materiale, oppure, contemporaneamente, di fase e materiale.

Le ricerche di Birch si basano sulla teoria delle deformazioni finite, sui dati di laboratorio di P. W. Bridgman e sui valori delle onde sismiche di H. Jeffreys <sup>(4)</sup>. Si ammette poi, in accordo con tutte le moderne distribuzioni della densità nell'interno della Terra, che il campo gravitazionale abbia, nello strato  $D$ , un valore praticamente costante.

La valutazione dell'elasticità dello strato  $D$  a pressione zero, viene effettuata da F. Birch mediante il calcolo, a tale pressione, del rapporto

$$\Phi = \frac{K_s}{\rho} = v_l^2 - \frac{4}{3} v_t^2 \quad [1]$$

in cui  $K_s$  è l'incompressibilità adiabatica,  $\rho$  la densità,  $v_l$  e  $v_t$  le velocità delle onde sismiche longitudinali e trasversali, rispettivamente.

TABELLA I

$h$ km	$v_l$ km/sec	$v_t$ km/sec	$\rho$ g/cm <sup>3</sup>
1000	11,42	6,36	4,68
1200	11,71	6,50	4,80
1400	11,99	6,62	4,91
1600	12,26	6,73	5,03
1800	12,53	6,83	5,13
2000	12,79	6,93	5,24
2200	13,03	7,02	5,34
2400	13,27	7,12	5,44
2600	13,50	7,21	5,54
2800	13,64	7,30	5,63

Allo scopo di ottenere maggiori informazioni sulle proprietà elastiche dello strato  $D$ , in questa nota, mediante la teoria classica dei solidi, si calcola separatamente il valore delle velocità delle onde sismiche longitudinali e trasversali, a pressione zero e alla temperatura della sommità dello strato. Vengono altresì calcolati i valori di alcuni parametri per il confronto con i risultati di F. Birch.

La distribuzione della densità corrispondente al modello  $A$  di K. E. Bullen (<sup>23</sup>) e le velocità delle onde sismiche di H. Jeffreys (<sup>4</sup>) costituiscono i dati di partenza. Questi dati sono contenuti nella tabella I.

*Valore del parametro di Grüneisen alla sommità dello strato  $D$ .*

— Lo strato  $D$  si trova molto probabilmente ad una temperatura superiore alla temperatura di Debye, il cui valore medio nello strato può essere valutato circa 1000 °C. Ora ad una temperatura vicina ai 1000 °C il calore specifico degli ossidi accennati nel precedente paragrafo e dei silicati è molto prossimo al valore classico dei cristalli ionici (<sup>1</sup>). Pertanto le velocità isoterme delle onde elastiche longitudinali e trasversali, sono date rispettivamente dalle espressioni (<sup>5</sup>)

$$v_l = v_{l1} \left( \frac{\rho_1}{\rho} \right)^{1/3} e^{\gamma_{11} \left( 1 - \frac{\rho_1}{\rho} \right)} \quad [2]$$

$$v_t = v_{t1} \left( \frac{\rho_1}{\rho} \right)^{1/3} e^{\gamma_{11} \left( 1 - \frac{\rho_1}{\rho} \right)} \quad [3]$$

nelle quali l'indice 1 contrassegna il valore delle grandezze alla som-

mità dello strato. Tale sommità verrà assunta, convenzionalmente, alla profondità di 1000 km.

La velocità isoterma delle onde trasversali coincide con la velocità adiabatica, mentre per le onde longitudinali risulta

$$(v)_s \simeq (v)_T \left( 1 + \frac{5}{18} \alpha \gamma T \right) \quad [4]$$

In questa relazione  $\alpha$  è la dilatazione termica,  $\gamma$  il parametro di Grüneisen e  $T$  la temperatura assoluta. Dato che  $\alpha$  è dell'ordine di  $10^{-5}$  e  $\gamma$  è compreso fra 1 e 2, tenuto conto che la temperatura media nello strato  $D$  è quasi sicuramente inferiore ai 5000 °K, in prima approssimazione si potrà ritenere

$$(v)_s \simeq (v)_T$$

La [2] e la [3] possono essere scritte nella forma

$$\log \frac{v_1}{v_{1t}} + \frac{1}{3} \log \frac{\rho}{\rho_1} = \gamma_{1t} \left( 1 - \frac{\rho_1}{\rho} \right) \quad [2']$$

$$\log \frac{v_t}{v_{1t}} + \frac{1}{5} \log \frac{\rho}{\rho_1} = \gamma_{1s} \left( 1 - \frac{\rho_1}{\rho} \right) \quad [3']$$

Sostituendo in queste relazioni i valori di  $v_1$ ,  $v_t$  e  $\rho$  contenuti nella tabella I, si ottengono due sistemi di equazioni nelle incognite  $\gamma_{1t}$ ,  $\gamma_{1s}$ , rispettivamente.

La soluzione dei due sistemi, effettuata col metodo dei minimi quadrati, ha fornito

$$\gamma_{1t} = 1,421 \pm 0,006 \quad [5]$$

$$\gamma_{1s} = 1,169 \pm 0,094$$

Ricordando che il parametro di Grüneisen è dato da <sup>(5)</sup>

$$\gamma = \frac{\gamma_1 + 2 \gamma_t}{3} \quad [6]$$

risulta

$$\gamma_1 = 1,253 \quad [7]$$

*Valore della densità dello strato D a pressione zero e alla temperatura della sommità dello strato.* — Questo valore può essere facil-

mente ottenuto dall'equazione di stato (5)

$$p - p_1 = K_{1T} e^{2\Gamma} (2\Gamma)^{1/3} \left[ F\left(\frac{\rho}{2\Gamma\varrho_1}\right) - F\left(\frac{1}{2\Gamma}\right) \right] + \frac{3R\gamma_1\varrho_1}{\Lambda} (\Gamma - T_1) \quad [8]$$

nella quale

$$\Gamma = \gamma_{11} + \frac{a_{11}^2}{1 - a_{11}^2} (\gamma_{11} - \gamma_{11}) \quad [9]$$

con

$$a_{11}^2 = \frac{4}{3} \frac{v_{11}^2}{v_{11}^2}$$

In base ai risultati del paragrafo precedente si ha

$$\Gamma = 1,600 \quad [10]$$

Posto quindi nella [8]  $p = 0$ ,  $p_1 = 0,392$  megabars, come risulta dal modello *A* di K. E. Bullen (23),  $K_{1T} \simeq K_{1S} = 3,579$  megabars,  $T = T_1$ ,  $\rho = \rho_0$ , risolvendo si ottiene

$$\rho_0 = 4,07 \text{ g/cm}^3 \quad [11]$$

*Valori delle velocità delle onde elastiche nello strato D a pressione zero e alla temperatura della sommità dello strato.* — Introducendo nella [2] e nella [3] i valori di  $\gamma_{11}$ ,  $\gamma_{11}$ ,  $v_{11}$ ,  $v_{11}$ ,  $\varrho_1$  e  $\rho_0$ , si ottengono le velocità delle onde elastiche, nei materiali che costituiscono lo strato *D*, a pressione zero e alla temperatura della sommità dello strato. Indicando con  $v_{01}$  e  $v_{0t}$  queste velocità, risulta

$$v_{01} = 9,67 \text{ km/sec} \quad [12]$$

$$v_{0t} = 5,59 \text{ km/sec}$$

Il coefficiente di Poisson  $\sigma$  e il rapporto  $\Phi$  sono dati quindi da

$$\sigma_0 = 0,25 \quad [13]$$

$$\Phi_0 = 51,8 \text{ (km/sec)}^2 \quad [14]$$

Ricordando poi che  $\gamma\rho = \text{costante}$ , si ha

$$\gamma_0 = 1,44 \quad [15]$$

Nella fig. 1 viene mostrato l'andamento delle velocità delle onde longitudinali e trasversali nello strato *D*, in funzione della densità. Le curve sono state calcolate mediante la [2] e la [3], mentre i punti rappresentano i dati della tabella I.

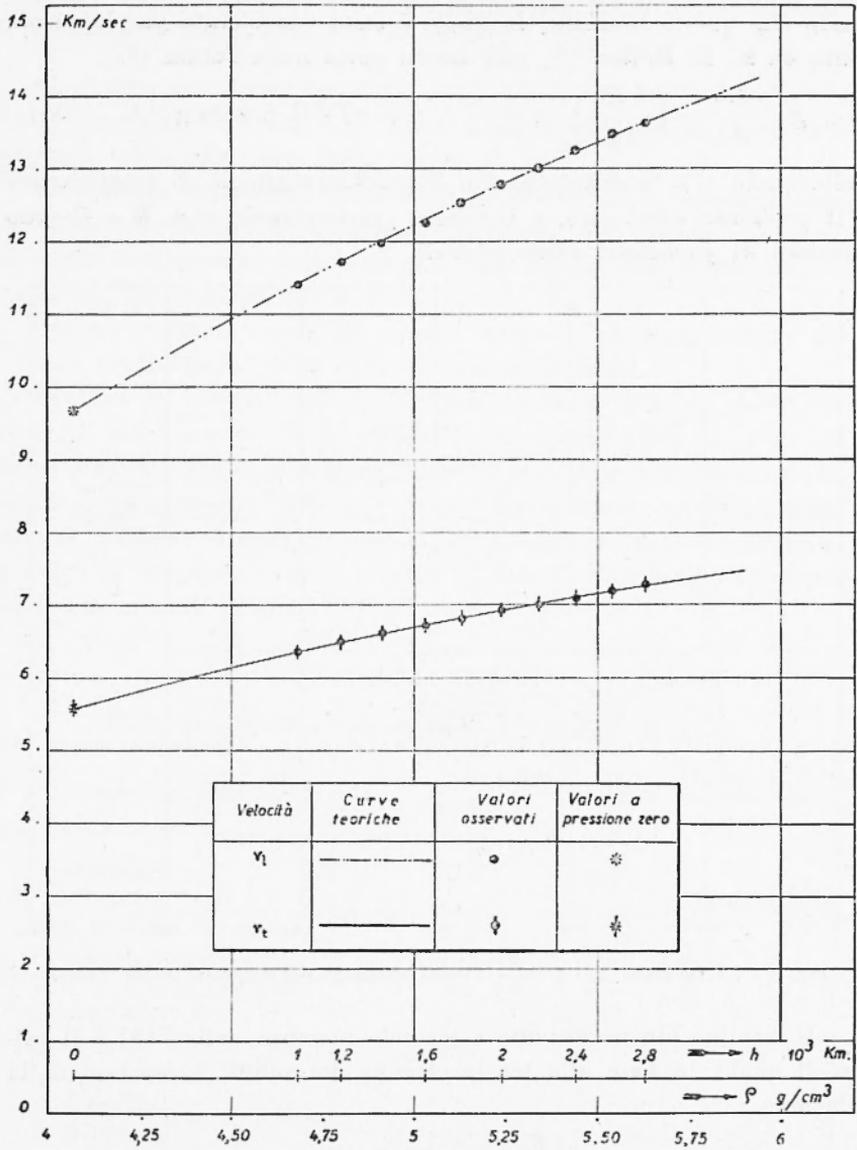


Fig. 1 - Velocità delle onde sismiche nello strato D del mantello della Terra in funzione della densità.

La funzione  $1 - g^{-1} d\Phi/dr$  nello strato D. — F. Birch ha mostrato che questa funzione, la quale è stata considerata per la prima volta da K. E. Bullen <sup>(6)</sup>, può essere posta nella forma <sup>(1)</sup>

$$1 - g^{-1} \frac{d\Phi}{dr} = \left( \frac{\partial K_T}{\partial p} \right)_T + \alpha \gamma T A + (\alpha \gamma T)^2 B + \alpha \Phi \tau g^{-1} C \quad [16]$$

nella quale  $\tau$  è la differenza tra il gradiente attuale di temperatura e il gradiente adiabatico,  $g$  il campo gravitazionale e  $A$ ,  $B$  e  $C$  sono funzioni di parametri adimensionali.

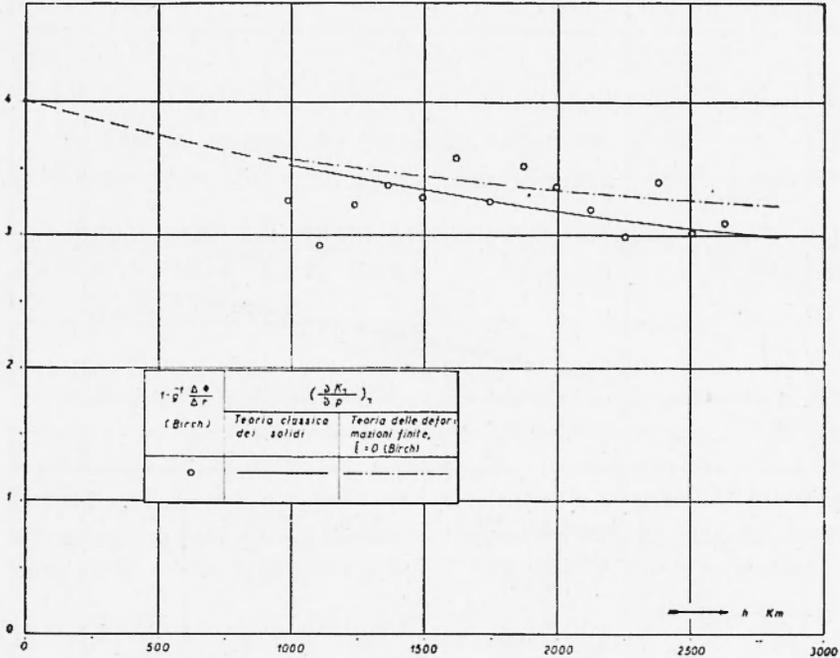


Fig. 2 - La funzione  $1 - g^{-1} \frac{\Delta\Phi}{\Delta r}$  nello strato D del mantello della Terra.

Il termine più importante a secondo membro della [16] è il primo, il quale, in base alla teoria classica dei solidi, è espresso dalla relazione <sup>(5)</sup>

$$\left( \frac{\partial K_T}{\partial p} \right)_T = \frac{1}{3} + 2 \Gamma \frac{\rho_t}{\rho} \quad [17]$$

Nella fig. 2 è riportato l'andamento di  $(\partial K_T/\partial p)_T$ , in funzione della profondità, calcolato con i dati della tabella I mediante la [17], nella quale si è posto  $2 \Gamma = 3,2$ . La figura contiene inoltre l'analogo andamento ottenuto da F. Birch dalla teoria delle deformazioni finite

e i valori di  $1 - g \cdot \Delta \rho / \Delta r$  calcolati dallo stesso Birch con le velocità di H. Jeffreys, assumendo  $g = 10^8 \text{ cm/sec}^2$ .

*Confronto con i risultati di F. Birch.* — Il confronto tra i valori di vari parametri calcolati da F. Birch e quelli ottenuti nei precedenti paragrafi, viene effettuato nella tabella II.

La velocità delle onde longitudinali e trasversali a pressione zero contenute nella tabella II, sebbene si riferiscano alla densità corrispondente alla temperatura della sommità dello strato, non si riscontrano in nessuno dei comuni silicati (7-8).

Questo risultato convalida quello ottenuto precedentemente da F. Birch mediante la teoria delle deformazioni finite.

Peraltro il valore regolare del coefficiente di Poisson trovato a pressione zero, mostra che i materiali che costituiscono lo strato *D* non presentano, a tale pressione, alcuna proprietà elastica eccezionale. Rimane però aperta la questione della composizione e struttura dello strato *D*, sebbene il suggerimento di F. Birch che esso sia costituito da ossidi di magnesio, silicio e ferro in fasi di alta pressione, costituisca una base di ricerca.

TABELLA II

*Parametri relativi allo strato D a pressione zero \**

Parametro e unità	Teoria dei solidi e Modello A	Teoria delle deformazioni finite (Birch)
$\Phi_0$ (km/sec) <sup>2</sup>	51,8	51
$\rho_0$ (g/cm <sup>3</sup> )	4,07	4 (Modello A)
Bulk modulus (megabars)	2,11	2,04
$\gamma_0$ (adimensionale)	1,44	1,47
$(\partial K_T / \partial \rho_T)$ (adimensionale)	4,01	4,00
$v_{0l}$ (km/sec)	9,67	—
$v_{0t}$ (km/sec)	5,59	—
$\sigma_0$ (adimensionale)	0,25	—
$\mu_0$ (megabars)	1,27	—
$E_0$ (megabars)	3,17	—

Roma — Istituto Nazionale di Geofisica — Settembre 1953.

(\*) I valori ottenuti mediante la teoria dei solidi si riferiscono alla temperatura della sommità dello strato, mentre i valori ottenuti da Birch mediante la teoria delle deformazioni finite si riferiscono alla temperatura media dello strato.

## RIASSUNTO

Mediante la teoria classica dei solidi vengono calcolate le velocità delle onde elastiche, nello strato D dell'interno della Terra, a pressione zero e alla temperatura della sommità dello strato.

Si è ottenuta una velocità pari a 9,67 km/sec per le onde longitudinali e pari a 5,59 km/sec per le onde trasversali.

Nessuno dei comuni silicati presenta velocità così elevate.

Questo risultato è in eccellente accordo con le ricerche effettuate da F. Birch.

## SUMMARY

The velocities of elastic waves in the D layer of the Earth at zero pressure and at the temperature of the top of the layer are calculated by means of the classical theory of solids.

These velocities are found to be 9,67 km/sec for longitudinal waves and 5,59 km/sec for shear waves.

None of the experimental values of wave velocities in common silicates satisfies the requirements for layer D.

This results are in excellent agreement with the results obtained by F. Birch.

## BIBLIOGRAFIA

(1) BIRCH F., *Elasticity and constitution of Earth's interior*. J. Geophys. Res. 57, 227-286 (1952).

(2) BULLEN K. E., *The problem of the Earth's density variations*. Bull. Seism. Soc. Am. 32, 19-29 (1942).

(3) BULLEN K. E., *Introduction to the theory of seismology*. Cambridge, University Press (1947).

(4) JEFFREYS H., *The time of P, S and SKS and the velocities of P and S*. Geophys. Suppl. 4, 498-533 (1939).

(5) VALLE P. E., *Una equazione di stato per i solidi*. Annali di Geofisica, 6, 183-197 (1953).

(6) BULLEN K. E., *Compressibility - pressure hypothesis and the Earth's interior*. Geophys. Suppl. 5, 355-368 (1949).

(7) BIRCH F., *Handbook of physical constants*. Geol. Soc. Am. Special papers (1950).

(8) GUTENBERG B. (Editor), *Internal constitution of the Earth*. Dover Publications (1951).