

# Aspetti diversi applicativi dell'elettrogeosmosi transitoria.

A. BELLUIGI

## I<sup>a</sup> PARTE

Esaminato il processo stazionario dell'elettroconsolidamento d'un suolo saturo di acqua (<sup>1</sup>), (il che costringe, per legge di continuità a ritenere che l'acqua che appare al catodo scompaia esclusivamente dall'anodo), abbiamo mostrato in più modi come si possa ovviare a questo assunto limitativo, ritenendo variabile nel tempo il fenomeno elettrocinetico (<sup>2</sup>).

La pressione geoidrostatica  $H$  è notoriamente legata al vettore flusso d'acqua tellurica  $q$ , impregnante il suolo, e al vettore intensità di corrente continua (c. c.)  $\vec{I}$ , galvanicamente immessa nel terreno.

La perdita d'acqua  $Q$  (per unità di volume e di tempo), nulla nella stazionarietà, si può ritenere proporzionale alla caduta di pressione nell'unità di tempo nella transitorietà.

Si assumono valide pertanto la legge di Helmholtz-Darcy e quella del « Consolidamento meccanico ». Tenuto conto altresì che la  $\text{div } I = 0$ , tutte queste proprietà vettoriali cospiranti, comportano che la pressione geoidrostatica ( $H$ ) debba obbedire alla classica equazione differenziale del calore limitatamente qui al caso lineare (<sup>2</sup>), nelle condizioni specifiche del presente problema.

Valga infine il presupposto in questa I Parte che l'acqua impregnante il suolo, cataforata o che si espelle al catodo ad es. tubolare,  $Q_k$ , venga emunta in modo tale che la pressione idrostatica al catodo rimanga costante, uguale al suo valore iniziale  $H_0$ . Ritenendo possibile questa modalità operativa, dedotta  $H$ , o la grandezza  $P = H - H_0$ , è poi agevole ricavare  $Q$ ,  $Q_k$  grandezze legate rispettivamente a  $q$  e a  $P$  (<sup>2</sup>).

Si correlazionano così tre grandezze elettroidriche: il vettore flusso d'acqua  $\vec{q}$  per unità di sezione retta del terreno, la perdita idrica di portata per unità di volume  $Q$ , l'acqua che si raccoglie al catodo  $Q_k$ .

Si abbia inoltre:

$a$	= spaziatura polare unidimensionale (anodo $x = 0$ , catodo $x = a$ ),
$P$	= $H - H_0$ = pressione differenziale nel mezzo terroso ( $H = H_0$ per $t = 0$ ),
$\tau$	= tempo di consolidamento,
$\mu$	= $k_c \rho$ coefficiente quasivariante,
$\rho$	= elettroresistività del terreno saturo
$k_c$	= permeabilità elettrogeosmotica,
$k$	= permeabilità idraulica,
$I$	= intensità di corrente elettrica immessa al suolo,
$Q_k$	= « portata » per unità di area catodica $\text{cm}^3/\text{sec. cm}^2$ ,
$Q$	= perdita idrica di portata per unità di volume,
$t_f$	= tempo relativo al fessio di $Q_k(t)$ ,
$tp$	= tempo di pianerottolo di $Q_k(t)$ ,
$K$	= quantità d'acqua cataforata nell'intervallo $(0, t)$ ,
$\Gamma$	= quantità d'elettricità fluita nel terreno nel tempo $(0, t)$ ,
$M$	= $K(t)/\mu\Gamma$ (adimensionale) = resa catodica,
$W$	= quantità d'acqua tolta in $(0, t)$ per unità di volume di terreno,
$Q_1(t)$	= perdita d'acqua extranodica,
$Q_2(t)$	= perdita d'acqua interpolare,
$t'$	= tempo limite operativo,
$\theta$	= tempo elettroico,
$\lambda$	= costante di proporzionalità relativa al catodo,

$q_k^{(c)}(t)$  = portata catodica al tempo  $t$  (elettrosmotica),  
 $q_k^i(t)$  = portata idraulica al tempo  $t$ ,  
 $c$  = (può identificarsi talvolta con l'inverso del coefficiente di consolidamento standard meccanico, da unità  $10^{-1}$  a meno), costante.

Vedremo come le grandezze  $H, K, C$  formino la base delle teorie svolte relative all'effetto elettrogeosmotico.  $H$  è una grandezza, s'è detto, di dimensione d'una pressione (che però non si identifica con la pressione esterna). Essa sostanzialmente è lega-

nita sopra. È l'equazione suscritta insieme a quella di « diffusione »  $\Delta H = C \frac{\lambda H}{\delta \frac{H}{\delta}}$  [v. (2)], che provocano l'andamento del fenomeno nella nostra teoria.

La determinazione della  $c$  in base alla [a], è quindi di fondamentale importanza per tutta la teoria: naturalmente si può anche raggiungere sperimentalmente. In ogni caso si può notare che, se la determinazione di  $c$  (che in definitiva è una igroconduttività), deve avvenire in una fase stazionaria, grazie alla [a], è necessario la misura del gradiente d'umidità. Se invece si considera la fase di

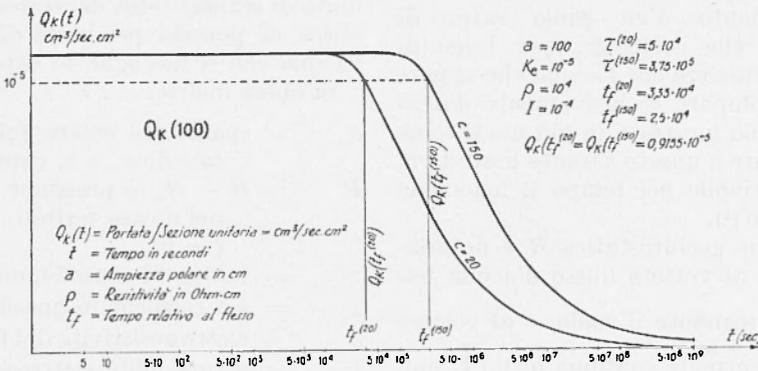


Fig. 1

ta alla quantità d'acqua  $W$  contenuta nel terreno per unità di volume, mediante una semplice relazione:

$$H - H_0 = (w - w_0) kc,$$

[v. (2)], che mostra il puro carattere formale di  $H$ . Questa pressione è stata introdotta per permettere di considerare l'effetto del flusso d'acqua come effetto Darcy, per cui:

$$\vec{a} = -k \text{ grad } H = -\frac{1}{c} \text{ grad } w \quad (a)$$

Quest'equazione fissa tra l'altro il significato esatto della costante  $c$ , che evidentemente può non coincidere con quella di consolidamento del Terzaghi, calcolata con pure considerazioni meccaniche. Infatti non c'è nessuna ragione o prove che mostrino che quest'ultima coincida con quella defi-

variabilità col tempo occorrerà determinare i « tempi caratteristici » come  $\tau$ ; e da essi ricavare  $c$ , ritenuta qui comunque costante.

L'equazione [a] mostra tra l'altro che la presenza di  $K$  nella teoria è puramente formale, ed è strettamente legata alla definizione di  $H$ . Questo fatto si riflette nella circostanza che nelle nostre formule in cui non compaiono pressioni, non compare neanche  $k$ . (3).

§ 2 - DISTRIBUZIONE TEMPORALE DELLA PORTATA IDRICA NELL'UNITÀ DI SEZIONE CATODICA.

Con i summenzionati presupposti teorici, abbiamo ricavato per la « portata catodica unitaria » la seguente fondamentale espressione:

$$Q_k = \mu I \text{ erf } \sqrt{\tau/t}$$

( $\tau = ca^2/4$ , tempo di consolidamento).

Si tratta d'una portata direttamente proporzionale alla densità di corrente elettrica (corrente per unità di sezione d'elettrodo), al coefficiente  $\mu$ , oltre che alla funzione dell'errore o di Gauss. Erfx è un fattore che

Nelle Figg. 1, 2, 3 abbiamo preso in considerazione 3 abituali spaziatore elettrodiche bipolari ( $a = 100, 200, 300$  cm), e per ciascuna di esse 2 coefficienti di consolidamento ( $c = 20, 150$  sec. cm<sup>-2</sup>).

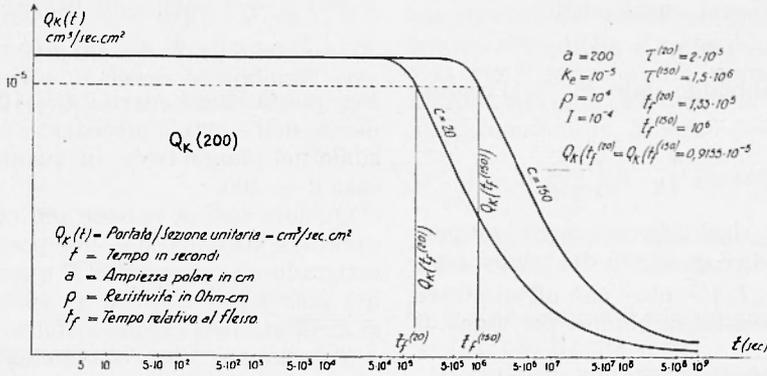


Fig. 2

vale uno per valori sufficientemente grandi dell'argomento  $x$ , e cioè  $1/\tau/t = 3$ , per  $t$  abbastanza piccoli:  $t_p \leq \tau/9$ . In questo tempo iniziale ( $t_p$ ) di erogazione di corrente, si ritrova la legge di Wiedemann della stazionaria-

Il tempo  $\tau$  varia allora da un minimo di  $10^1$  a  $10^6$  sec. In corrispondenza l'ambito temporale in cui si potrà ritenere  $\text{erf } 1/\tau/t \sim 1$  (periodo di stazionarietà), oscillerà tra  $10^3$  e  $10^5$  sec. ( $t \leq \tau/9$ ), cioè tra 3 e 28 ore.

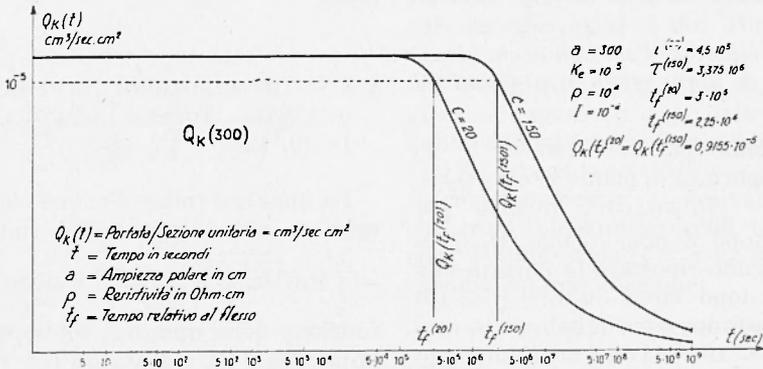


Fig. 3

arietà (delimitandone la validità):

$$Q_k \sim \mu I \quad (\text{per } t_p = \frac{\tau}{9} = c \frac{a^2}{36})$$

durata del pianerottolo.

Trascorso  $t_p$  la  $Q_k$  decresce lentamente fino a ridursi quasi a zero per tempi abbastanza grandi.

Fermo restando  $t$ , la portata  $Q_k(t)$  aumenta con  $\tau$ , salvo nel periodo stazionario, in cui  $Q_k(t)$  dipende esclusivamente da  $I$  e da  $\mu$ .

Le diagrafe  $Q_k$ , con ascisse dei tempi in scala logaritmica, presentano all'inizio, un andamento rettilineo orizzontale (corrispondente al pianerottolo di stazionarietà fino a

$p = \frac{\tau}{9}$  un lento decremento che si riduce asintotico all'asse dei tempi. Tutti i profili  $Q_k(t)$  denunciano un flesso, ubicato per  $t_f = \frac{2}{3} \tau$ .

Analogamente a  $t_p$  anche  $t_f$  rientra nella categoria dei « tempi caratteristici »:

$$t_p = \tau/9, t_f = 6 \tau/9 .$$

Per  $t \gg \tau$  abbiamo dato in (2), l'espressione:

$$(Q_k)_{t \gg \tau} = \frac{\sqrt{c}}{\pi} \mu I \frac{a}{\sqrt{t}},$$

e la « portata » risulta inversamente proporzionale alla radice quadrata del tempo, proporzionale a  $\mu, I, \sqrt{c}$  oltre che all'ampiezza polare ( $a$ ), o resistenza ohmica per unità di sezione.

Si potrà risalire ora a norme circa l'erogazione della corrente continua ad intermittenza.

#### Modalità operative d'erogazione di corrente.

Poichè, trascorso il periodo  $t_p$ ,  $Q_k(t)$  diminuisce col tempo, sarà consigliabile, quale vantaggiosa modalità operativa, innalzare (tra  $\tau/9$  e  $6\tau/9$ ) l'intensità della corrente iniziale (compatibilmente con le altre esigenze del processo); per riportare l'emungimento ai valori maggiori di pianerottolo, o prossimi ad esso.

Esemplifichiamo per  $a = 100$ ,  $c = 20$  (v. Fig. 1): la « portata di pianerottolo »  $Q_k(t)$  risulta di  $10^{-5}$  cm<sup>3</sup>/sec.cm<sup>2</sup>, mentre per  $t = 10^5$  sec., dopo il pianerottolo,  $Q_k(t) = 0,67 \cdot 10^{-5}$ . Volendo riportare la portata alla stazionarietà, dopo circa 30 ore ( $t = 10^5$  sec.) di processo, dovremo innalzare la corrente (densità  $\sim 10^{-1}$  A) da  $I$  ad  $I'$  in modo che si abbia:

$$Q'_k(t) = \mu I' \operatorname{erf} \sqrt{\tau/t} = 10^{-5}.$$

Poichè con la corrente iniziale  $I$  dopo  $t = 10^5$  sec., s'è detto che si ha:

$$Q_k(t) = \mu I \operatorname{erf} \sqrt{\tau/t} = 0,67 \cdot 10^{-5},$$

si dovrà usare una  $I'$  tale che:

$$\begin{aligned} I'/I &= Q'_k(t)/Q_k(t) = 1/0,67 = \\ &= 1,49. \text{ Quindi } I' = 1,49 I. \end{aligned}$$

Analogamente (v. Fig. 3, curva  $c = 20$ ),  $Q_k(t)$  nel pianerottolo è  $1 \cdot 10^{-5}$  cm<sup>3</sup>/sec.cm<sup>2</sup>, mentre per  $t = 10^5$  sec. scende a 0,08.

Per riportare allora la portata alla stazionarietà, occorrerà usare una  $I'$  tale che sia:

$$\begin{aligned} I'/I &= Q'_k(t)/Q_k(t) = 1/0,08 = 12,5 \cdot \\ &\cdot I' = 12,5 I \end{aligned}$$

Per questa stessa curva il  $t = 10^5$  sec. considerato nell'esempio precedente, è ancora sensibile nel pianerottolo, in quanto in questo caso  $a = 300$ .

Qualora non si potesse più conseguire la « portata stazionaria », ma portate minori, malgrado gli aumenti di  $I$ , quest'impossibilità potrebbe costituire un indice del grado di disidratazione raggiunto dal terreno.

Tale prassi, oltre che consentire notevoli vantaggi di riduzione del tempo di trattamento, potrà dare il modo di constatare l'entità della disidratazione avvenuta nel terreno, senza dover ricorrere ad interventi d'altra natura.

Il « tempo di pianerottolo »  $t_p$  può fornire infine un ottimo criterio per regolare i « tempi d'intermittenza o di pulsazione periodica o no » della corrente, da erogare a scatti salienti, e abbreviare intanto l'elettroprocesso.

#### § 3 - DISTRIBUZIONE TEMPORALE DELLA QUANTITÀ TOTALE D'ACQUA ESTRATTA IN (0, t).

La quantità totale d'acqua elettricamente estratta nel tempo  $t$  dal suolo  $K(t) = \int_0^t Q_k(t) dt$ , per unità di sezione catodica, in funzione della quantità totale di elettricità impiegata  $\Gamma(t)$ , è stata da noi valutata con andamento temporale del tutto analogo a quello di  $Q_k$ .

Per piccoli tempi  $t$  rispetto a  $\tau$  ritroviamo la legge di Wiedemann:

$$K = \mu I' \text{ (valore noto nella teoria stazionaria), per } t \ll \tau.$$

La quantità totale d'acqua estratta  $K$  è proporzionale alla quantità totale d'elettricità impiegata  $\Gamma$  (indipendentemente, si noti, dal coefficiente di consolidamento).

Per  $t > \tau$ , il rapporto  $K/\Gamma$  è crescente se ( $t < \pi\tau$ ), decrescente se ( $t > \pi\tau$ ), quindi per  $t = \pi\tau$  si ha un massimo (che è anche massimo assoluto), di entità  $f(\pi\tau) = 1/\pi$ .

La derivata seconda della funzione  $K(t)/\Gamma(t)$ , si annulla per un tempo  $t = \frac{16}{9}\pi\tau$ , e per un tempo  $t_f$ , in cui il diagramma di Fig. a) presenta un flesso ascendente, con ordinata  $f(16\pi\tau/9) = 15/16\pi$ .

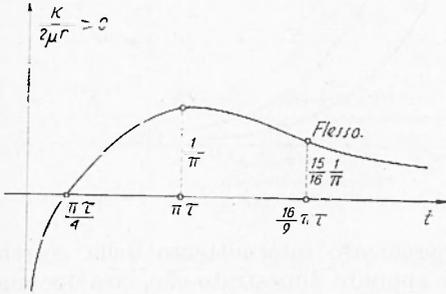


Fig. a

Assumendo come variabile il rapporto  $K/\mu\Gamma$  (o  $K$  ad esso proporzionale), il grafico della funzione inversa si presenta come in Fig. b.

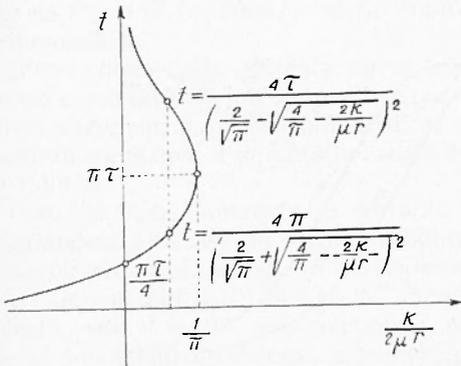


Fig. b

Dal grafico si nota che il tempo  $t$  risulta definito per:

$$-\infty < K/2\mu\Gamma \leq 1/\pi,$$

univalente per  $K/2\mu\Gamma \leq 0$  (un tale ambito non interessa, evidentemente, il problema fisico che suggerisce la funzione), o due

valori se:

$$0 < \frac{K}{2\mu\Gamma} \leq 1/\pi.$$

Limitandosi a tali valori della variabile  $K/2\mu\Gamma$ , si può scegliere uno dei due osservando che, dal problema fisico, si può ritenere attendibile il ramo di curva (Fig. b), solo per  $t \geq \pi\tau$ . Andrà pertanto scelto il tempo maggiore, cioè quello in cui si assume nel denominatore, il segno (—):

$$t = 4\pi / (2\sqrt{\pi} - \sqrt{4/\pi - 2K/\mu\Gamma}).$$

La funzione resa così univalente, definita per  $0 < K/2\mu\Gamma \leq 1/\pi$  ha il (lim.  $t \rightarrow \infty$ , ed assume il suo minimo per  $K/2\mu\Gamma = 1/\pi$ , con  $t(1/\pi) = \pi\tau$ .

Il rapporto adimensionale tra la quantità totale  $K(t)$  d'acqua accumulata o espulsa al catodo nel tempo  $t$ , e la quantità  $I$  di elettricità spesa per questo nello stesso tempo, indicato con  $M(t) = K/\mu\Gamma$ , appare in diagrafie (v. Figg. 4, 5, 6), applicando la formulata da noi data in (2):

$$M(t) = (1 + 2\tau/t) \operatorname{erf} \sqrt{\tau/t} + \frac{2}{\sqrt{\pi}} \sqrt{\frac{\tau}{t}} e^{-\tau/t} - 2\tau/t.$$

I profili  $M(t)$  (Figg. 4, 5, 6), tracciati con gli stessi parametri  $a, c$ , delle Figg. 1, 2, 3 hanno andamento perfettamente analogo alle  $Q_k(t)$ . Presentano tutti un « pianerottolo », (periodo stazionario), derivante dal fatto che, per  $t$  abbastanza piccoli (verificanti ancora la limitazione  $t \leq \tau/9$ ), si ha con grandissima approssimazione:

$$\operatorname{erf} \sqrt{\tau/t} \approx 1; e^{-\tau/t} \approx 0,$$

quindi:

$$M(t) \sim 1, \text{ cioè } K(t) \approx \mu\Gamma$$

Oltre il pianerottolo,  $M(t)$  decresce lentamente, fino a ridursi quasi a zero per tempi abbastanza grandi rilevabili facilmente dai grafici. Le ampiezze dei pianerottoli sono identiche a quelle rilevate per le  $Q_k(t)$ , in quanto è identica la relazione che definisce il periodo di stazionarietà. Si ha ancora che le durate di stazionarietà, come i tempi elettrodi, crescono con  $(e)$  e con  $(a)$ .

Poichè, almeno al di fuori del pianerottolo,  $M(t)$  decresce col tempo, allora ad elettrogeosmosi inoltrata ( $t \geq \tau/9$ ), conviene l'impiego di correnti relativamente alte con contrazioni

intense e di durata più lunga. Sul temperamento di questa convenienza operativa v. (2).

Con ciò si avvalorava e si completa quanto esposto nel § 2 circa la vantaggiosa modalità

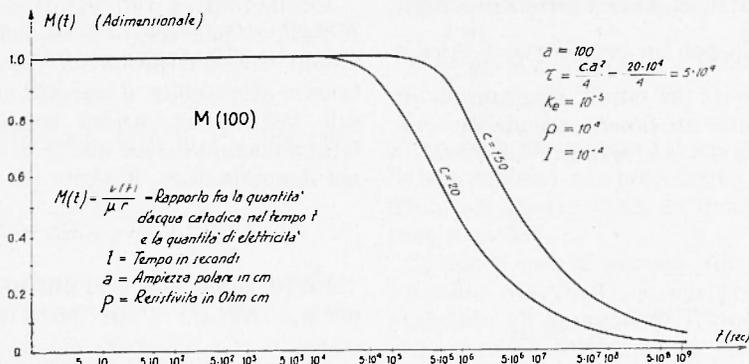


Fig. 4

di durata, piuttosto che piccole a lunga durata.

Modalità operative (con correnti intermittenti) N. 2.

Una nuova modalità operativa permette di intervenire in ambiti in cui  $M(t)$  è ancora grande, e quindi in cui, a parità di quantità di elettricità fluïta, si ottengono ancora alte re-

d'incremento intermittente della corrente. Si è appunto dimostrato che, così operando, non solo si abbrevia la durata del trattamento elettrocinetico, ma si consegue, fermo restando  $I$ , una maggiore resa d'acqua.

Convorrà pertanto, per avere rese migliori, quando si oltrepassi il pianerottolo, innalzare l'intensità della corrente iniziale, in modo da mantenere costante la quantità

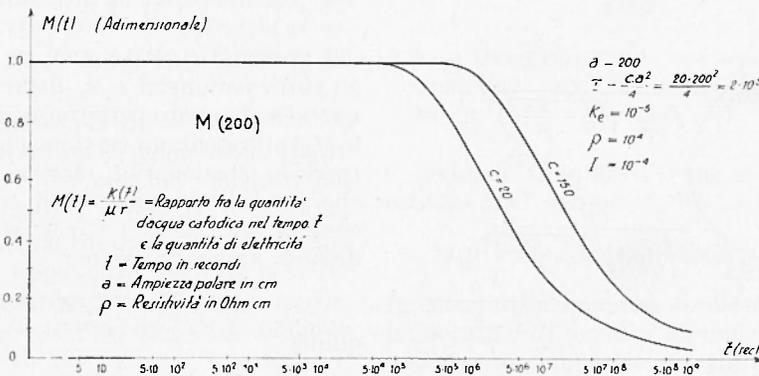


Fig. 5

se di acqua catodica. Quindi l'uso dopo la stazionarietà, di correnti piuttosto intense e di breve durata.

A parità coulometrica, a partire da un certo tempo in poi, questi brevi e forti impulsi permetteranno d'estrarre quantitativi idrici superiori a quelli ottenibili con correnti meno

totali di elettricità, pur riducendo il tempo di erogazione fino a riportarlo possibilmente nel pianerottolo o in prossimità. Ad es. per  $a = 100$ ,  $c = 20$  (Fig. 4), per  $t = 10^5$  sec.,  $M(t) = 0,87$ .

Occorrerà allora erogare una corrente  $I'$  per un tempo  $t' < t$ , tale che sia intanto

$\bar{I}'t = It$ , ( $I' = I$ ), e tale che sia inoltre  $\bar{t} \leq \tau/9$  nell'ambito estremo del pianerottolo (o post). Poichè è  $\bar{t} = tI/I'$ , dovrà essere  $\frac{I}{I'} \bar{t} \leq \tau/9$ , cioè  $I' \geq 9 I \frac{t}{\tau}$ , per  $\bar{t} = 5 \cdot 10^3$ ; coi nostri valori  $I' \geq 18 I$ .

resa, si procederà con la modalità operativa N. 2 (naturalmente l'erogazione di corrente richiesta si ritiene compatibile con tutte le altre esigenze e possibilità del processo).

Una serie di prove sperimentali elettroodometriche su argille saturate d'acqua hanno confermato in pieno la nostra teoria isoter-

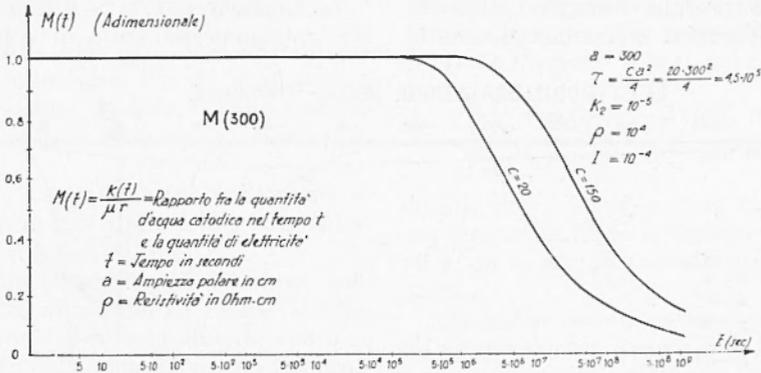


Fig. 6

Analogamente, per  $a = 300$ ,  $c = 20$  (Fig. 6), per tempi molto grandi  $t = 10^8$ ,  $M(t) = 0,14$ . Per riportare allora  $M(t)$  al valore unitario del pianerottolo, occorrerebbe salire ad una corrente enorme  $I'$ , tale che sia  $I' \geq 9 t I \tau = 2000 I$ ,  $\bar{t} \leq \bar{t} 2000$ , il che è impossibile.

L'elevazione della corrente dovrà essere perciò meno tardivo, più tempestivo, per non dover altrimenti impiegare tali altissime correnti, in condizioni d'umidità del suolo molto ridotta.

Come si vede l'aumento di corrente per raggiungere alte rese in acqua catodica, è notevolmente più sensibile di quello trovato per l'aumento di  $Q_k(t)$ . Si è scelto anche in questo caso  $t = 10^8$  sec. per porci nelle stesse condizioni precedenti, e rendere perciò paragonabili i risultati in casi estremi, anche se praticamente inattuabili. Con  $t = 10^6$  sec. (278 h), si troverebbe:

$$I' \geq 20 I, \bar{t} \leq \bar{t}/20,$$

per poter rientrare nel pianerottolo.

Possiamo riferire che qualora interessi disidratare un terreno senza preoccupazioni di rendimento può convenire la modalità N. 1. Se invece interessa anche una regolazione di

mica (v. Elettroodometro di nostra costruzione Fig. c).

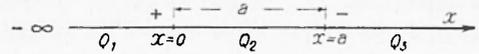


Fig. c

Corrente erogata	Tempo d'erogazione	Quantità d'acqua emunta
$I = 0,20$ A	$t = 5$ h	$K = 161$ cm <sup>3</sup>
$I = 0,25$ A	$t = 4$ h	$K = 171$ cm <sup>3</sup>
$I = 0,33$ A	$t = 3$ h	$K = 180$ cm <sup>3</sup>
$I = 0,50$ A	$t = 2$ h	$K = 256$ cm <sup>3</sup>
$I = 0,67$ A	$t = 1$ h 30 min.	$K = 290$ cm <sup>3</sup> .

Aumentando ancora la corrente  $I$ , si supera il « limite di temperatura di Cruse », e le  $K$  diminuiscono. Il limite massimo d'acqua emunta coincide con il limite massimo di temperatura nel diagramma acqua catarforata-temperatura. Altri effetti in queste situazioni termiche si sovrappongono quali la diminuzione della resistività del mezzo per cui si deve abbassare la tensione per mantenere costante l'ampereaggio, e quindi i

presupposti della teoria isoterma e a tensione costante vengono meno. Nelle nostre prove la corrente ottima (fermo restando i 3600 Coulombs erogati) è stata 0,5 A per 2 h (tempo minimo del processo) cataforando 250 cm<sup>3</sup> d'acqua d'impregnazione dei campioni argillosi, mentre con ben 5 h d'erogazione di corrente 0,2 A si è emunta la metà d'acqua. Ferma restando perciò la quantità d'elettricità conviene portare la

cm<sup>3</sup> e per sec., questa disidratazione mentre è nulla per  $x > a$ , si può esprimere, v. (2):

$$Q(x,t) = \frac{\mu I}{a} \sqrt{\frac{\tau}{\pi t}} \cdot \left\{ \exp. \left[ -\left(\frac{x}{a}\right)^2 \cdot \frac{\tau}{t} \right] - \exp. \left[ -\left(2 - \frac{x}{a}\right)^2 \cdot \frac{\tau}{t} \right] \right\} \quad (x < a).$$

La funzione  $Q(x, t) > 0$  indica dunque la disidratazione dell'unità di volume del ter-

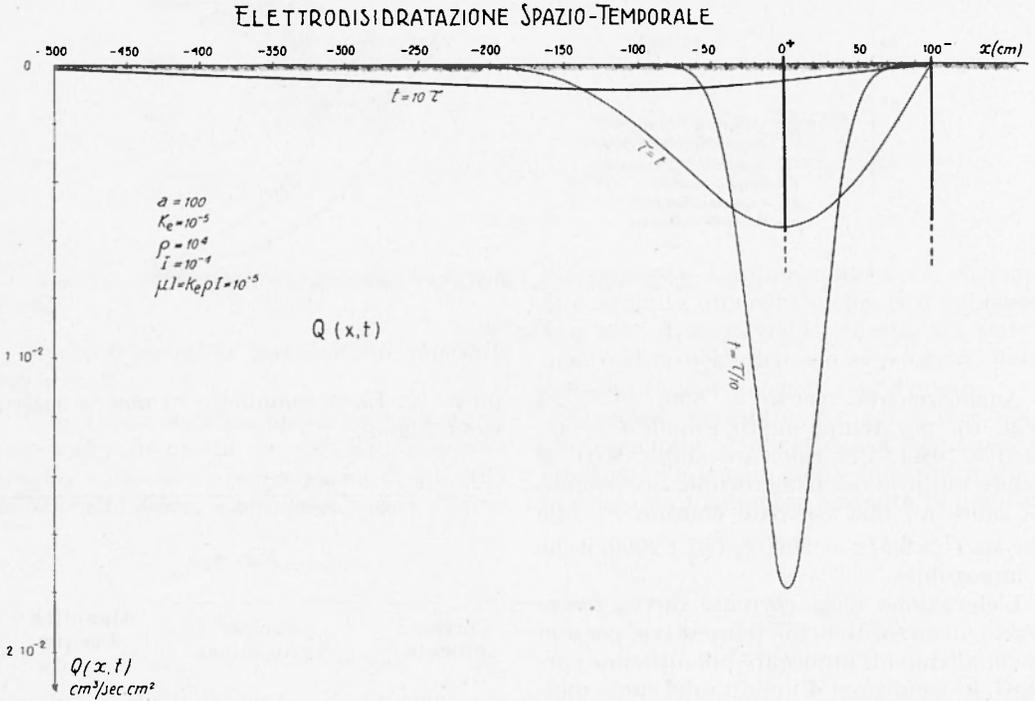


Fig. 7

corrente a sbalzi (tenere presenti i pianerottoli) fino ad un certo massimo (desumibile questo dalla termicità del suolo) e contrarre il tempo dell'elettroprocesso secondo la norma della costanza coulometrica. *Per tanto le modalità operative N. 1, N. 2 s'integrano e conferiscono alla prassi elettroosmotica un impiego razionale.*

§ 4 - DISTRIBUZIONE SPAZIOTEMPORALE DELLA PERDITA DI PORTATA NELL'UNITÀ DI VOLUME.

Considerando specialmente, punto per punto nel terreno la perdita d'acqua per

reno nell'unità di tempo (v. Fig. 7) per effetto dell'elettrogeosmosi.

In detta funzione,  $t$  varia tra  $(0, +\infty)$ , mentre  $x$  varia negli intervalli extranodico  $(-\infty, 0)$ , e interpolare  $(0, a)$ :

$$Q(-\infty, t) = 0; Q(0, t) = \frac{\mu I}{a} \sqrt{\frac{\tau}{\pi t}} (1 - e^{-\tau/t}); Q(a, 0) = 0$$

Inoltre:

$$\frac{\partial Q}{\partial x} > 0, \text{ se } -\infty < x < x_0,$$

$Q(x, t)$  crescente con  $x$ ,

$$\frac{\partial Q}{\partial x} < 0, \text{ se } x_0 < x < a,$$

$Q(x, t)$  decrescente con  $x$ , e pertanto  $Q(x_0, t)$  sarà il massimo valore assunto dalla  $Q(x, t)$ .

Poichè  $(\partial Q / \partial x)_{x=0} < 0$ , e  $\frac{\partial Q}{\partial x} < 0$  se  $0 < x < a$ , ne deriva che  $(x_0)$  è necessariamente negativo o nullo (per  $t = 0$ ), e di conseguenza il massimo di  $Q(x, t)$  cade sull'anodo (per  $t = 0$ ) o nella zona extranodica ( $t > 0$ ).

Nella fig. 7 appaiono tre andamenti di  $Q(x, t)$  in funzione della  $x$  per tre valori prefissati di  $t$ : ( $\tau$  10,  $\tau$ ,  $10 \tau$ ).

I primi due presentano il massimo, molto accentuato, all'anodo: in realtà, il massimo dovrebbe essere leggermente spostato verso l'ambito della  $x$  negativa, ma l'approssimazione usata nei calcoli non rende sensibile questa differenza. Il terzo  $t = 10\tau$  presenta invece il massimo per  $x = -100$ , in accordo con la teoria.

Si noti infine che, col crescere del tempo, e come del resto è facilmente avvertibile con un semplice esame della funzione, lo spostamento del massimo verso le  $x$  negative, è accompagnato da una generale e sensibile diminuzione di  $Q(x, t)$ , diminuzione cioè del prosciugamento per unità di volume e di tempo.

Per  $t \ll \tau$ ,  $Q(x)$  presenta uno spiccato massimo nei pressi dell'anodo  $x = 0$ , il che avviene come nella stazionarietà.

Inizialmente viene quindi prosciugata solo la zona dell'anodo, il che dimostra che la teoria stazionaria, che postula che tutta l'acqua estratta proviene dall'anodo, è corretta, almeno fino a quando che  $t \ll \tau$ .

Aumentando  $t$ , il massimo migra verso valori negativi di  $x$ , o extranodici, divenendo sempre meno pronunciato. Per  $t \gg \tau$ , il massimo schiacciato cade in ambiti di trascurabile interesse ( $x \ll -a$ ). Per tempi simili l'idroestrazione procede molto lentamente ( $Q_k \sim \frac{1}{1/t}$ ), provenendo ormai da zone ben distanti dal centro bipolare d'eccitazione elettrica. Tutta l'acqua tellurica che si poteva espellere sotto l'azione della cor-

rente  $I$ , dalla regione complessiva ( $-a < x < a$ ), si può ritenere praticamente emunta.

Per vedere ciò ancora più chiaramente, basta calcolare la portata  $W$  per unità di volume data da:

$$\int_0^t Q dt,$$

quantità complessiva d'acqua sottratta all'unità di volume di terreno nell'intervallo  $(0, t)$ . La funzione  $W(x, t)$ , per  $t = \infty$  tende a:

$$W_\infty = \mu I a c = I k_e R, \text{ per } x < 0;$$

$$W_\infty = \mu I (a - x), \text{ per } 0 < x < a,$$

limiti, per ( $-a < x < a$ ) raggiungibili in un tempo multiplo sufficientemente grande di  $\tau$ ;  $\mu a = R k_e$  ( $R =$  resistenza ohmica unitaria).

Ciò mostra come il grado di prosciugamento di un terreno, con l'impiego di una corrente  $I$ , non può superare certi limiti (determinati dai coefficienti geotecnici e soprattutto dall'intensità di corrente).

Il grado di prosciugamento non può superare una determinata percentuale dell'umidità iniziale a saturazione o meno. Esso è direttamente proporzionale ad  $(I)$ , alla resistenza ohmica, all'inverso del « coefficiente di consolidamento standard », oppure a  $(c)$ .

Nella regione extranodica  $x < 0$  l'acqua raggiunge per  $t = \infty$  la sua massima entità ( $\mu a c$ ), mentre tra gli elettrodi questa decresce linearmente dall'anodo fino ad annullarsi al catodo. La ragione sta nel fatto che al catodo si raccoglie tutta l'acqua convogliata, e noi abbiamo presupposto in questa teoria, che lì si mantenga la pressione iniziale  $H_0$ .

Se al catodo si agisse sulla pressione, abbassandola, si sovrapporrebbe allora un effetto Darcy provocante un prosciugamento anche nell'ambito catodico. Dipende probabilmente da questo, se in pratica l'acqua continua a comparire al catodo anche dopo cessata l'erogazione di corrente. Diamo una serie di prove elettroodometriche:

Con tensione 16 V,  $I = 0,20$  A, dopo 1800 sec., nell'elettroodometro con argilla più o meno pura, si sono ottenuti 17 cm<sup>3</sup> d'acqua. Portando ora l'amperaggio (sempre per mezz'ora) a 0,35 A (28 V), si ottiene 24 cm<sup>3</sup> (totale 41 cm<sup>3</sup>); aumentando ancora a 0,50 A (40 V) si ha 30 cm<sup>3</sup>. In totale, in 1 h. 30 min.,

di c. c. a scalino si sono ottenuti 71 cm<sup>3</sup> d'acqua elettrosmotica. Con 0,2 A per ottenere i 75 cm<sup>3</sup> d'acqua catodica la durata di erogazione della c. c. è stata di 2 h. 20 min. Con 0,50 A la corrente ha fluito evidentemente per un tempo minore 1 h. e 10 min. ottenendo la stessa quantità d'acqua. Tutto ciò conferma sperimentalmente la funzione dell'amperaggio e della sua durata agli effetti dell'emungimento elettroidrico.

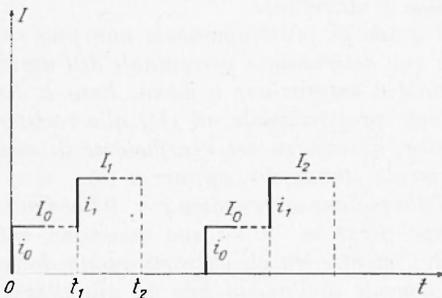
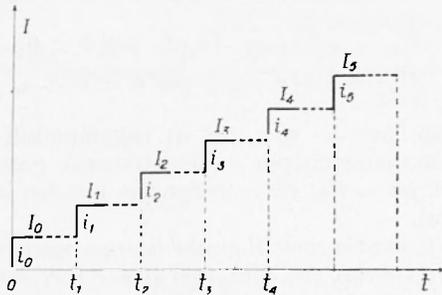


Fig. d

Si noti in particolare che la resistività elettrica del campione roccioso rimane sempre costante (circa 1456  $\Omega$  cm), quindi non si hanno influenze nocive da tener conto. Se ritorniamo ora all'erogazione di cui sopra a scalino, sempre con lo stesso campione argilloso (sui 10.000 cm<sup>3</sup> di terreno), staccando la corrente dopo mezz'ora, in questa fase l'acqua sale da 19 a 21 cm<sup>3</sup>, una piccola percentuale quindi dell'aumento che si verifica continuando l'immissione di corrente. Anche aumentando la tensione iniziale della c. c. a gradino, nella pausa d'energizzazione elettrica non si sono superati i 2 cm<sup>3</sup> d'acqua, il che mostra trattarsi di un piccolo effetto Darcy post-elettrico: Fig. d).

La Fig. 8 mostra, in funzione del tempo e del luogo ( $x = 0$ ) l'elettro-disidratazione totale del terreno. Sono riportati 2 diagrammi di  $W(x, t)$  in funzione del tempo, per  $c = 20$ ,  $c = 150$ . S'è spinto il calcolo fino a mettere in evidenza, per entrambi i valori considerati del coefficiente ( $c$ ), come  $W(a, t)$  risulti asintotica al valore  $\mu Iac$ ; asintoti paralleli all'ascissa.

È appena necessario osservare che  $W(x, t)$ , per un fissato  $x$ , cresce col tempo, come è fisicamente ovvio, fino ai valori asintotici.

Ritornando alla distribuzione della « perdita di portata idrica  $Q(x, t)$  — per unità di volume », in funzione del tempo e dell'ascissa (v. Figg. 9, 10, 11, 12, 13, 14), abbiamo voluto ripartirla nei diversi spazi polari, secondo le formule da noi trovate in (2):

$$Q_1(t) = \frac{\mu I}{2} \operatorname{erf} (2 \sqrt{\tau/t}),$$

(perdita di acqua extranodica);

$$Q_2(t) = \mu I (\operatorname{erf} \sqrt{\tau/t} - \frac{1}{2} \operatorname{erf} 2 \sqrt{\tau/t}),$$

(perdita di acqua interpolare);

$Q_3(t) = 0$ , (perdita di acqua extracatodica);

$Q = Q_1 + Q_2$ , (perdita di acqua totale).

Queste espressioni di  $Q_1(t)$ ,  $Q_2(t)$  si possono ottenere direttamente per integrazione della  $Q(t, x)$  rispetto ad  $x$  negli intervalli  $(-\infty, 0)$ ,  $(0, a)$ .

La quantità totale d'acqua  $Q$  estratta proviene dunque (tenuto conto dei presupposti della pressione interstiziale costante al catodo, e del processo monodimensionale), parzialmente dall'intervallo extranodico  $-\infty < x < 0$ , parte da quello interpolare  $0 < x < a$ .

Per  $t \ll \tau$ ,  $Q$  proviene, grosso modo, in parti uguali, da questi spazi attivi (principalmente dall'anodico), verificandosi in tale periodo:

$$Q_1 = Q_2 = \mu I/2.$$

Col proseguire del tempo il contributo idrico dell'ambito extranodico  $(-\infty < x < 0)$  aumenta fino a divenire, per  $(t \gg \tau)$  l'apporto predominante ( $Q_2 = 0$ ).

Per tempi  $t \gg \tau$  cessa perciò l'apporto interpolare, e il richiamo elettroidrico teleazionante raggiunge solo regioni molto lontane, (grazie all'effetto Darcy, col presupposto di

un mezzo illimitato, per cui all' $\infty$ ,  $P = 0$ , o la pressione permane  $H_0$ ). Il prosciugamento interpolare s'attua in definitiva fino a quando il tempo  $t$  non superi di qualche multiplo del tempo di consolidamento  $\tau$ .

Il 1° gruppo di grafici (Figg. 9, 10, 11),

Al periodo  $t = 4\tau/9$  corrisponde un piano-rotolo esolettrosmotico, tratto orizzontale di curva praticamente parallelo all'asse dei tempi, 4 volte più esteso di quello interelettrosmotico. Al di là,  $Q_1(t)$  decresce lentamente fino ad annullarsi per  $t = \infty$ .

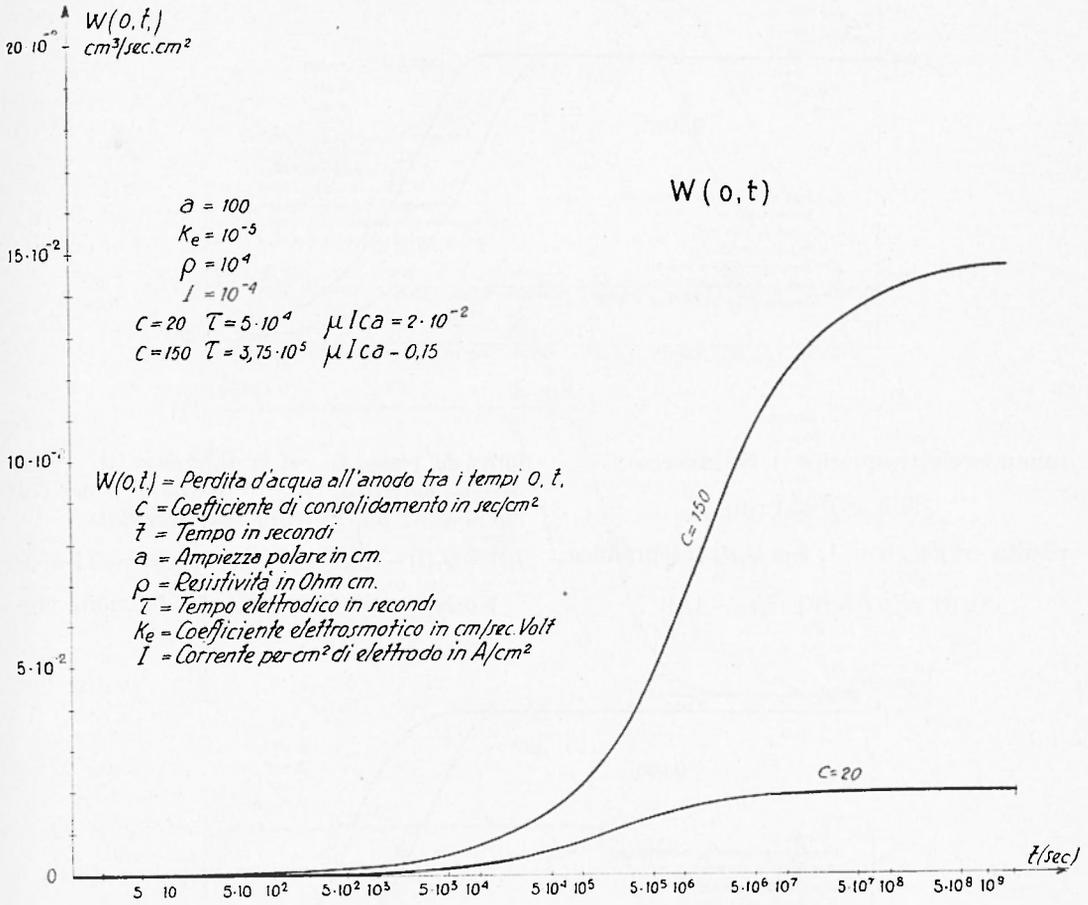


Fig. 8

tracciati per  $a = 100, 200, 300, c = 20$  e  $150$ , mostra il comportamento della perdita di acqua  $Q_1(t)$  per  $\text{cm}^3$  e per sec. nello spazio extranodico, in funzione del tempo  $t$ .

Notiamo che si ha  $Q_1(0) = \mu I/2, Q_1(\infty) = 0$ , e poichè  $Q_1'(t) < 0$ , la  $Q_1(t)$  è decrescente col tempo. Potendosi ritenere approssimativamente:  $\text{erf } x = 1$ , se  $x \geq 3$ , si trova che, se  $2\sqrt{\tau}/t > 3$  (ovvero  $t \leq \tau/9$ ), vale con grandissima approssimazione l'eguaglianza:

$$Q_1(t) \approx \mu I/2, (t \leq 4\tau/9).$$

Il gruppo di grafici di Figg. 12, 13, 14, tracciati con gli stessi valori precedenti, danno la quantità  $Q_2(t)$  di acqua estratta nell'unità di volume nello spazio  $(0, a)$  per integrazione della funzione  $Q(x, t)$  nell'intervallo  $(0, a)$ . Per  $Q_2(t)$  si ha:

$$Q_2(0) = \mu I/2, Q_2(\infty) = 0,$$

ed essendo  $Q_2'(t) < 0$ ,  $Q_2(t)$  è funzione decrescente col tempo.

Quando sia contemporaneamente  $\sqrt{\tau}/t = 3,2 \sqrt{\tau}/t > 3$ . ( $t \leq \tau/9$ ) può porsi pratica-

mente  $\operatorname{erf} \sqrt{t/\tau} = \operatorname{erf} 2\sqrt{t/\tau} = 1$  e quindi:

$$Q_2(t) \cong \mu \frac{I}{2}, \quad (0 < t \leq \tau/9),$$

( $t_p = \frac{\tau}{9}$  periodo stazionario o « pianerot-

Tale eguaglianza cessa per tempi superiori a quelli relativi all'ampiezza del pianerotolo di entrambe le funzioni, salvo a riprodursi per  $t \rightarrow \infty$ , quando entrambe le funzioni sono praticamente nulle.

Ciò mette in evidenza l'esistenza di un va-

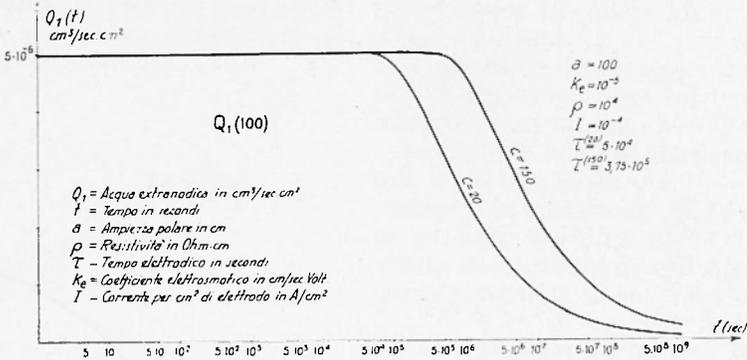


Fig. 9

tolo interelettrosmotico »). Se invece è:

$$(\tau/9 < t < 4\tau/9),$$

risulta  $\operatorname{erf} 2\sqrt{t/\tau} \sim 1$ , e la  $Q_2(t)$  si semplifica:

$$Q_2(t) = \mu I (\operatorname{erf} \sqrt{t/\tau} - 1/2).$$

lore  $t$  del tempo in cui la differenza ( $Q_1 - Q_2$ ) diviene massima. Questo tempo ( $t^*$ ), per cui ciò accade, può trovarsi esaminandola:

$$f(t) = Q_1(t) - Q_2(t) = \mu I (\operatorname{erf} 2\sqrt{t/\tau} - \operatorname{erf} \sqrt{t/\tau}).$$

Notiamo che, essendo  $\operatorname{erf} x$  funzione cre-

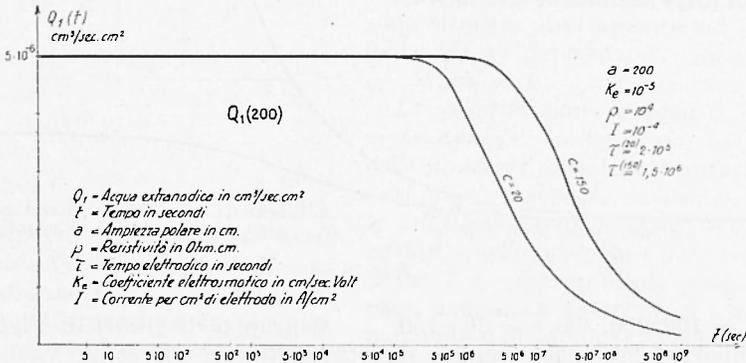


Fig. 10

Nel grafico, all'intervallo temporale  $(0, \tau/9)$  corrisponde un tratto parallelo all'asse dei tempi, oltre il quale  $Q_2(t)$  decresce lentamente fino a ridursi quasi a zero.

Si deduce che nel periodo stazionario,  $Q_1(t)$  e  $Q_2(t)$  appaiono sostanzialmente uguali (con durata per  $Q_1(t)$  4 volte maggiore di  $Q_2(t)$ ).

scente del tempo, è sempre  $f(t) > 0$ , salvo per  $t = 0$  e per  $t = \infty$ , in cui  $f(t)$  vale zero.

Inoltre  $f'(t)$  s'annulla per  $t^* = \frac{3\tau}{\lg 2}$ , e poi-

chè  $f'(t) > 0$  se  $t < t^*$ ;  $f'(t) < 0$  se  $t > t^*$ , la  $f(t)$  ha un massimo assoluto per  $t = t^*$  (per cui si ha la massima prevalenza di  $Q_1$  su  $Q_2$ ).

Si noti che l'eguaglianza  $Q_1 = Q_2$  si ha, in teoria, solo per  $t = 0$ , mentre in pratica  $Q_1$  e  $Q_2$  possono considerarsi uguali per tutta la durata  $(\tau/9)$  del pianerottolo. Dalle tabel-

In pratica converrà pertanto, quando si voglia disidratare soprattutto la zona inter-elettrodica, operare per tempi minori di  $t^* = 3\tau/\ln 2$  (oltre i quali s'essicca in prevalenza

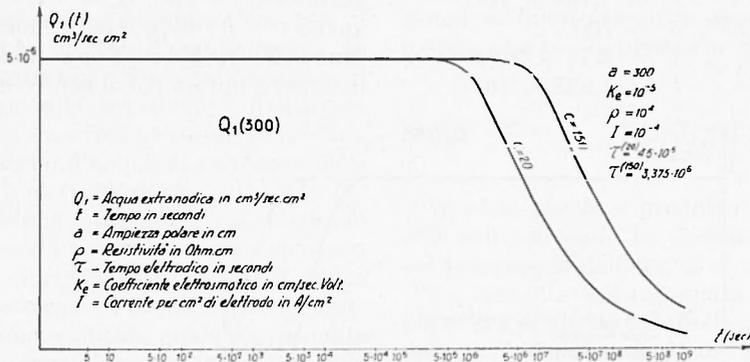


Fig. 11

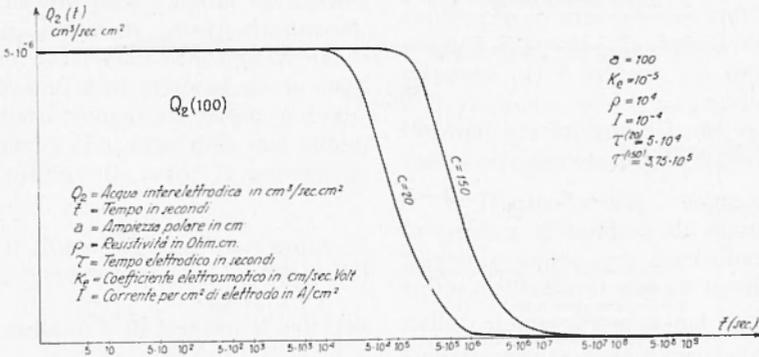


Fig. 12

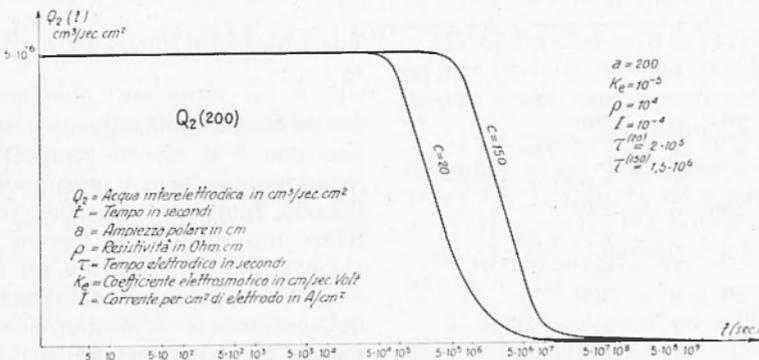


Fig. 13

le di calcolo è facile rilevare come l'incremento di  $(Q_1 - Q_2)$  sia dovuto soprattutto alla maggiore diminuzione di  $Q_2$  rispetto a quella di  $Q_1$ .

la zona extranelettrodica). È superfluo, in altre parole, procedere con l'elettrosmosi dopo  $(t^*)$ , se ci si propone di disidratare solo l'ambito  $(a)$  interpolare. I tempi  $(t^*)$  qui sotto

riportati sono in corrispondenza dei vari casi esaminati, e messi in confronto con  $\tau$ .

- per  $c = 20$ ,  $a = 100$   
 $\tau = 5 \times 10^4$ ,  
 $t^* = 2,164 \times 10^5$
- per  $c = 150$ ,  $a = 100$   
 $\tau = 3,75 \times 10^5$ ,  
 $t^* = 1,623 \times 10^6$

alla maggior diminuzione dell'acqua interpolare:  $Q_0$ , in confronto con quella extranodica:  $Q_1$ .

Converrà tener presente, in quanto ai tempi, oltre  $t_{p1} = \tau/9$ ,  $t_{p2} = 4\tau/9$ ,  $t_{f1} = 6\tau/9$ , anche  $t^* = 3\tau/\ln 2$ , e perfezionare con ciò le prassi N. 1, N. 2. Forse non è superfluo nemmeno notare che il centro del prosciuga-

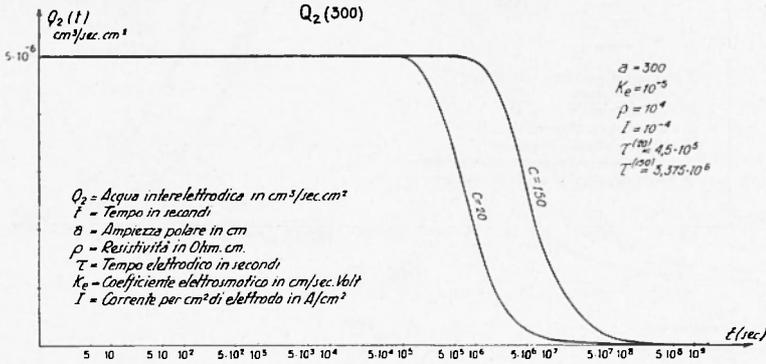


Fig. 14

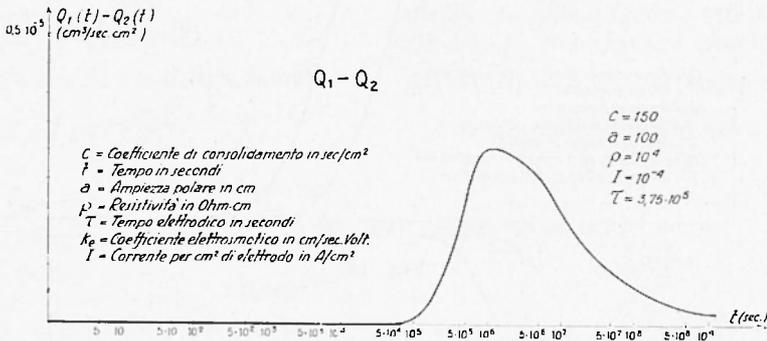


Fig. 15

- per  $c = 20$ ,  $a = 200$   
 $\tau = 2 \times 10^5$   
 $t^* = 8,656 \times 10^5$
- per  $c = 150$ ,  $a = 200$   
 $\tau = 1,5 \times 10^5$ ,  
 $t^* = 6,492 \times 10^6$
- per  $c = 20$ ,  $a = 300$   
 $\tau = 4,5 \times 10^5$   
 $t^* = 1,948 \times 10^6$
- per  $c = 150$ ,  $a = 300$   
 $\tau = 3,375 \times 10^5$   
 $t^* = 1,461 \times 10^7$

La Fig. 15 da  $(Q_1 - Q_2)$  per  $a = 100$ ,  $c = 150$ . È immediato vedere come l'incremento di  $(Q_1 - Q_2)$  sia dovuto soprattutto

mento in un bipolo galvanico elettrogeosmotico non è il centro geometrico bipolare, (considerando però i presupposti fatti), ma l'anodo. In queste situazioni, volendo consolidare una striscia di terreno ( $a$ ), l'ubicazione polare non include gli estremi della striscia rettilinea, ma del centro geometrico della striscia (+) si protende per un'ampiezza ( $a$ ) verso il catodo (-): Fig. f

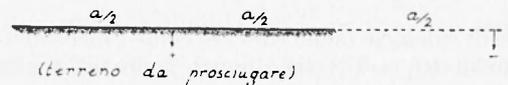


Fig. f.

II<sup>a</sup> PARTE

§ 5

Nella I Parte abbiamo visto l'andamento spazio-temporale elettrogeosmotico, con il presupposto che durante l'emungimento, la pressione idrostatica rimanga costante al catodo, uguale alla pressione o dell'acqua interstiziale, o eventualmente della colonna (parziale o totale) d'acqua di risalienza elettrosmotica. L'elettroprelievo può ben attuarsi a pressione costante, e considerando per questa quella interstiziale, si rileva con ciò il puro apporto elettrogeosmotico, senza componente esterna (o extratellurica), Darcy. Quest'ultima, valutata quale componente interna o di acqua tellurica, interviene solo per ristabilire l'invarianza della pressione al catodo. Siccome però l'acqua cataforata non sempre si toglie in queste condizioni, considereremo qui l'altra alternativa, della « *pressione idrostatica variabile al catodo* » con elettrodispositivo elementare bipolare d'ampiezza ( $a$ ), posto alla superficie del suolo, l'anodo nell'origine ( $x = 0$ ), il catodo in  $x = a$ .

Se  $\vec{q}$  indica il flusso d'acqua per unità di sezione;  $Q$  la perdita di liquido (estratto)

per unità di volume e di tempo,  $W = \int_0^t Q dt$

la perdita di portata per unità di volume;  $q_k$  la portata catodica per unità di sezione,

$K = \int_0^t q_k dt$ ,  $H$  la pressione idrostatica dell'acqua interstiziale, varranno tra queste grandezze, le stesse equazioni indefinite della I Parte.

All'inizio  $t = 0$ , la pressione d'acqua interstiziale sia costante:  $H_0$ , e  $H = H_0$  per  $x = \pm \infty$ .

Le discontinuità di  $q$  nei punti  $x = 0, x = a$ , rappresentano le quantità di fluido  $q_A, q_k$  che, per unità di sezione e di tempo scompaiono all'anodo e al catodo rispettivamente. Il simbolo  $q_k$  sostituisce qui il  $Q_k$  della I Parte (più razionale dato che ha la stessa dimensione di  $q$ ). Poichè all'anodo non viene fornita acqua dall'esterno, il flusso vi dovrà apparire continuo:  $q_A = 0$ . Molto più com-

pressa è la condizione al catodo, con pressione idrostatica proporzionale all'acqua che vi si trova se tubolare. Se  $z$  è la velocità con cui viene tolta l'acqua per unità di sezione catodica,  $\lambda$  un coefficiente di proporzionalità, questo significa, secondo le nostre ipotesi, che per la pressione al catodo si ha:

$$H = \lambda \left( \int_0^t q_k dt - \int_0^t z dt \right).$$

In altre parole il prodotto  $\lambda z$  dà la velocità con cui cade la pressione idrostatica col pompaggio dell'acqua al catodo.

La costante  $\lambda$  rappresenta perciò il rapporto tra la variabilità della pressione catodica e il flusso catodico. Essa è quindi dell'ordine di grandezza del rapporto della pressione catodica e della quantità d'acqua contenuta in una sezione unitaria. Se si immagina il catodo di forma rettangolare, di spessore ( $d$ ) e altezza ( $l$ ), questo rapporto è ovviamente  $gl/d$  ( $g =$  gravità), che è dell'ordine attribuito a  $\lambda$ . In realtà  $\lambda$  dovrà essere più piccola per le seguenti ragioni:

1) Il catodo non è sempre colmo, anzi in pratica si tenderà di mantenerlo possibilmente vuoto, per cui  $l$  deve essere sostituita mediante il valore medio dell'altezza della colonna d'acqua nel catodo  $\bar{l}$ .

Indicando con  $a$  il rapporto  $\bar{l}/l$ , s'avrà in generale  $a < 1$ , in pratica sarà inferiore a  $1/2$  e forse anche di meno.

2) Si è considerato la pressione in fondo, mentre invece bisogna considerare quella media, il che aggiunge un altro fattore  $1/2$ .

3) La pressione dell'acqua catodica si comunica al terreno circostante solo attraverso i fori praticati sul catodo. Indicando con  $\beta$  il rapporto tra la superficie forata e quella totale, si perviene ad un altro fattore  $\beta = s'/s$ .

4) Infine la pressione dell'acqua catodica, e specialmente le sue variazioni si trasmettono con probabilità solo molto imperfettamente al suolo circostante, come anche il sostituire un catodo limitato a quello illimitato (richiesto dalla teoria) richiede un'ulteriore riduzione  $\gamma$  (che sarà qualche frazione dell'unità difficilmente valutabile).

In conclusione si poverrebbe così ad attribuire a  $\lambda$  un ordine di grandezza:

$$\lambda \simeq \frac{1}{2} \alpha \beta \gamma q l / d .$$

Circa il prodotto  $\frac{1}{2} \alpha \beta \gamma$ , si può ritenere che in una grande varietà di casi esso sia dell'ordine di 1/100. In ogni caso le considerazioni svolte dimostrano che è molto difficile dare una valutazione teorica dell'ordine di grandezza di  $\lambda$ .

Osserviamo anzitutto che nella nostra teoria (2) è implicita l'ipotesi che la « pressione effettiva »  $H_k$  al catodo sia proporzionale alla « pressione formale » cioè quella definita mediante la  $[a]$  nelle immediate vicinanze del catodo. Se si potesse identificare le 2 pressioni si avrebbe  $\gamma = 1$ . Veramente in  $\gamma$  è conglobato anche l'effetto proveniente dalle dimensioni finite del catodo. Qui risulta conveniente escluderlo, e aggiungere un altro fattore  $\delta$  che tiene conto delle dimensioni finite. Con l'aggiunta di questo « fattore dispersivo » si avrà per  $\lambda \simeq g l / d \alpha \beta \gamma \delta$ .

In effetti non si possono identificare le 2 pressioni di cui sopra in quanto  $H_k = W_k / c k$  dove  $W_k$  indica l'umidità del terreno nella zona catodica.

Il rapporto tra questa espressione e quella effettiva è rappresentato da  $\gamma$ , cioè si ha:

$$\gamma = \frac{H_k}{H_k} = \frac{W_k}{k c H_k} , \quad 0 : H_k = \gamma \bar{H}_k .$$

Supporre  $\gamma$  costante equivale, in sostanza, formulare la seguente ipotesi fisica: ogni volta che il terreno umido viene a contatto coll'acqua (o atmosfera) si stabilisce immediatamente un equilibrio tra la pressione esterna e l'umidità degli strati a contatto. In questo equilibrio c'è proporzionalità tra le 2 grandezze: le precedenti formule esprimono questa proporzionalità supponendo  $\gamma$  costante.

Supponiamo ora che l'acqua venga tolta in tempi brevi rispetto all'andamento del fenomeno relativamente lungo.

Se al tempo  $t$  viene tolta una quantità d'acqua provocando una diminuzione della pressione catodica  $\Delta H$ , si avrà per  $\lambda z =$

$\Delta H \cdot \delta(t - \bar{t})$   $\delta$  funzione di Dirac, per cui:

$$\lambda \int_0^t z dt = \Delta H \cdot 1 (t - \bar{t}) ; \quad 1 (t - \bar{t}) =$$

funzione impulsiva.

Invece di  $H$  può convenire introdurre la funzione quantità d'acqua estratta per unità di volume al tempo  $t$ :  $W = W_0 - k c H$ . Perveniamo così ad un'equazione da integrare in  $W$ , con condizioni iniziali, all'infinito, di continuità ecc. La soluzione di questo sistema, ottenuta con la trasformata di Laplace (2), ci ha mostrato il vantaggio d'una alimentazione di corrente più che a intermittenze (v. Parte I) ad impulsi veri e propri.

Incrementi di corrente	Intervallo di erogazione	Salti di corrente
$I = I_0$	$0 < t < t_1$	$i_0 = I_0$
$I = I_1$	$t_1 < t < t_2$	$i_1 = I_1 - I_0$
...	...	...
$I = I_n$	$t_n < t < t_{n+1}$	$i_n = I_n - I_{n-1}$
$I = \sum_0^n I_{i/n}$	$0 < t < t_{n+1}$	$\sum i_i = I_n$

Se  $I_{n-1}$  è la corrente per cmq. d'elettrodo, dopo l'n-esimo incremento,  $I_n$  è la corrente per cmq. d'elettrodo dopo l'(n + 1)-esimo. Tutto ciò trova naturalmente i suoi limiti, dato che col progredire della disidratazione sale la resistività del terreno, in modo che l'incremento impulsivo potrebbe richiedere tensioni troppo forti, ripercuotibili dannosamente sulle soglie termoelettrostazionarie (da non superare per non indebolire o addirittura annullare lo stesso processo elettrocinetico).

Se nei tempi  $\bar{t}_1, \bar{t}_2, \dots, \bar{t}_n$  viene tolta l'acqua catodica, con conseguenti abbassamenti della pressione  $H$ :

$$h_1, h_2, \dots, h_n ; \quad \lambda z = \sum h_i \delta(t - \bar{t}_i) .$$

Le variazioni della pressione idraulica e della corrente possono avvenire in istanti arbitrari, non necessariamente coincidenti: (più prelievi idrici in genere, che innalzamenti di corrente).

Se  $t_n$  è l'istante in cui la  $I_{n-1}$  si sale a  $I_n$ , ( $i = I_n - I_{n-1}$ ),  $t_n$  è l'istante del decremento della pressione idraulica da  $H_{n-1}$  a  $H_n$ , ( $h_n = H_{n-1} - H_n$ ).

La teoria ha portato a considerare oltre il « tempo di consolidamento »  $\tau = ca^2/4$  della I Parte, un nuovo tempo, che abbiamo definito « tempo elettrodico »  $\theta = 1/c(2k\lambda)^2$ , espressione in cui appare  $\lambda$ , rapporto s'è visto tra quota piezometrica e acqua catarforata al tempo  $t$ . Questo tempo  $\theta \ll \tau$ , che non dipende da ( $a$ ), è forse la variante più importante apportata alla I Parte. È per  $t \sim \theta$  che la disidratazione interessa quasi esclusivamente la zona anodica, è dall'intorno o ad intervalli di  $\theta$  che si svolgono i processi interpolari, siano essi perseguiti con prelievi idrici a pressione costante o no (un po' più frequenti s'è detto che non gli aumenti di corrente).

Mentre il « tempo di consolidamento »  $\tau$  è normativo per la durata dell'elettroprocesso (contenuto nella bipolarità), il « tempo elettrodico »  $\theta$  è normativo per il prelievo idrico e per gli incrementi di corrente.

La seguente relazione dà la « portata catodica » al tempo  $t$ :

$$\begin{aligned} q_k(t) &= q_k^{(e)}(t) + q_k^{(i)}(t) \\ q_k^{(e)}(t) &= \mu \Sigma i_n \varphi(t - t_n) ; \\ q_k^{(i)}(t) &= k \sqrt{c} \Sigma h_n \psi(t - \bar{t}_n) \end{aligned}$$

$$\varphi(t) = \Phi(\sqrt{t/\theta}) - e^{-\tau/t} \cdot \Phi(\sqrt{t/\theta} + \sqrt{\tau/t})$$

$$\psi(t) = \frac{2}{\sqrt{\pi t}} \left[ 1 - \sqrt{\pi t/\theta} \Phi(\sqrt{t/\theta}) \right]$$

$$\Phi(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_x^\infty e^{-y^2} dy .$$

Le  $\Sigma$  della  $q_k$  contengono un numero di termini pari rispettivamente agli incrementi di corrente effettuati, e al numero d'emungimenti idrici. Le funzioni  $\varphi(t - t_n)$ ,  $\psi(t - \bar{t}_n)$  risultano così:

$$\varphi(t - t_n) = \begin{cases} 0 & , \text{ se } 0 < t < t_n \\ \varphi(t - t_n) & , \text{ se } t_n < t \end{cases}$$

$$\psi(t - \bar{t}_n) = \begin{cases} 0 & , \text{ se } 0 < t < \bar{t}_n \\ \psi(t - \bar{t}_n) & , \text{ se } \bar{t}_n < t \end{cases}$$

In definitiva:

$$q_k = \mu \Sigma i_n \varphi(t - t_n) + \gamma k \sqrt{c} \Sigma h_n \psi(t - \bar{t}_n) ,$$

oppure:

$$q_k = \mu \Sigma i_n \varphi(t - t_p) + \frac{\gamma}{c} \Sigma W_n \psi(t - \bar{t}_n) ,$$

ove ai salti di « pressione formale »  $h_n$ , che avvengono nei tempi  $t_n$  (in cui al catodo viene sottratta l'acqua), vengono sostituiti i salti di « pressione effettiva »  $\bar{h}_n$  (misurati). Qui le  $W_n$  indicano i salti d'umidità al catodo che avvengono quando l'acqua viene estratta. Si noti che nell'ultima espressione di  $q_k$  non compare più  $k$ . Per quel che riguarda il significato di  $\bar{h}_n$  bisogna naturalmente tener conto del fatto che in un catodo verticale la pressione non è uniforme lungo tutta la colonna, e che quindi  $\bar{h}_n$  rappresenterà la differenza della pressione media prima e dopo la sottrazione dell'acqua al catodo (di questo fatto si tiene conto mediante il fattore  $\alpha$ ).

La  $q_k(t)$ , che differisce naturalmente da quella ricavata nella I Parte, in condizioni di pressione costante al catodo, è valida non solo per qualsiasi teoria lineare, con costanti indipendenti dal tempo (che potrebbero però variare spazialmente) ma anche tridimensionale (solo che  $\varphi$  e  $\psi$  assumerebbero forme diverse, dipendenti dalla struttura geometrica dell'impianto, ma non dalla corrente, nè dalla pressione idrostatica). A parte dunque la forma delle  $\varphi$  e  $\psi$ , la  $q_k(t)$  non è legata alla nostra particolare teoria. Abbiamo tratto pertanto importanti conseguenze dalla forma generale di  $q_k(t)$ , prima di esplicitare le  $\varphi$  e  $\psi$ , v. (2).

Nella Fig. 16 sono riportati, in funzione del tempo, 2 esempi numerici relativi alla « componente elettrosmotica » del flusso idrico catodico, assumendo come parametro il coefficiente  $\lambda$ , che dipende dalla forma e dimensioni degli elettrodi. In entrambi i casi si sono considerati 2 stadi del processo, della durata di  $t_1 = 10^4$  sec. ciascuno: alla fine del 1° stadio s'è portata la corrente al valore doppio dell'iniziale. I calcoli permettono di mettere in evidenza l'influenza determinante sul comportamento del fenomeno del « tempo elettrodico  $\theta$  », e, indirettamente di  $\lambda$ . Nel 1° caso infatti ( $\lambda = 10^3$ ,

$\theta = 0,05$  sec.) l'effetto decade con grandissima rapidità (dell'ordine di qualche secondo), decadenza rapidissima che riscontreremo anche per la componente idraulica del flusso catodico. Dopo un tempo pari a qualche multiplo di  $\theta$ , la portata elettrosmo-

Per  $\lambda = 10^5$  il termine iniziale  $I\varphi(t)$  è divenuto trascurabile, per cui il fenomeno, dopo l'immissione della corrente più elevata, si ripete praticamente come nell'intervallo temporale fino a  $t_1$ ; mentre per  $\lambda = 10^2$ , all'istante d'immissione della nostra cor-

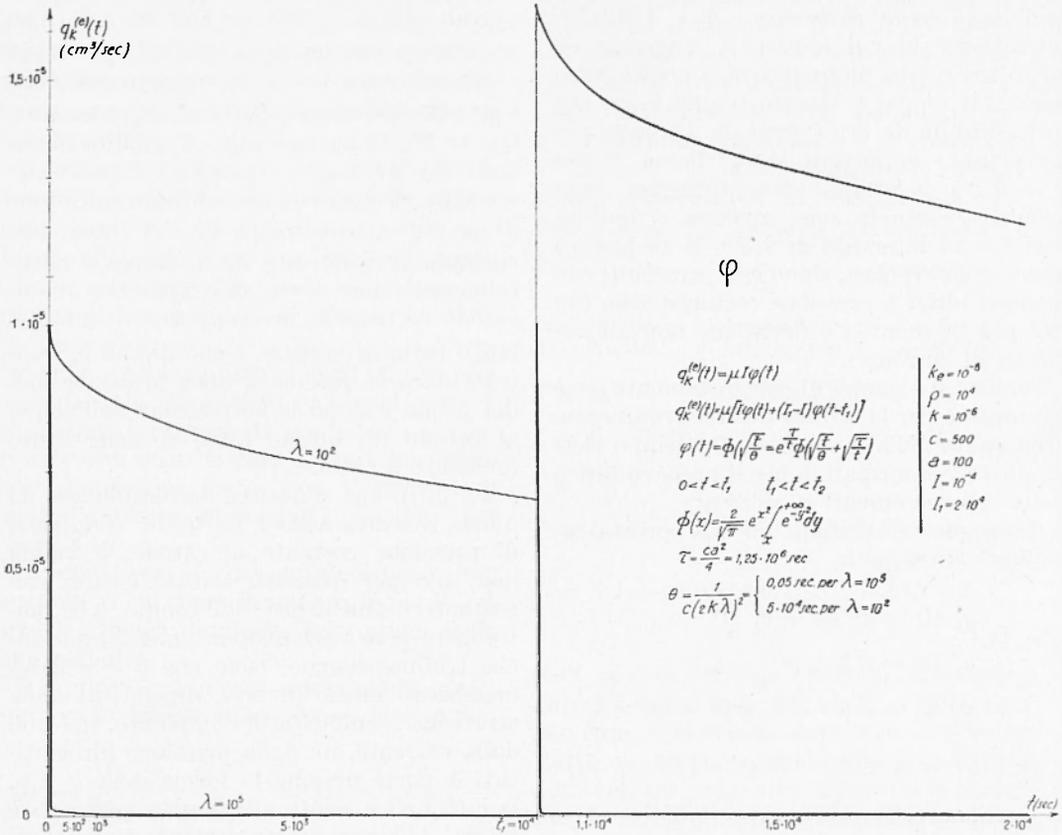


Fig. 16 a

tica si riduce a valori assolutamente trascurabili. Nel 2° caso invece ( $\lambda = 10^2$ ,  $\theta = 5 \cdot 10^4$  sec.), il decadimento è lento, mantenendosi il fenomeno di notevole entità fino all'incremento della corrente. In entrambi i casi l'aumento della corrente provoca l'aggiunta, all'istante  $t_1$ , di un nuovo termine nella  $q_k^{(e)}$  d'entità:

$$i \varphi(t - t_1),$$

e cioè:

$$q_k^{(e)}(t) = \mu [I \varphi(t) + (I_1 - I) \varphi(t - t_1)].$$

rente  $I\varphi(t)$  è ancora notevole, e quindi  $\Delta q_k$  (incremento di portata) proporzionale al salto  $i_n$ , esalta il fenomeno portandolo a valori notevolmente superiori a quelli iniziali.

Nella Fig. 16 si ha, per gli stessi valori di  $\lambda = 10^5$ ,  $\lambda = 10^2$ , la  $q_k^{(i)}(t)$  componente idraulica del fenomeno. Si è supposto di provocare inizialmente una depressione al catodo, tale da portare la pressione a zero (immaginando l'acqua di saturazione a pressione atmosferica: 1033 cm. d'acqua), e operando con depressione  $H_0 = 10^3$  cm. Dopo l'evoluzione del flusso idraulico fino al tem-

po  $t_1 = 10^4$  sec. (identico a quello scelto per l'aumento della corrente), si è effettuato un ulteriore pompaggio, a fine d'esaltare nuovamente il flusso di filtrazione. Contrariamente alla prassi usata per  $q_k^{(e)}(t)$  in cui l'incremento di corrente è arbitrario, a

valori di  $\lambda$  s'è ottenuta una pressione catodica alla fine del 1° stadio di poco superiore a 400 cm. d'acqua, e di tanto è stata considerata la depressione. I calcoli relativi a  $q_k^{(i)}$  hanno nuovamente messo in evidenza la grandissima importanza del valore di  $\lambda$  per

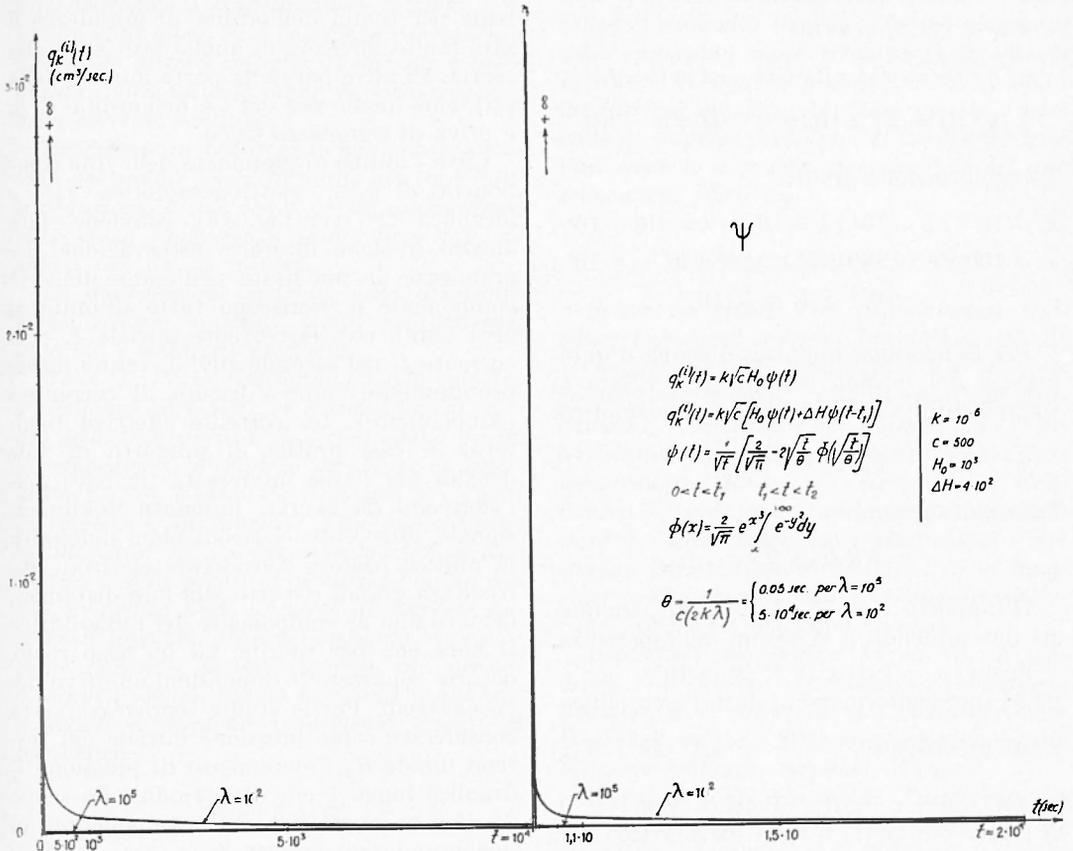


Fig. 16 b

parte l'esigenze di stabilità termica, la depressione idrica catodica all'inizio del 2° stadio è limitata superiormente dalla pressione prodottasi alla fine del 1° stadio (e a cui contribuiscono entrambi le componenti, sia elettrosmotica, che idraulica). Il calcolo della quota piezometrica catodica al tempo  $t_1$ , è effettuabile mediante la formula:

$$H = \lambda \int_0^{t_1} q_k(t) dt ,$$

valutando l'integrale in via approssimata con la formula dei trapezi. Per entrambi i

l'andamento del fenomeno: come per  $q_k^{(e)}$  a grandi valori di  $\lambda$  corrisponde, per il flusso catodico, un decadimento d'estrema rapidità. È tuttavia possibile notare (a parte gli ordini di grandezza puramente indicativi nei grafici) che in tutte e due i casi, a differenza della componente elettrosmotica, l'effetto idraulico ha carattere nettamente impulsivo: la  $q_k^{(i)}$  ha addirittura, per  $t = 0$  (1ª depressione), e per  $t = t_1$  (2ª depressione), valore infinito all'inizio, infinito che conserva però la finitezza dell'acqua estratta, essendo d'ordine abbastanza basso (dovuto

evidentemente alla schematizzazione teorica del pompaggio impulsivo).

Riassumendo si avrà:

$$q_k^{(e)}(t) = \mu I \varphi(t), \quad (0 < t < t_1),$$

$$q_k^{(i)}(t) = k \sqrt[3]{c} H_0 \psi(t), \quad (0 < t < t_1).$$

Per  $t_1 < t < t_2$  si avrà:

$$q_k^{(e)}(t) = \mu [I \varphi(t) + (I_1 - I) \varphi(t - t_1)];$$

$$q_k^{(i)}(t) = k \sqrt[3]{c} [H_0 \psi(t) + H_1 \psi(t - t_1)].$$

Esemplificazione grafica:

$$k_e = 10^{-5}; \quad q = 10^4; \quad k = 10^{-6}; \quad \lambda = 10^2 - 10^5;$$

$$a = 100; \quad c = 500; \quad \bar{H}_0 = 10^3; \quad h_1 = 4 \cdot 10^2;$$

$$I = 10^{-4}; \quad I_1 = 2 \cdot 10^{-4}.$$

Per la massima quantità d'acqua d'imbibizione del terreno estraibile, si ricava la somma di due addendi, uno elettrosmotico:

$$2 \mu I_n \cdot \sqrt[3]{\theta \tau},$$

l'altro idraulico:

$$2 k H_n \sqrt[3]{\theta c}.$$

Il rapporto  $N(\tau) = \mu I_n \sqrt[3]{\tau/c} / k H_n$  tra questi due addendi, è conforme all'esperienza.

Posto  $\mu = k_e q = 10^{-1}$ ,  $k = 10^{-6}$ ,  $\sqrt[3]{c} = 22,36$  (per conformarsi ai dati d'esemplificazione precedente),  $\frac{\mu}{k \sqrt[3]{c}} = 4,47 \cdot 10^3$ ;  $N(\tau)$

$= 4,47 \cdot 10^3 \sqrt[3]{\tau} I_n / H_n$ . Poichè  $N(0) = 0$ ,  $N(\infty) = \infty$ ,  $N'(\tau) > 0$ ,  $N'(0) = N'(\infty) = 0$ , il profilo  $[\tau, N(\tau)]$  diparte verticalmente dall'origine per poi procedere parabolicamente per  $\tau > 0$ , con la convessità verso il basso.

Se inizialmente il contributo della  $\psi$  è molto superiore di quello della  $\varphi$ , però la  $\psi$  decresce (v. Fig. 16) molto più rapidamente della  $\varphi$ . Infatti per valori di  $t \gg \theta$  si ha:

$$\frac{\varphi(t)}{\psi(t)} \approx \frac{t}{\sqrt[3]{\theta}} (1 - e^{-\tau/t}),$$

che per  $t \gg \theta$  sarà generalmente grande rispetto all'unità, e che per  $t \rightarrow \infty$ , tende a  $\tau/\sqrt[3]{\theta}$ .

Inoltre è da osservare che, come già dimostrato, la teoria è valida se si suppone

già avvenuto l'equilibrio tra la pressione esterna e l'umidità catodica, il che è difficile che avvenga in un tempo inferiore a  $\theta$ .

L'espressione ultima di  $q_k$  qui data si può quindi considerare valida solo per tempi che superano qualche multiplo di  $\theta$  per quel che riguarda la  $\psi$ . Per cui il contributo reale per tempi dell'ordine di grandezza  $\theta$  sarà molto inferiore di quello previsto dalla teoria. In altre parole la parte iniziale della  $\psi(t)$ , cioè quella per cui  $t$  è dell'ordine di  $\theta$ , è priva di significato fisico.

Circa l'ordine di grandezza delle due componenti di  $q_k(t)$ , elettrosmotica (1<sup>a</sup>) e idraulica (2<sup>a</sup>) (v. Fig. 16), conviene fare ancora qualche ulteriore osservazione. Le grandezze da noi usate nell'esame della 1<sup>a</sup> componente si riferiscono tutte all'unità di area (cm<sup>2</sup>), così la corrente iniziale  $I$ , e la corrente  $I'$  nel secondo stadio, vanno intese propriamente come « densità di corrente » (Ampère/cm<sup>2</sup>). La corrente effettiva risulterà, in casi pratici, il prodotto di tale densità per l'area interessata (in cm<sup>2</sup>) dell'elettrodo (la teoria, inquanto unidimensionale, esigerebbe elettrodi piani indefiniti, in pratica basterà considerare elettrodi abbastanza grandi rispetto alla loro distanza). Quanto alla 2<sup>a</sup> componente del flusso idrico si nota che per riferirsi ad un caso reale, occorre conoscere le dimensioni effettive degli elettrodi. Per lo studio teorico converrà considerare come pressione iniziale del terreno umido  $H_0$ , l'incremento di pressione idraulica lungo 1 cm. d'elettrodo, allo scopo di riferirsi, come per la 1<sup>a</sup> componente, ad una grandezza unitaria.

Con ciò il coefficiente moltiplicatore della funzione  $\psi(t)$  usando per  $K$  il valore  $10^{-6}$ , e  $c = 500$ , sarà quello segnato in Figura 16):

$$k \sqrt[3]{c} H_0 = 2,24 \cdot 10^{-2},$$

moltiplicato però per  $10^{-3}$ , e cioè:  $2,24 \cdot 10^{-5}$  il che porta la componente idraulica allo stesso ordine di grandezza dell'altra.

Il noto prevalere, nella quantità totale d'acqua estraibile, della 1<sup>a</sup> componente (elettrosmotica), si spiega allora ovviamente col decadimento molto più rapido della componente idraulica il che è ben evidente dai calcoli e grafici relativi alle funzioni  $\varphi(t)$  e  $\psi(t)$  che compaiono in Fig. 16.

## RIASSUNTO

Già nella 1<sup>a</sup> Parte (idroemungimento catodico a pressione costante), l'esame della non-stazionarietà si è rivelato denso di risultati. Evidenziamento di « tempi caratteristici », « tempi di consolidamento », « tempi di prosciugamento interelettrodico e esoelettrodico », « tempi elettrodici », ed altro. Si è dedotto la convenienza d'impiego di forti impulsi di corrente a breve durata, dopo un calcolabile periodo erogativo della corrente continua.

Esperienze in Laboratorio hanno confermato in particolare una delle nostre più importanti deduzioni, e cioè che a parità coulometrica si possono raggiungere idroprelievi più cospicui con durate minori.

La distribuzione spaziale della disidratazione, relativi massimi, tempi caratteristici, tutto ciò è stato ben precisato.

Nella 2<sup>a</sup> Parte (idroemungimento catodico a pressione variabile), si è completato il quadro della transitorietà. Si è confermato prima la convenienza d'impiego di « correnti intermittenti ». Si è mostrato l'efficacia dei « salti di corrente », in funzione d'un nuovo tempo caratteristico da noi denominato « tempo elettrodico ». Alla prassi di pompare l'acqua con più frequenza degli aumenti di corrente durante il processo, abbiamo aggiunto la regolazione razionale di tali aumenti, con periodi d'impulsi idonei. Siamo pervenuti infine così a prassi di maggior rendimento tecnico ed economico.

## ABSTRACT

In part I (cathodic dewatering at steady pressure), the examination of the non-stationariness has given many interesting results. The "characteristic times", "grouting times", "interelectrode and extraelectrode dewatering times", and "electrode times" have been emphasized. The opportunity of using high current impulses with short ration has been deduced, by an initial direct current output period, which may be calculated.

Laboratory experiences have particularly confirmed one of our most important deductions, i. e. that at coulometric parity major water-drawings may be got at shorter durations.

The spacial distribution of the dewatering, relative maxima, and characteristic times have been precisied.

In part II (cathodic dewatering at unsteady pressure), has completed the whole of transitority. First of all the opportunity of using "intermittent currents" has been laid down, and furthermore the efficiency of "current jumps" in function of a new characteristic time has been demonstrated, which we have called "electrode time". To the praxis of water pumping more frequent than current increases during the process, we have added the rational regulation of those increases with suitable impulse periods. At the end we have thus come to a praxis of major technical and economical efficiency.

## ZUSAMMENFASSUNG

Schon im ersten Teil (kathodischen Entwässerung durch constant Druck) hat sich die Untersuchung der Unstetigkeit als sehr ergebnisreich erwiesen. « Charakteristische Zeitdauern », « Zeitdauern der Befestigung », « interelektrodische und extraelektrodische Entwässerungszeitdauern », « elektrodische Zeitdauern » sind unter anderem klagemacht worden. Die Anwendungsnützlichkeit von starken kurzfristigen Stromimpulsen in Folge einer ersten berechenbaren Gleichstromlieferungsperiode ist abgeleitet worden.

Laboratoriumsversuche haben im Besonderen eine unserer wichtigsten Ableitungen bestätigt, d. h. dass wir mit coulometrischer Gleichheit grössere Wasserentnehmungen von kleinerer Zeitdauer erreichen können.

Wir haben die räumliche Verteilung der Entwässerung, die relativen Maximalwerte und die charakteristischen Zeitdauern genau festgelegt.

Im zweiten Teil (kathodische Entwässerung durch veränderlichen Druck) haben wir die transitorische Gesamtheit vervollständigt. Zuerst hat sich die Nützlichkeit des Gebrauchs vom « intermittierenden Strom » bewiesen, ebenso wie die Wirksamkeit der « Stromsprünge » in Funktion mit einer neuen charakteristischen Zeitdauer, die von uns « elektrodische Zeitdauer » genannt wird. Der Praxis häufigerer Wasserpumpungen als Stromerhebungen während des Verfahrens, fügen wir die rationelle Regulierung dieser Erhöhungen mit passenden Impulsperioden hinzu. So sind wir letztlich zu Verfahren von grösserem technischen und wirtschaftlichen Ertrag gelangt.

## BIBLIOGRAFIA

- (<sup>1</sup>) A. BELLUIGI, *Teoria Generale dell'Elettrogeosmosi tridimensionale* « (I, II, III) Geofisica Pura ed Applicata », Milano, 39, (1958/1).
- (<sup>2</sup>) — *La non stazionarietà dei fenomeni elettrogeosmotici*, « Geofisica Pura ed Applicata » Milano, 40, (1958/II).
- *Non-Stationary Electro-heo-osmotic effect*. « Proceedings of the Fourth Int. Conf. on Soil Mechanics and Foundation Engineering », London, August 1957, III. Discussion.
- (<sup>3</sup>) W. SCHAAD, *Computation Bases of Electro-osmotic Drainage of Soils*, « Proceedings of the Fourth Int. Conf. on Soil Mechanics and Foundation Engineering », London, August, 1957.
- *Praktische Anwendungen der Elektrosmo- se im Gebiete des Grundbaues*, « Die Bau- technik », Juni 1958.
-