

# Nuovi criteri per la prospezione sismica a rifrazione

C. CONTINI - C. MAINO - M. RANUCCI

## STRATI ANISOTROPI CON VELOCITÀ COSTANTE

### 21. - Ottica dei raggi nei mezzi anisotropi.

In un mezzo  $M$  omogeneo stratificato sia  $V$  la velocità di trasmissione delle onde sismiche nella direzione della stratificazione e sia  $V'$  la velocità nella direzione perpendicolare: l'anisotropia sia del tipo che generalmente è detto *ellittico* e quindi le velocità  $V_\theta$  nelle diverse direzioni  $\theta$  siano conformi alla legge

$$\frac{1}{V_\theta^2} = \frac{\sin^2 \theta}{V^2} + \frac{\cos^2 \theta}{V'^2}, \quad [62]$$

essendo  $\theta$  misurate rispetto alle normali delle superfici di stratificazione.

In un tal mezzo, ammesso che le superfici di stratificazione siano piani paralleli, i raggi emessi da una sorgente  $S$  sono rettilinei e le superfici d'onda sono delle ellissi concentriche in  $S$  di equazione generale

$$\tau = r \sqrt{\frac{\sin^2 \theta}{V^2} + \frac{\cos^2 \theta}{V'^2}}, \quad [63]$$

ove con  $\tau$  siano indicati i tempi e con  $r$  le distanze da  $S$ .

Indicando con  $a$  il coefficiente d'anisotropia, definito dalla

$$a = \frac{V}{V'}, \quad [64]$$

l'equazione [63] si trasforma nella

$$\tau = \frac{r}{V} \sqrt{\sin^2 \theta + a^2 \cos^2 \theta}. \quad [65]$$

Supponiamo ora che il terreno sia costituito da diversi mezzi  $M_1, M_2, M_3, \dots$  omogenei stratificati, a contatto secondo le

superfici  $\zeta_{12}, \zeta_{23}, \dots$  i quali abbiano rispettivamente la velocità di trasmissione delle onde  $V_1, V_2, V_3, \dots$  nelle direzioni della stratificazione e i coefficienti d'anisotropia  $a_1, a_2, a_3, \dots$ .

Ammesso che le superfici di contatto e quelle di stratificazione dei diversi mezzi siano piane e fra loro parallele, i raggi emessi da una sorgente  $S$ , nel mezzo  $M_1$ , risultano nei diversi mezzi, per il principio generale della brachistocrona, di direzione  $\theta_1, \theta_2, \theta_3, \dots$  tali per cui

$$\begin{aligned} V_1^2 \left( 1 + \frac{a_1^2}{\tan^2 \theta_1} \right) &= V_2^2 \left( 1 + \frac{a_2^2}{\tan^2 \theta_2} \right) = \\ &= V_3^2 \left( \frac{a_3^2}{\tan^2 \theta_3} \right) = \dots, \end{aligned} \quad [66]$$

Da questa condizione risulta in effetto dimostrata la proprietà dei raggi di trasmettersi nei diversi mezzi  $M_i$  secondo direzioni indipendenti dalle caratteristiche di velocità e di anisotropia dei mezzi  $M_2, M_3, \dots, M_{i-1}$  che separano lo stesso mezzo  $M_i$  da quello  $M_1$  ove è situata la sorgente dei sismi.

Posto che i raggi si rifrangano nel mezzo ennesimo secondo l'angolo limite di  $90^\circ$  possiamo determinare i percorsi degli stessi raggi ponendo  $\theta_n = 90^\circ$  e risolvendo le  $n-1$  equazioni in  $\theta_{n-1}, \theta_{n-2}, \dots, \theta_n$  che risultano dalla [66].

Nella fig. 15 riportiamo il disegno del regolo per il tracciamento dei raggi rifratti relativo al coefficiente d'anisotropia  $a = 1,20$  di uso del tutto simile a quello del regolo della fig. 1, il quale è relativo ad  $a = 1$ .

Prevedendo di dover tener conto sistematicamente dell'anisotropia, nell'elaborazione dei rilievi, converrà predisporre i reticoli relativi a diversi valori del coefficiente d'anisotropia, per esempio di 1,00, 1,05, 1,10,

1,15, 1,20 e 1,25 in modo che in ogni caso se ne abbia pronto uno relativo a un valore abbastanza prossimo al necessario.

È da notare che, per quanto abbiamo detto sopra, tali regoli possono servire soltanto per strati fra loro paralleli e paralleli alle stratificazioni.

Nella fig. 16 riportiamo il grafico-prontuario di calcolo dei valori di  $j$  e di  $\text{tg } j$  per i diversi valori del rapporto delle velocità dei mezzi a contatto e per i valori del rapporto di anisotropia del mezzo di velocità minore di 1,00, 1,05, 1,10, 1,15, 1,20 e 1,25, di uso evidente.

Nella fig. 17 riportiamo infine il grafico-prontuario di calcolo delle pendenze  $\text{tg } \theta$  dei raggi in relazione alle velocità dei mezzi, costruito in base alle [66] ponendo uguale ad  $\alpha$  costante i coefficienti d'anisotropia dei diversi strati, il quale tornerà particolarmente utile nel caso della velocità variabile regolarmente colla profondità degli strati di cui diremo ai paragr. 23 e successivi.

## 22. - Ricostruzione degli strati anisotropi.

Ammettiamo che il sottosuolo sia costituito da strati fra loro paralleli e che la stratificazione sia parallela alle superfici limiti degli strati stessi.

Nel caso della presenza di due strati la corrispondenza fra le velocità apparenti delle dromocrone e le pendenze degli strati ha luogo colle stesse leggi che abbiamo visto per gli strati isotropi quando si considerino per la  $V_1$  i valori della velocità che secondo la [62] risultano per i raggi del primo strato d'inclinazione  $j$ , rispetto alla normale alla  $\zeta_{12}$ . Adottando tale accorgimento possiamo quindi senz'altro applicare il metodo d'elaborazione degli angoli d'emergenza descritto al paragr. 16.

Per il tracciamento dei raggi nel caso di tre o più strati si dovrà naturalmente tener conto delle diverse velocità in relazione alle direzioni dei raggi stessi.

Per facilitare i calcoli pratici riportiamo nella fig. 18 il reticolo-prontuario di calcolo dei valori del rapporto  $\beta$  fra le velocità  $V_0$  e  $V$  quali risultano dalla [62] per i diversi valori di  $\theta$  e di  $\alpha$

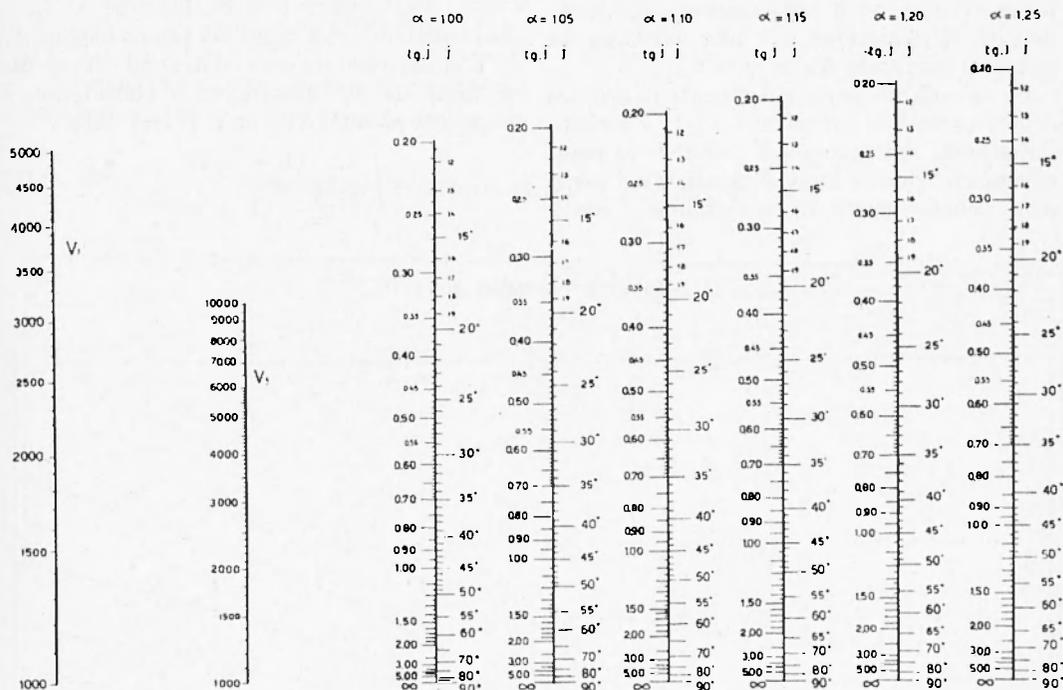
$$\beta = \frac{V_0}{V} = \sqrt{\frac{1 + \text{tg}^2 \theta}{\alpha^2 + \text{tg}^2 \theta}}. \quad [67]$$



Fig. 15. - Regolo per il tracciamento dei raggi limiti di rifrazione relativo al coefficiente d'anisotropia  $\alpha = 1,20$ .

Sempre per facilitare i calcoli pratici si possono segnare nei regoli per il tracciamento dei raggi limiti di rifrazione i valori di  $\beta$  corrispondenti agli stessi raggi, lungo il margine superiore, in modo che si possono avere i valori di  $\beta$  immediatamente col tracciamento dei raggi, così come noi abbiamo consigliato per il regolo della fig. 15.

degli angoli variabili colle superfici d' stratificazione, pur conservandosi rettilinei, e quindi si trasmettono secondo velocità diverse da punto a punto. Per la pratica noi riteniamo che in generale sarà sufficiente adottare i rapporti  $\beta$  corrispondenti al valore della pendenza medio fra quelli delle pendenze estreme.



AGIP MINERARIA

S. DONATO · SETTEMBRE 1958

Fig. 16. - Prontuario di calcolo dell'angolo limite di rifrazione  $j$  note le velocità  $V_1$  e  $V_2$  dei mezzi di trasmissione a contatto e noto il coefficiente d'anisotropia  $\alpha$  del mezzo di velocità minore.

Per l'applicazione dei metodi di Gardner e per archi serviranno evidentemente gli stessi procedimenti descritti ai paragrafi 17 e 18 quando si abbia cura di adottare le velocità corrispondenti alle direzioni ammesse per i raggi.

Pel caso che gli strati siano impiegati secondo superfici curve è da osservare che i raggi nell'ambito di ciascun strato formano

### STRATI ANISOTROPI CON VELOCITÀ VARIABILE COLLA PROFONDITÀ

#### 23. - Formole generali.

Si abbia ora il mezzo  $M$  di trasmissione delle onde anisotropo, avente coefficiente d'anisotropia  $\alpha$  costante, anisotropia del tipo ellittico e piani di stratificazione del mezzo

fra loro paralleli, con velocità  $V$  secondo la stratificazione variabile nella direzione perpendicolare alla stratificazione stessa in conformità della legge

$$V = V_0 (1 + \mu z)^v, \quad [68]$$

ove  $V_0$  velocità corrispondente a un punto origine dei sismi  $S$ ,  $z$  distanze misurate nella direzione normale alla stratificazione,  $\mu$  una costante che chiameremo con *coefficiente di variazione* e  $v$  una costante in generale compresa fra lo zero e 1.

Se adottiamo per i riferimenti il sistema di assi cartesiani ortogonali  $X, Y, Z$  avente l'origine in  $S$ , il piano  $XY$  parallelo ai piani di stratificazione e l'asse  $Z$  positivo nel verso delle velocità crescenti, e indichiamo con  $\theta$

le inclinazioni rispetto all'asse  $Z$  dei raggi che dall'origine si trasmettono al punto generico  $P(x, y, z)$  otteniamo, per la [66],

$$\operatorname{tg} \theta = a \frac{(1 + \mu z)^v}{\sqrt{\psi_0^2 - (1 + \mu z)^{2v}}} \quad [69]$$

ove

$$\psi_0^2 = 1 + \frac{\alpha^2}{\operatorname{tg}^2 \theta_0}, \quad [70]$$

$\theta_0$  inclinazioni dei raggi nel punto origine  $S$ .

L'equazione generale dei raggi che si dipartono da  $S$ , limitandoci a considerare i raggi nel piano  $XZ$ , è data perciò dalla

$$x = a \int \frac{(1 + \mu z)^v}{\sqrt{\psi_0^2 - (1 + \mu z)^{2v}}} dz. \quad [71]$$

PENDENZE DEI RAGGI RIFRATTI

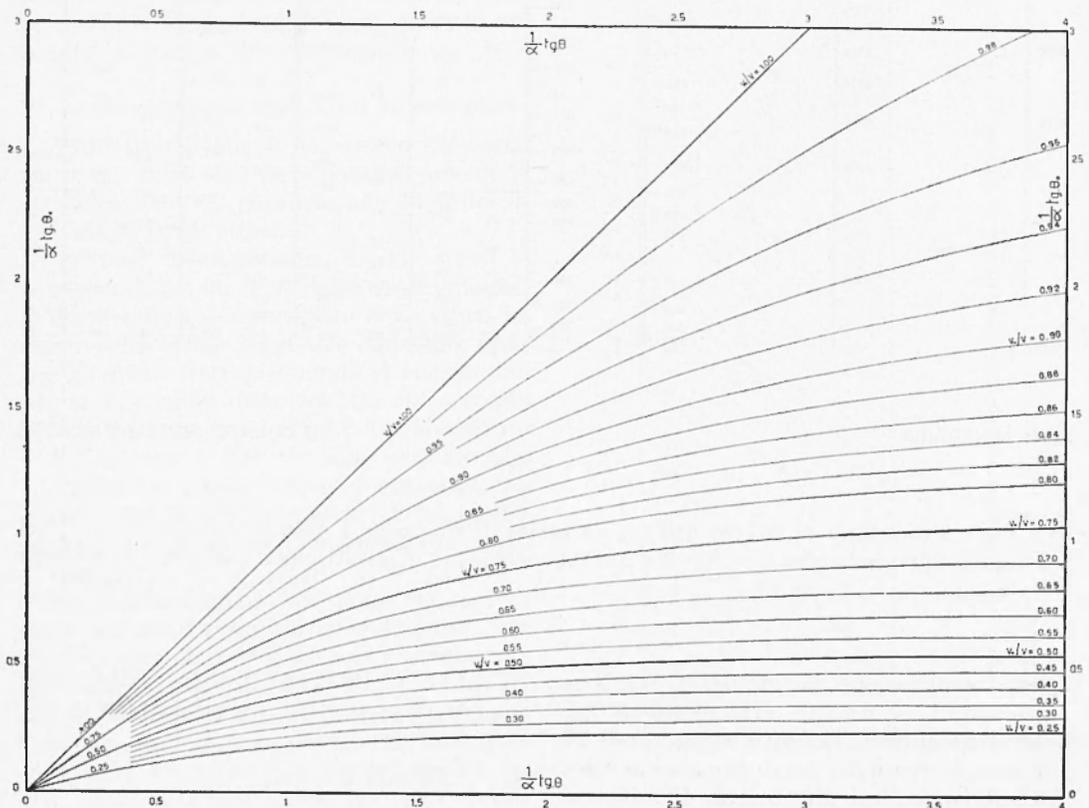


Fig. 17. - Prontuario di calcolo delle pendenze dei raggi rifratti dati i rapporti delle velocità e il coefficiente d'anisotropia  $\alpha$ .

Dalla [65], che possiamo porre sotto la forma

$$d\tau = \frac{1}{v} \sqrt{dx^2 + a^2 dz^2},$$

otteniamo l'equazione dei tempi dei raggi che si dipartono da  $S$

$$\tau = \frac{a}{V_0} \psi_0 \int \frac{dz}{(1 + \mu z)^\nu \sqrt{\psi_0^2 - (1 + \mu z)^{2\nu}}}. \quad [72]$$

Le velocità che in pratica si incontrano possono sempre essere rappresentate con ap-

prossimazione sufficiente, mediante formole del tipo della [68], le quali comportano delle equazioni per i raggi e per i tempi facilmente integrabili: volendo tuttavia adottare formole di altro tipo non sarà difficile trovare le equazioni analoghe alle [71] e [72].

I raggi necessariamente sono simmetrici rispetto alle normali alla stratificazione per i punti in cui i raggi risultano paralleli alla stratificazione stessa: si troverà quindi in

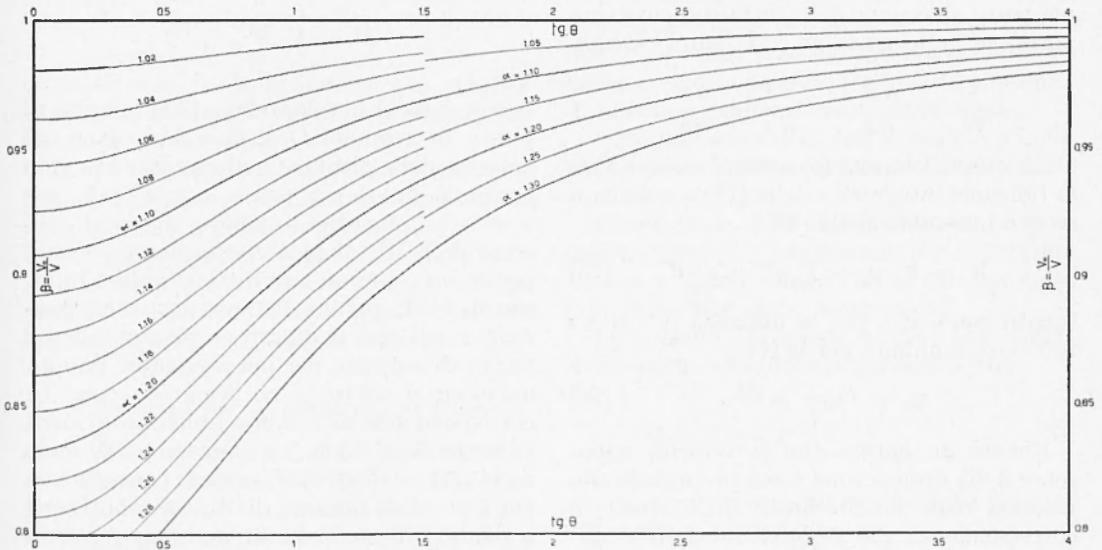
$$V = V_0'' (1 + \mu'' z'')^\nu, \quad [73]$$

essendo

$$z'' = z - z_0, \quad \mu'' = \frac{\mu}{1 + \mu z_0},$$

$$V_0'' = V_0 (1 + \mu z_0)^\nu,$$

VARIAZIONI DELLA VELOCITÀ CON LE PENDENZE DEI RAGGI



AGIP MINERARIA

S. DONATO SETTEMBRE 1958

Fig. 18. - Rapporti  $\beta$  fra le velocità  $V_\theta$  relative alle pendenze  $\text{tg } \theta$  dei raggi (misurate rispetto alle normali ai piani di stratificazione) e le velocità  $V$  relative ai piani di stratificazione.

Ammissa una legge del tipo [68] evidentemente le [66] possono essere messe sotto la forma

ove  $\psi_1, \psi_2, \dots$  siano date dalla [70] per le inclinazioni  $\theta_1, \theta_2, \dots$  dei raggi in

Ammissa una legge del tipo [68] evidentemente le [66] possono essere messe sotto la forma

$$\psi_0 = (1 + \mu z_1)^\nu \psi_1 = (1 + \mu z_2)^\nu \psi_2 = \dots, \quad [74]$$

ove  $\psi_1, \psi_2, \dots$  siano date dalla [70] per le inclinazioni  $\theta_1, \theta_2, \dots$  dei raggi in

corrispondenza alle ordinate  $z_1, z_2, \dots$  rispettivamente.

#### 24. - Formole per il calcolo delle costanti.

Data la curva dromocrona di un terreno possiamo in generale determinare le costanti della formola della velocità del tipo della [68] relativa allo stesso terreno ricercando per tentativi la curva che mediamente più si avvicina alla data e confrontando l'equazione corrispondente colla [68]. Più razionalmente però possiamo operare secondo uno dei metodi seguenti, basati sulle velocità apparenti delle dromocrone.

*Metodo della dromocrona orizzontale.* Rilevata la curva dromocrona lungo l'asse delle distanze  $X$ , relativa a una stazione di scoppio posta all'origine delle distanze, possiamo porre, se indichiamo con  $T$  i tempi relativi,

$$\frac{1}{W} = \frac{dT}{dx} = \frac{dT}{dz} \cdot \frac{dx}{dz}.$$

Da questa otteniamo, sostituendo a  $dT/dz$  la funzione integranda della [72] e a  $dx/dz$  il secondo membro della [69],

$$W = V_0 \psi_0 = V_0 (1 + \mu z)^{\nu}, \quad [75]$$

tenuto conto che per la distanza  $x/2$  si ha  $\operatorname{tg} \theta = \infty$  e quindi, per la [74],

$$\psi_0 = (1 + \mu z)^{\nu}. \quad [76]$$

Risulta da questa che la velocità apparente della dromocrona è sempre uguale alla velocità reale longitudinale degli strati in corrispondenza alle profondità massime raggiunte dai raggi, nei punti di ascissa  $x/2$ .

Fissato il valore da attribuire all'esponente  $\nu$  della [68] possiamo determinare, mediante la [71], l'equazione dei raggi e quindi ricavare la funzione che lega le profondità massime raggiunte dai raggi colle distanze di emersione degli stessi.

Nota tale funzione e note le velocità apparenti  $W_0, W_1, \dots, W_i$  relative alle distanze  $0, x_1, \dots, x_i$  dall'origine dei sismi possiamo evidentemente determinare, dai sistemi di equazioni che risultano applicando le [75], i valori della velocità  $V_0$  e delle costanti  $\mu$  ed  $\alpha$  corrispondenti alle caratteristiche medie dei terreni per le diverse profondità.

*Metodo degli scoppi profondi.* Se invece che alla superficie del suolo si scoppia alla profondità  $z_s$  in un pozzo coincidente coll'asse  $Z$  vale ancora la [72] ove si ponga  $z = z_s$  e si sostituisca a  $\psi_0$  l'espressione che risulta dalla [71] ponendovi pure  $z = z_s$ .

La velocità apparente che in conseguenza risulta è uguale alla  $dx/dt$  che si ottiene dalla [72] ponendo  $z = z_s$  e sostituendo a  $\psi_0$  l'espressione di cui sopra abbiamo detto. Abbiamo

$$W = \frac{V_0 (1 + \mu z_s)^{2\nu}}{\psi_0}, \quad (77)$$

ove  $\psi_0$  sia dato dalla [71] ponendovi semplicemente  $z = z_s$ .

Tale espressione di  $W$ , per le [66], si modifica nella

$$W = V_0 \frac{\psi_0}{\psi_s^2},$$

ove  $\psi_s$  indichi il valore della [70] relativo al punto di scoppio. Ora, il valore di  $\psi_0$  al crescere delle distanze  $x$  diminuisce in modo continuo da  $+\infty$ , per  $x = 0$ , a  $+1$ , per  $x = +\infty$ , mentre il valore di  $\psi_s$  al crescere delle distanze  $x$  diminuisce da  $+\infty$ , per  $x = 0$ , fino ad assumere il valore minimo di  $+1$ , per le distanze cui corrispondono raggi che si dipartono orizzontali dal punto di scoppio, per poi aumentar fino ad assumere il valore  $+\infty$  per  $x = +\infty$ . In corrispondenza al minimo abbiamo evidentemente  $W = V_0 \psi_0$ , ove ancora  $\psi_0$  sia dato dalla [71] e dalla [76]. Risulta di conseguenza per i punti di minimo di  $W$ , corrispondenti a punti di flesso delle dromocrone e perciò facilmente riconoscibili,

$$W = V_0 (1 + \mu z_s)^{\nu} : \quad [78]$$

una velocità apparente uguale alla velocità reale nella direzione della stratificazione in corrispondenza al punto di scoppio, di profondità nota  $z_s$ .

Applicando questa formola e la [76] alle curve dromocrone relative a scoppi di diversa profondità possiamo evidentemente determinare tutt'e tre le costanti  $V_0, \mu$  ed  $\alpha$  e le variazioni delle stesse colla profondità.

Nel caso che si scoppi in prossimità di un pozzo e si rilevino i tempi lungo il pozzo o viceversa si scoppi lungo il pozzo e si rilevino i tempi alla festa dello stesso ab-

biamo, indicando con  $z$  le profondità,

$$T = \frac{\alpha}{V_0} \int \frac{dz}{(1 + \mu z)^r}, \quad [79]$$

che per  $r = 1$  diviene

$$T = \frac{\alpha}{\mu V_0} \log(1 + \mu z). \quad [80]$$

e in generale per  $r \neq 1$  diviene

$$T = \frac{\alpha}{\mu V_0 (1 - r)} (1 + \mu z)^{1-r}. \quad [81]$$

Le velocità apparenti che risultano dalle dromocrone tracciate lungo l'asse del pozzo sono date in generale, per la [79], dalla

$$W = \frac{dz}{dT} = \frac{1}{\alpha} V_0 (1 + \mu z)^r : \quad [82]$$

come si vede risultano uguali alle velocità vere nella direzione verticale corrispondenti alle stesse profondità.

In questo caso coll'applicazione ripetuta della [82] si possono determinare i valori della costante  $\mu$  e del rapporto  $V_0/\alpha$ .

Se scoppiando nei pozzi si rilevano i tempi alla testa degli stessi e lungo profili radiali evidentemente oltre alla [82] risultano applicabili anche la [78] e la [76].

## 25. - Principi per la ricostruzione tettonica.

Come si sa, le variazioni delle caratteristiche elastiche dei terreni per rispetto alla profondità, a parte l'influenza della diversa costituzione litologica, sono principalmente da attribuire al differente grado di compattezza dei terreni stessi conseguente alle differenti pressioni cui sono sottoposti attualmente e furono sottoposti in passato, nonché dei tempi d'azione delle pressioni stesse.

Tali terreni, in generale, furono depositi originariamente secondo giaciture orizzontali o sub-orizzontali e quindi ebbero le prime compressioni, dovute alla gravità, e i primi incrementi della velocità di trasmissione delle onde sismiche nella direzione ortogonale.

Coi piegamenti successivi gli stessi terreni, perdurando oppure no la deposizione dei sedimenti, il carico non poté che agire obliquamente rispetto alla stratificazione e pro-

vocare in conseguenza un incremento della velocità di trasmissione secondo una direzione intermedia fra l'ortogonale e la verticale, più vicina all'una o all'altra a seconda del rapporto dei carichi e dei tempi d'azione prima e dopo il piegamento (Contini 1952).

Ad evitare complicazioni dei calcoli però noi ammetteremo sempre, nelle considerazioni che faremo, che gli incrementi delle velocità di trasmissione dei terreni siano massimi secondo le direzioni normali alle superfici di stratificazione.

Ciò posto, vediamo come si possa determinare l'equazione della dromocrona quando gli strati del sottosuolo sono depositi pendenti di  $k$  rispetto alla superficie del suolo.

Adottiamo per i riferimenti il sistema di assi cartesiani ortogonali coll'origine coincidente coll'origine dei sismi  $S$ , l'asse  $Z$  normale agli strati positivo nel verso delle velocità crescenti e l'asse  $X$  parallelo alla linea di massima pendenza degli strati stessi.

Dato tale sistema di assi la traccia  $\sigma$  della superficie del suolo sul piano  $XZ$  risulta di equazione  $z = kx$ .

L'equazione della dromocrona sulla  $\sigma$  si ottiene dalla [72] sostituendo a  $z$  il termine  $kx$  e a  $\varphi_0$  l'espressione che si ottiene dalla [71] colle medesime sostituzioni.

Le velocità apparenti relative alla stessa dromocrona sono date in generale dalla

$$W = \sqrt{1 + k^2} \frac{V_0^2 (1 + \mu kx)^{2r}}{V_0 \varphi_0}, \quad [83]$$

ove  $\varphi_0$  sia il valore che risulta dalla [71] sostituendo a  $z$  il termine  $x/k$ .

È facile vedere che utilizzando questa formula per determinare le pendenze degli strati risultano delle difficoltà di calcolo molto rilevanti, qualunque sia la legge ammessa per la trasmissione delle onde sismiche nel suolo. Tali difficoltà si riducono notevolmente se ci limitiamo a considerare le velocità apparenti che risultano in corrispondenza agli scoppi, nel qual caso la [83] diviene, posto  $x = 0$  e quindi  $\varphi_0 = \sqrt{1 + \alpha^2 k^2}$ ,

$$W = \sqrt{\frac{1 + k^2}{1 + \alpha^2 k^2}} \frac{V'^2}{V_0}, \quad [84]$$

ove con  $V'$  sia indicata la velocità vera alla superficie del suolo in corrispondenza agli scoppi.

Noti i valori delle velocità apparenti  $W_1$  e  $W_2$  delle dromocrone relative alla traccia  $\sigma$  per gli scoppi di un medesimo profilo corrispondenti alle distanze  $\varrho_1$  e  $\varrho_2$  misurate sulla superficie del suolo rispetto a un'origine qualunque otteniamo dalla [84]

$$k^2 = \frac{\alpha^2 + 1 + \sqrt{(\alpha^2 - 1)^2 + 4A^4}}{2(A^4 - \alpha^2)}, \quad [85]$$

ove

$$A = \mu(\varrho_2 - \varrho_1) : \left[ \sqrt{\frac{W_2}{V_0}} - \sqrt{\frac{W_1}{V_0}} \right].$$

Applicando questa formola per diverse coppie di pozzetti evidentemente possiamo anche determinare il prodotto  $\mu^2 V_0$  corrispondente ai terreni in rilievo.

Quando alla profondità  $h_s$  esistesse uno strato di velocità longitudinale  $V_2$  costante parallelo alla stratificazione dello strato superiore di velocità variabile secondo la [68] colla pendenza  $-k$  rispetto alla superficie del suolo l'equazione della dromocrona sulla  $\sigma$ , molto più complessa, potrà in generale essere determinata nel modo seguente, riferendoci alle indicazioni della fig. 19:

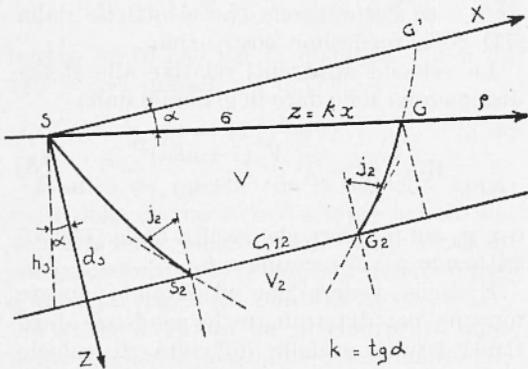


Fig. 19

1) Calcoliamo mediante le [66] il valore di  $\psi_0$  del raggio che in  $S_2$  si rifrange secondo l'angolo limite  $j_2$  in corrispondenza alla superficie  $\sigma_{12}$  di contatto dei due strati costituenti il sottosuolo ponendo

$$\psi_0 = \frac{V_2}{V_0}; \quad [86]$$

2) Calcoliamo l'ascissa  $x_s$  del punto  $S_2$  di rifrazione totale sostituendo nella [71], a

integrazione effettuata, a  $\psi_0$  il valore sopra determinato e a  $z$  la distanza  $d_s = h_s \cos \varphi = h_s / \sqrt{1 + k^2}$ ;

3) Calcoliamo la differenza  $\Delta x$  fra le ascisse dei punti  $G'$  e  $G$  sostituendo nella [71], sempre a integrazione effettuata, a  $\psi_0$  lo stesso valore e a  $z$  il termine  $kx$ ;

4) Poniamo infine

$$T = 2T_s - T_g + \frac{x + \Delta x - 2x_s}{V_2}, \quad [87]$$

essendo  $T_s$  e  $T_g$  i tempi che risultano dalla [72] per  $z = d_s$  e  $z = kx$  rispettivamente e per  $\psi_0 = V_2/V_0$ .

Le velocità apparenti relative a tale dromocrona sono date dalla

$$\frac{1}{W} = \frac{1}{V_2 \sqrt{1 + k^2}} \left[ 1 - ak \sqrt{\frac{V_2^2}{V_0^2 (1 + \mu kx)^2} - 1} \right]. \quad [88]$$

Questa equazione è praticamente irrisolvibile rispetto alla pendenza  $k$ : in generale però noi potremo sempre determinare le pendenze  $k$  degli strati, date le velocità apparenti, coll'ausilio dei grafici-prontuari di cui diremo ampiamente al paragr. 27.

Evidentemente, ammesso che la pendenza degli strati sia costante, possiamo mediante la [88] ricavare dalle dromocrone rilevate i valori delle costanti  $a$ ,  $V_0$ ,  $\mu$  e  $V_2$  degli strati stessi.

Con strati orizzontali, per i quali  $k = 0$ , risulta  $W = V_2$ , come è facile controllare.

Per gli scoppi coniugati otteniamo colle sostituzioni considerate per la [73] la stessa [88] però col segno positivo per il radicale entro le parentesi. Dalle velocità apparenti nei due sensi coniugati otteniamo allora l'equazione

$$\frac{1}{W_{2d}} + \frac{1}{W_{1d}} = \frac{2}{V_2 \sqrt{1 + k^2}}, \quad [89]$$

mediante la quale possiamo determinare la pendenza  $k$  degli strati.

Nel caso che gli strati siano disposti secondo pieghe continue i calcoli delle traiettorie dei raggi e dei tempi relativi risultano laboriosissimi, se non impossibili. In tale caso, come è evidente, interferiscono sia le variazioni delle velocità per effetto dell'ani-

sotropia, di cui abbiamo detto al termine del par. 22, sia le influenze della variazione delle direzioni di massimo incremento della velocità. Per queste ultime influenze è da osservare che, ammesso  $\alpha = 1$ , gli indici di rifrazione dei raggi risultano in generale variabili secondo il rapporto delle curvature delle superfici isotache delle pieghe.

Considerando la scarsa approssimazione con cui si possono stabilire le leggi della velocità quando gli strati sono piegati, per l'influenza incognita delle pressioni, di cui abbiamo fatto cenno all'inizio del paragrafo, e per quella delle spinte orogenetiche noi riteniamo in pratica il miglioramento della precisione conseguibile tenendo conto dell'influenza delle curvature delle isotache non riesca apprezzabile e quindi convenza, semplificando enormemente i calcoli, considerare le pieghe come costituite da tanti elementi di strato piani e applicare la [88] nel modo che abbiamo detto, per ogni singolo elemento, supposto ognuno indipendente dagli adiacenti: in tale modo il problema della ricostruzione tettonica degli strati piegati viene ridotto a quello della ricostruzione degli strati piani, evidentemente molto meno complesso.

Quando gli strati presenti nel sottosuolo fossero più di due i calcoli si complicano in modo tale che praticamente conviene abbandonare ogni metodo di ricostruzione diretta e procedere per tentativi, ammettendo delle particolari configurazioni degli strati, calcolando i tempi relativi in base ai raggi che risultano e quindi variando le configurazioni fino ad ottenere una sufficiente concordanza fra i tempi calcolati e osservati.

Nel caso che gli strati successivi al primo siano tutti a velocità costante e paralleli fra loro evidentemente per ognuno di questi è applicabile la [88] quando vi si sostituisca a  $V_2$  la corrispondente velocità vera nel senso della stratificazione.

#### 26. — *Estensione del metodo degli angoli d'emergenza.*

Per la ricostruzione della superficie  $\zeta_{12}$  di contatto di uno strato a velocità variabile e di uno strato o complesso di strati paralleli a velocità costante possiamo operare, in base alla [88], nel seguente modo, che si può

considerare come l'estensione del metodo degli angoli d'emergenza di cui abbiamo detto al par. 16:

1) Rilevate le dromocrone, seguendo le modalità e gli accorgimenti di cui abbiamo detto ai primi paragrafi, e calcolate, mediante il solito modulo riportato al termine del par. 6, le velocità apparenti, determiniamo le pendenze  $k$  della superficie  $\zeta_{12}$  che soddisfano alla [88], utilizzando i prontuari che avremo predisposto, scriviamo i dati ottenuti nella riga contraddistinta con  $\text{sen}\varphi$  e quindi nelle righe seguenti calcoliamo i valori di  $\text{tg}\varphi' = \text{tg}(\varphi + j_2)$  e quelli di  $\text{tg}_m\varphi' = \text{tg}_m(\varphi + j_2)$  medi fra i valori successivi di  $\text{tg}\varphi'$ , essendo  $j_2$  l'angolo limite di rifrazione che risulta dal regolo del tipo della fig. 15 corrispondente al valore attuale del coefficiente d'anisotropia per i valori noti della velocità del secondo strato  $V_2$  e del primo strato soprastante a contatto secondo la superficie  $\zeta_{12}$ , che indicheremo con  $V_1$ ;

2) Sulla sezione per i sismografi tracciamo a partire dai punti del *P. B.* corrispondenti ai sismografi 1, 2, . . . . . le semirette  $\lambda'_1, \lambda'_2, \dots$  con pendenze, misurate rispetto alla verticale, uguale ai valori delle  $\text{tg}_m\varphi'$  delle colonne corrispondenti; costruiamo quindi una squadretta di celuloide trasparente simile a quella della figura 20 avente al vertice *B* l'angolo  $90^\circ - j_2$  e avente l'ipotenusa sagomata colla forma che risulta dalla [71] per il raggio che al limite inferiore ha l'inclinazione rispetto alla verticale uguale a  $j_2$  e si trasmette colla velocità  $V_1$ , di cui diremo più estesamente al paragrafo che segue;

3) Per il punto  $N_2$  di profondità nota, o supposta nota, tracciamo coll'ausilio della squadretta costruita il raggio rifratto alla superficie: sia  $G_{N_2}$  il punto d'intersezione col piano base; quando la pendenza  $k_2$  di  $\zeta_{12}$  in  $N_2$  non fosse nota la si determinerà per tentativi facendo in modo che la velocità apparente in corrispondenza a  $G_{N_2}$  sia tale per cui dalla [88] risulta la pendenza  $k_2$  ammessa per  $N_2$ ;

4) Ancora coll'ausilio delle squadrette tracciamo da  $N_2$  la semiretta avente l'inclinazione, rispetto alla verticale, uguale a quella della semiretta  $\lambda'_n$  per il sismografo  $G_n$  più prossimo al punto  $G_{N_2}$  aumentata

di  $90^\circ - j_2$  e quindi tracciamo, sempre col-l'aiuto della squadretta, il raggio che si di-parte dal punto del piano base intermedio fra i sismografi  $G_n$  e  $G_{n+1}$  il quale abbia in corrispondenza al punto  $I_n$  d'interse-zione colla semiretta tracciata da  $N_2$  la stessa inclinazione della semiretta  $\mu'_n$  ;

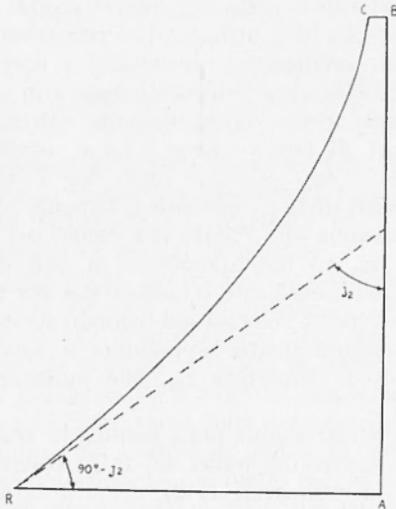


Fig. 20. - Squadretta per il tracciamento dei raggi rifratti in uno strato con velocità variabile colla profondità per un dato valore di  $\alpha$ .

5) Tracciamo da  $I_n$  la semiretta avente l'inclinazione della semiretta  $\lambda'_{n+1}$  per il sismografo  $G_{n+1}$  aumentata di  $90^\circ - j_2$  e quindi tracciamo il raggio dipartentesi dal punto del *P. B.* intermedio fra i sismo-grafi  $G_{n+1}$  e  $G_{n+2}$  il quale abbia in cor-rispondenza al punto  $I_{n+1}$  d'intersezione colla semiretta tracciata da  $I_n$  la stessa inclinazione della semiretta  $\mu'_{n+1}$ , e così di seguito: la spezzata che in tale modo si ottiene evidentemente non è altro che il profilo cercato della superficie  $\zeta_{12}$ , ammesso che siano soddisfatte le condizioni di cui abbiamo detto in 7 del par. 16 a proposito degli strati con velocità costante.

6) Per la ricostruzione del contatto  $\zeta_{23}$  fra il secondo e il terzo strato, quest'ultimo pure di velocità  $V_3$  costante, operiamo nel seguente modo, naturalmente dopo aver tracciato il profilo del contatto  $\zeta_{12}$  fra il primo e il secondo strato: *A)* determiniamo

dalle velocità apparenti le pendenze  $k$  mediante la [88] sostituendo  $V_3$  alla velocità  $V_2$ , segniamo i valori nella riga di sen  $\varphi$  del modulo di calcolo e nelle righe seguenti del-lo stesso calcoliamo i valori di  $\text{tg } \varphi'$  e di  $\text{tg}_m \varphi'$ , di cui già abbiamo detto, *B)* sul disegno della sezione tracciamo per i sismo-grafi e per i punti intermedi le semirette  $\lambda'_1, \lambda'_2, \dots$  e  $\mu'_1, \mu'_2, \dots$  rispettiva-mente di pendenze uguali ai valori di  $\text{tg}_m \varphi'$  e di  $\text{tg } \varphi'$  delle colonne corrispondenti e quindi costruiamo la squadretta avente al vertice *R* l'angolo  $j_3$  relativo alla velocità  $V_3$ , *C)* per il punto  $N_3$  di profondità nota, o supposta nota, tracciamo il raggio che inci-de sulla  $\zeta_{12}$ , in  $G'_{N_3}$ , secondo l'angolo  $j'_3$  rispetto alla normale, quale risulta dalla fig. 27 considerando le velocità  $V_2$  e  $V_3$ , e da  $G'_{N_3}$  tracciamo il raggio rifratto verso la superficie facendo coincidere il vertice *R* della squadretta con  $G'_{N_3}$  e ponendo il ca-teto *RA* tangente alla  $\zeta_{12}$  in corrispondenza allo stesso punto: sia  $G_{N_3}$  il punto d'in-contro col *P. B.*, *D)* per il punto  $N_3$  trac-ciamo la semiretta avente l'inclinazione del-la semiretta  $\lambda'_n$  per il sismografo  $G_n$  più vicino a  $G_{N_3}$  aumentata di  $90^\circ - j_3$  e per il punto del *P. B.* intermedio fra i sismo-grafi  $G_n$  e  $G_{n+1}$  tracciamo il raggio il quale formi l'angolo  $90^\circ - j_3$  colla superfie-cie  $\zeta_n$  in corrispondenza al punto d'interse-ssione  $M_n$  e da questo punto tracciamo il raggio d'inclinazione  $90^\circ - j'_3$  rispetto alla stessa  $\zeta_{12}$ : sia  $I_n$  il punto d'incontro colla semiretta tracciata per  $N_3$ ; *E)* per il punto  $I_n$  tracciamo la semiretta avente l'inclina-zione della  $\lambda'_{n+1}$  aumentata di  $90^\circ - j_3$  e per il punto del *P. B.* intermedio fra i sismo-grafi  $G_{n+1}$  e  $G_{n+2}$  tracciamo il raggio il quale formi l'angolo  $90^\circ - j_3$  colla  $\zeta_{12}$  e in corrispondenza al punto d'intersezione  $M_{n+1}$  e da questo punto tracciamo il raggio che forma l'angolo  $90^\circ - j'_3$  colla  $\zeta_{12}$  fino a incontrare in  $I_{n+1}$  la semiretta tracciata per  $I_n$ , e così di seguito.

7) Per la ricostruzione del contatto  $\zeta_{31}$  fra il terzo e il quarto strato e per quelli successivi operiamo in modo analogo, am-messo naturalmente che si tratti di strati con velocità costante.

Tale ricostruzione dei contatti  $\zeta_{23}, \zeta_{34}, \dots$ , anche se alquanto grossolana in pratica potrà ritenersi valevole per strati

con pendenze fino al  $10 \div 15$  per cento diverse e quindi può riuscire molto utile per darci un'idea del panorama tettonico delle zone di rilievo: panorama che in effetto potrà essere ricostruito colla dovuta precisione e con tutto il dettaglio soltanto applicando il metodo indiretto di cui abbiamo detto al termine del paragrafo precedente.

È da osservare che, in generale, quando la tettonica parrà molto complessa e gli andamenti delle variazioni della velocità risulteranno diversi da quelli supposti per i nostri metodi, si potrà sempre effettuare la ricostruzione tettonica degli strati colla precisione necessaria suddividendo il sottosuolo in strati di piccolo spessore con velocità costante e applicando i procedimenti che abbiamo visto per gli strati con velocità costante, ammesso naturalmente che la somma dei dati di rilievo permetta la suddivisione del terreno in strati colla necessaria precisione.

## 27. - *Prontuari di calcolo.*

Nelle [71] e [72] la  $z$  compare soltanto sotto forma del prodotto  $\mu z$  e quindi, poiché evidentemente  $dz = \frac{1}{\mu} d(\mu z)$ , dalle stesse otteniamo, colle integrazioni, delle espressioni funzioni soltanto di  $\mu z$  per i termini

$$\frac{\mu x}{\alpha} \quad \text{e} \quad \frac{\mu \tau}{\alpha} \frac{V_0}{\psi_0}$$

Data questa condizione è facile vedere che se noi in un diagramma rappresentiamo i raggi sismici mediante la [71] e le isocrone  $\mu \tau V_0 / \alpha$  mediante la [72], ove come ordinate (positive verso il basso) siano portati i valori del prodotto  $\mu z$  e come ascisse quelli del prodotto  $\mu x / \alpha$  in effetto abbiamo la possibilità di determinare i valori del tempo impiegato dai raggi per trasmettersi in un qualsiasi punto del sottosuolo e di rilevare la forma degli stessi raggi qualunque siano i valori di  $\mu$ ,  $V_0$  ed  $\alpha$  che si vorranno adottare.

Per la pratica però, invece di un tale prontuario, conviene utilizzare quelli che risultano dallo stesso per valori dei coefficienti d'anisotropia prefissati, i quali, fra gli altri

vantaggi, comportano anche quello di rappresentare i raggi colle loro pendenze reali. Questi grafici riescono di ancor maggior utilità per i calcoli pratici se in essi segniamo anche le isolinee della potenza  $(1 + \mu z)^n$ , le quali sono delle rette parallele all'asse delle ascisse: i valori di tale potenza moltiplicati per il valore adottato di  $V_0$  non sono altro che i valori della velocità  $V$  relativi alle profondità  $z$  che risultano per i corrispondenti valori del prodotto  $\mu z$ , necessari per la determinazione degli angoli limiti di rifrazione dei raggi.

È da notare che soltanto nel caso che gli strati siano isotropi,  $\alpha = 1$ , le isocrone risultano normali in ogni punto ai raggi.

Per la costruzione delle squadrette di cui abbiamo detto al paragrafo precedente si rileveranno i dati dal raggio che risulta di inclinazione uguale a  $90^\circ - j_2$  rispetto alla linea delle potenze  $(1 + \mu z)^n$  corrispondente alla velocità ammessa per la superficie  $\zeta_{12}$  da ricostruire e quindi si ridisegnerà il raggio colla scala del disegno della sezione.

Prevedendo di applicare largamente una formola con un dato valore dell'esponente  $n$  converrà predisporre una serie di grafici relativi a valori diversi del coefficiente d'anisotropia  $\alpha$ , per esempio di 1,00, 1,05, 1,10, 1,15, 1,20 e 1,25, in modo che in ogni caso si abbia pronto il grafico corrispondente a un valore di  $\alpha$  abbastanza approssimato al reale, come già abbiamo consigliato per il reticolo di tracciamento dei raggi della figura 15.

Per il calcolo delle pendenze  $k$  mediante la [88], la quale si può considerare come funzione delle variabili  $\nu$ ,  $\alpha$ ,  $V_2/V_0$ ,  $W/V_2$ ,  $x$  e  $k$ , i prontuari da predisporre evidentemente non possono che riuscire complessi.

Noi proponiamo di operare nel modo che qui di seguito descriviamo.

Prima di tutto esprimiamo le ascisse  $x$  della [88] in funzione delle distanze  $q$  misurate sulla superficie del suolo ponendo

$$\mu k y = \mu \frac{k}{\sqrt{1 + k^2}} q ; \quad [90]$$

naturalmente l'origine delle  $q$ , come quella delle  $x$ , sarà coincidente col punto della superficie del suolo cui corrisponde la velocità

uguale alla  $V_0$ . Quindi poniamo la [88] sotto la forma

$$\Gamma \left( \frac{V_2}{V_0} \right)^2 = \Delta, \quad [91]$$

ove

$$\Gamma = \frac{1}{\left( 1 + \frac{k}{\sqrt{1+k^2}} \mu \varrho \right)^{2\nu}}, \quad [92]$$

$$\Delta = \left[ \frac{1 - \frac{V_2}{W} \sqrt{1+k^2}}{ak} \right]^2 + 1. \quad [93]$$

Per il calcolo del fattore  $\Gamma$  approntiamo un diagramma delle isolinee dei valori dello stesso fattore  $\Gamma$ , secondo un passo adeguato alla precisione desiderata, in funzione dei valori di  $\mu \varrho$  portati come ascisse e dei valori delle pendenze  $k$  portati come ordinate: un diagramma diverso per ogni formola delle velocità [68] con diverso esponente  $\nu$ .

Per il calcolo del termine  $\Delta$  costruiamo il diagramma ugualmente semplice delle isolinee di  $\Delta$  stesso in funzione dei valori di  $W/V_2$  portati come ascisse e dei valori di  $k$  portati come ordinate: un grafico per ognuno dei valori del coefficiente d'anisotropia  $a$  di cui più sopra abbiamo detto (di 1,00, 1,05, ..... 1,25).

Disponendo di tali grafici possiamo determinare i valori di  $k$  che soddisfano la [88] ponendo accanto quelli delle due specie che corrispondono alla formola ammessa per la velocità e ricercando, con una squadrata posta parallela all'asse delle ascisse, le ordinate innalzate dalle ascisse corrispondenti ai dati valori di  $\mu \varrho$  e  $W/V_2$  per le quali risultano dei valori di  $\Delta$  che sono uguali a quelli di  $\Gamma$  moltiplicati per la costante  $(V_2/V_0)^2$ .

Tale sistema non è consigliabile per i calcoli sistematici d'elaborazione dei risultati dei rilievi; esso torna utilissimo però per predisporre i prontuari da servire nei casi particolari corrispondenti a determinati valori delle costanti  $\nu$ ,  $V_0$ ,  $\mu$  ed  $a$  e della velocità  $V_2$ : prontuari grafici del solito nostro tipo, per esempio in forma di diagrammi delle isolinee dei valori di  $W$  ove come ascisse siano portati i valori di  $\varrho$  e come ordinate quelli di  $k$ .

Nelle figure 21 e 22 riportiamo i grafici da noi approntati per il calcolo di  $\Delta$  corrispondenti ai valori del coefficiente d'anisotropia di  $a = 1,00$  e  $a = 1,20$ .

Nei capitoli che seguono, ove sono considerate diverse formole della velocità, riportiamo i prontuari di calcolo del termine  $\Gamma$  valevoli per i diversi valori dell'esponente  $\nu$ .

## STRATI ANISOTROPI CON VELOCITÀ VARIABILE LINEARMENTE COLLA PROFONDITÀ

### 28. - Formole di calcolo.

Ammettiamo ora che la velocità di trasmissione del suolo varii linearmente colla profondità, secondo la formola che si ricava dalla [68] ponendo  $\nu = 1$ ,

$$V = V_0 (1 + mz), \quad [94]$$

essendo in questo caso indicato con  $m$  il coefficiente di variazione.

Dalla [71] allora otteniamo l'equazione dei raggi sismici

$$x = \frac{a}{m} \left[ \sqrt{\psi_0^2 - 1} \pm \sqrt{\psi_0^2 - (1 + mz)^2} \right], \quad [95]$$

equazione di una famiglia di ellissi aventi i centri nei punti di coordinate

$$x_c = \frac{a^2}{m \operatorname{tg} \theta_0} = \frac{a}{m} \sqrt{\psi_0^2 - 1}, \quad z_c = -\frac{1}{m}, \quad [96]$$

cogli assi maggiore  $a\psi_0/m$  e minore  $\psi_0/m$  e coi fuochi nei punti di coordinate

$$x_f = x_c \pm \frac{\psi_0}{m} \sqrt{a^2 - 1}, \quad z_f = z_c. \quad [97]$$

Dalla [72] otteniamo l'equazione dei tempi dei raggi

$$\tau = \frac{a}{2mV_0} \left[ \log \frac{\psi_0 + \sqrt{\psi_0^2 - 1}}{\psi_0 - \sqrt{\psi_0^2 - 1}} - \log \frac{\psi_0 + \sqrt{\psi_0^2 - (1 + mz)^2}}{\psi_0 - \sqrt{\psi_0^2 - (1 + mz)^2}} \right]. \quad [98]$$

VALORI DELLA FUNZIONE  $\Delta$

$\alpha = 1$

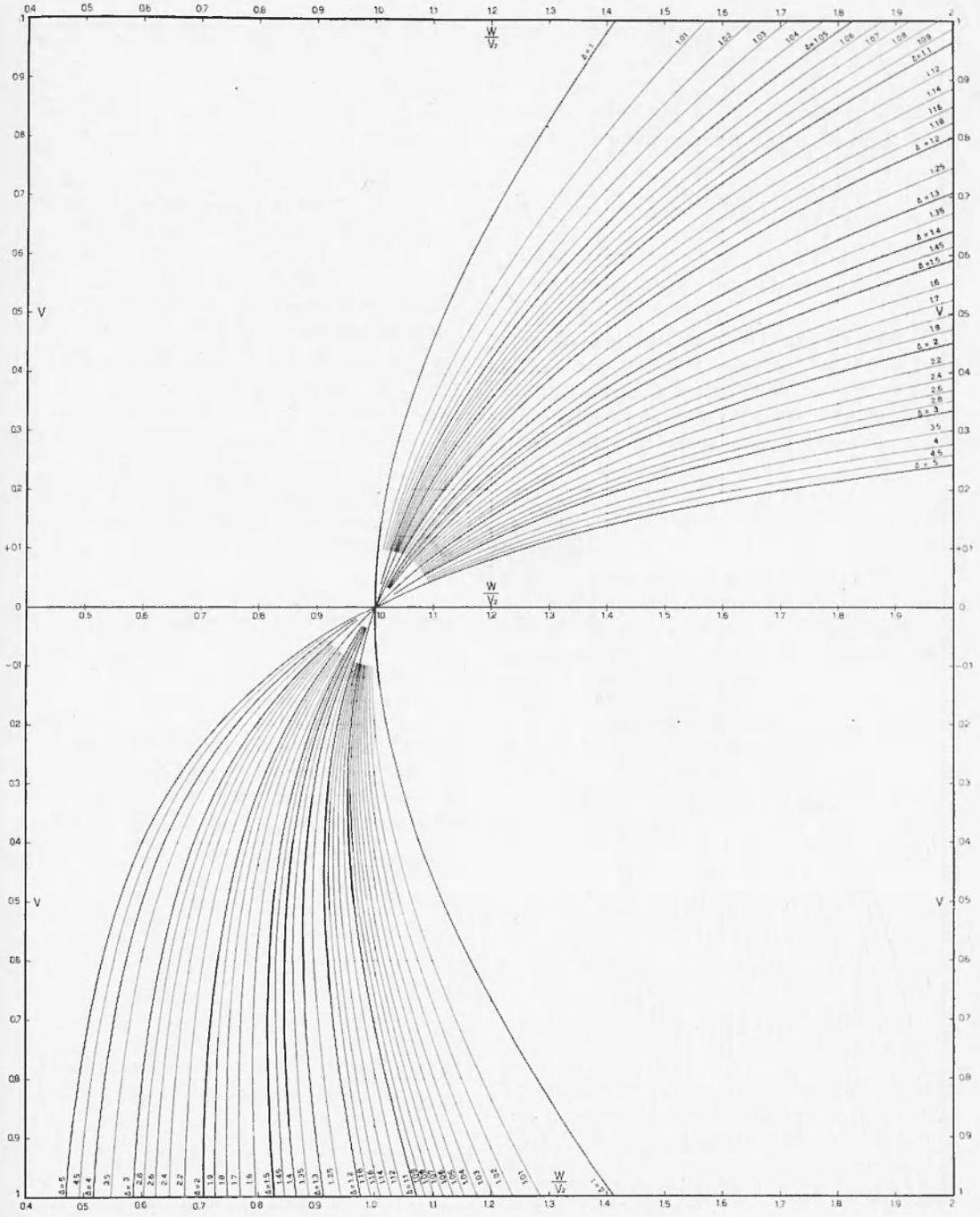


Fig. 21. - Prontuario per il calcolo del termine  $\Delta$  secondo la [93], noti i valori del rapporto  $W/V_2$  e della pendenza  $k$ , per  $\alpha = 1,00$ .

VALORI DELLA FUNZIONE Δ

$\alpha = 1.20$

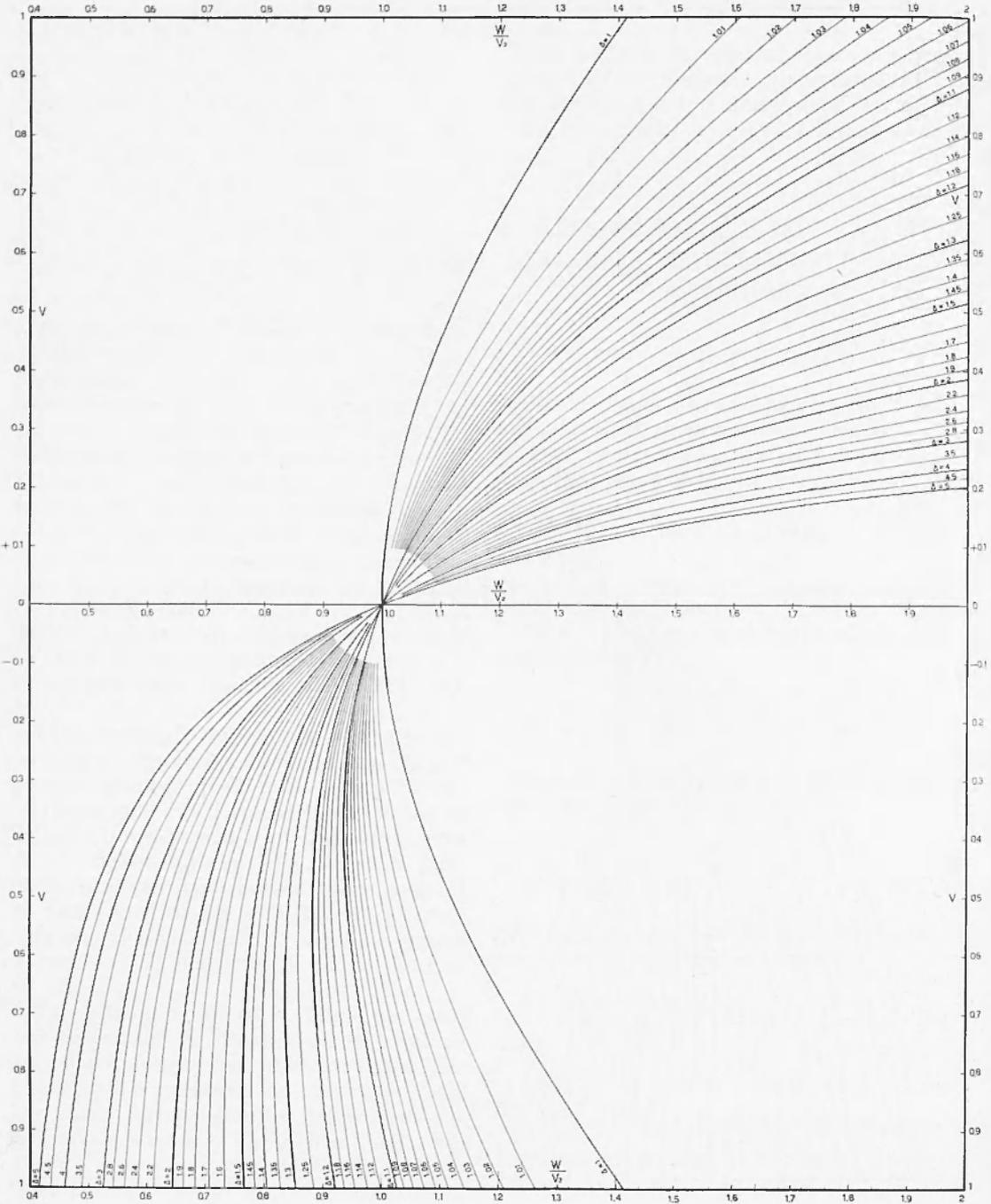


Fig. 22. - Prontuario per il calcolo del termine  $\Delta$  secondo la [93], noti i valori del rapporto  $W/V_2$  e della pendenza  $k$ , per  $\alpha = 1,20$ .

Dalla equazione dei raggi sismici [95] otteniamo per  $\psi_0$  l'espressione

$$\psi_0^2 = 1 + \left[ \frac{\left(\frac{m x}{a}\right)^2 + (1 + m z)^2 - 1}{2 \frac{m x}{a}} \right]^2 \quad [99]$$

la quale, sostituita nella [98], rende questa dipendente soltanto dalle coordinate  $x$  e  $z$  dei punti del sottosuolo raggiunti dai raggi sismici.

Otteniamo l'equazione della dromocrona relativa all'asse  $X$  ponendo la condizione  $\text{tg} \theta = \infty$  nella [98], la quale per le [69] e [95] può essere posta sotto la forma

$$\psi_0^2 = (1 + m z)^2 = 1 + \left(\frac{m x_c}{a}\right)^2, \quad [100]$$

e ponendo nella stessa [98]  $x_c = x/2$  e  $2\tau = T$ , ove siano indicati con  $T$  i tempi relativi alla superficie del suolo (colla traccia coincidente coll'asse  $X$ )

$$T = \frac{a}{m V_0} \log \frac{\sqrt{1 + \left(\frac{m x}{2 a}\right)^2} + \frac{m x}{2 a}}{\sqrt{1 + \left(\frac{m x}{2 a}\right)^2} - \frac{m x}{2 a}} \quad [101]$$

Se nella [98] esprimiamo il primo termine in funzione di  $\text{tg} \theta_0$  e il secondo in funzione della pendenza  $\text{tg} \theta$  dei raggi nel punto generico di coordinate  $x$  e  $z$  otteniamo senza difficoltà

$$\tau = \frac{a}{2 m V_0} \left[ \log \frac{\sqrt{a^2 + \text{tg}^2 \theta_0} + a}{\sqrt{a^2 + \text{tg}^2 \theta_0} - a} - \log \frac{\sqrt{a^2 + \text{tg}^2 \theta} + a}{\sqrt{a^2 + \text{tg}^2 \theta} - a} \right] \quad [102]$$

Operando nello stesso modo otteniamo per i raggi sismici l'equazione, dalla [95],

$$x = \frac{a^2}{m \text{tg} \theta_0} \left[ 1 \pm \sqrt{\frac{a^2 + \text{tg}^2 \theta_0}{a^2 + \text{tg}^2 \theta}} \right] \quad [103]$$

Quando il suolo fosse isotropo e quindi fosse  $a = 1$  i raggi sismici assumono la forma di archi circolari aventi i centri sulla retta parallela alla superficie del suolo posta

sopra questa all'altezza  $1/m$  e l'equazione dei tempi diviene

$$\tau = \frac{1}{m V_0} \left( \log \text{tg} \frac{\theta}{2} - \log \text{tg} \frac{\theta_0}{2} \right) \quad [104]$$

Sulla verticale dello scoppio  $S$  i tempi sono dati evidentemente, per la [80], dalla

$$\tau = \frac{a}{m V_0} \log (1 + m z) \quad [105]$$

29. - *Calcolo delle costanti.*

Nota la dromocrona relativa all'asse  $X$  di uno strato con velocità variabile colla profondità secondo la [94] possiamo determinare la velocità  $V_0$  ed il rapporto  $m/a$  ponendo, per la [75] e la [100], poichè  $x_c = x/2$ ,

$$W = V_0 \sqrt{1 + \left(\frac{m}{2 a}\right)^2 x^2} \quad [106]$$

Da questa, noti i valori di  $W_1, W_2, \dots$  delle velocità apparenti corrispondenti alle distanze  $x_1, x_2, \dots, x_i$  della dromocrona abbiamo mediamente, quando i dati sono del medesimo peso,

$$\left(\frac{m}{2 a}\right)^2 = \frac{1}{i-1} \left[ \frac{W_2^2 - W_1^2}{W_1^2 x_1^2 - W_2^2 x_1^2} + \dots \dots + \frac{W_i^2 - W_{i-1}^2}{W_{i-1}^2 x_i^2 - W_i^2 x_{i-1}^2} \right], \quad [107]$$

$$V_0^2 = \frac{1}{i} \left[ \frac{W_1^2}{1 + \left(\frac{m}{2 a}\right)^2 x_1^2} + \dots \dots + \frac{W_i^2}{1 + \left(\frac{m}{2 a}\right)^2 x_i^2} \right]$$

Quando le dromocrone fossero ottenute con scoppi a profondità diverse  $z_1, z_2, \dots, z_i$  e le velocità apparenti minime delle stesse dromocrone  $W_1, W_2, \dots, W_i$  capitassero alle distanze  $x_1, x_2, \dots, x_i$ , poichè per la [78] e la [95] è

$$W = V_0 (1 + m z) = V_0 \sqrt{1 + \left(\frac{m x}{a}\right)^2} \quad [108]$$

risulta, sempre per dati della medesima attendibilità,

$$\begin{aligned}
 m &= \frac{1}{i-1} \left[ \frac{W_2 - W_1}{W_1 z_2 - W_2 z_1} + \dots \right. \\
 &\quad \left. \dots + \frac{W_i - W_{i-1}}{W_{i-1} z_i - W_i z_{i-1}} \right] \\
 V_o &= \frac{1}{i} \left[ \frac{W_1}{1 + m z_1} + \dots \right. \\
 &\quad \left. \dots + \frac{W_i}{1 + m z_i} \right] \\
 a^2 &= \frac{1}{i} \left[ \frac{x_1^2}{z_1^2 + \frac{2}{m} z_1} + \dots \right. \\
 &\quad \left. \dots + \frac{x_i^2}{z_i + \frac{2}{m} z_i} \right].
 \end{aligned} \quad [109]$$

Disponendo di una dromoscrona relativa ad una verticale, ottenuta scoppiando in un pozzo a diverse profondità con un sismografo alla testa o viceversa scoppiando alla testa con sismografi a diverse profondità nel pozzo otteniamo, per la [82], indicando con  $W_1, W_2, \dots, W_i$  le velocità apparenti della dromocrona in corrispondenza alle profondità  $z_1, z_2, \dots, z_i$ ,

$$\begin{aligned}
 m &= \frac{1}{i-1} \left[ \frac{W_2 - W_1}{W_1 z_2 - W_2 z_1} + \dots \right. \\
 &\quad \left. \dots + \frac{W_i - W_{i-1}}{W_{i-1} z_i - W_i z_{i-1}} \right] \\
 \frac{V_o}{a} &= \frac{1}{i} \left[ \frac{W_1}{1 + m z_1} + \dots \right. \\
 &\quad \left. \dots + \frac{W_i}{1 + m z_i} \right].
 \end{aligned} \quad [110]$$

Naturalmente se, scoppiando nel pozzo, si rilevano i tempi alla superficie secondo profili radiali risultano applicabili anche la [109] per le dromocrona relative agli stessi profili.

### 30. - Interpretazione tettonica.

Per l'interpretazione dei dati di rilievo servono i principi generali di cui abbiamo detto ampiamente ai paragrafi 25, 26 e 27. Ora quindi ci limitiamo a predisporre i mezzi di calcolo che risultano necessari in relazione

alla particolare legge della velocità [94] ammessa.

Dalla [95] risulta, se assumiamo come variabili le grandezze  $mx/a$  (ascisse) e  $mz$  (ordinate), la forma per i raggi degli archi di cerchio sventi i centri di coordinate

$$\left( \frac{mx}{a} \right)_c = \sqrt{\psi_o^2 - 1} \quad , \quad (mz)_c = -1 \quad ,$$

di raggio  $R_r = \psi_o$  ,

essendo  $\psi_o$  dato dalla [99].

Dalla [98] abbiamo, con facili trasformazioni e semplificazioni,

$$\begin{aligned}
 E(1 + mz) (\psi_o - \sqrt{\psi_o^2 - 1}) &= \\
 = \psi_o - \sqrt{\psi_o^2 - (1 + mz)^2} \quad ,
 \end{aligned}$$

ove

$$E = e \frac{m \tau}{a} V_o$$

Da tale equazione otteniamo, sostituendo al termine radicale l'espressione che risulta dalla [95], ricavando l'espressione di  $\psi_o$  e uguagliando a quella data dalla [96],

$$\left( \frac{mx}{a} \right)^2 + (1 + mz)^2 - \frac{E^2 + 1}{E} (1 + mz) + 1 = 0 \quad . \quad [111]$$

Questa, se consideriamo come variabili le grandezze  $mx/a$  (ascisse) e  $mz$  (ordinate) risulta l'equazione di una famiglia di cerchi aventi i centri sull'asse delle ordinate alle distanze dall'origine di

$$(mz)_i = \frac{E^2 + 1}{2E} - 1 \quad [112]$$

coi raggi

$$R_i = \sqrt{\left( \frac{E^2 + 1}{2E} \right)^2 - 1} \quad [113]$$

Se invece consideriamo come variabili le grandezze  $mx$  (ascisse) ed  $mz$  (ordinate) risulta l'equazione di una famiglia di ellissi aventi i centri sull'asse delle ordinate alle stesse distanze  $(mz)_i$  date dalla [112] dall'origine  $S$ , cogli assi maggiori uguali ad  $R_i$  e coi fuochi nei punti di coordinate

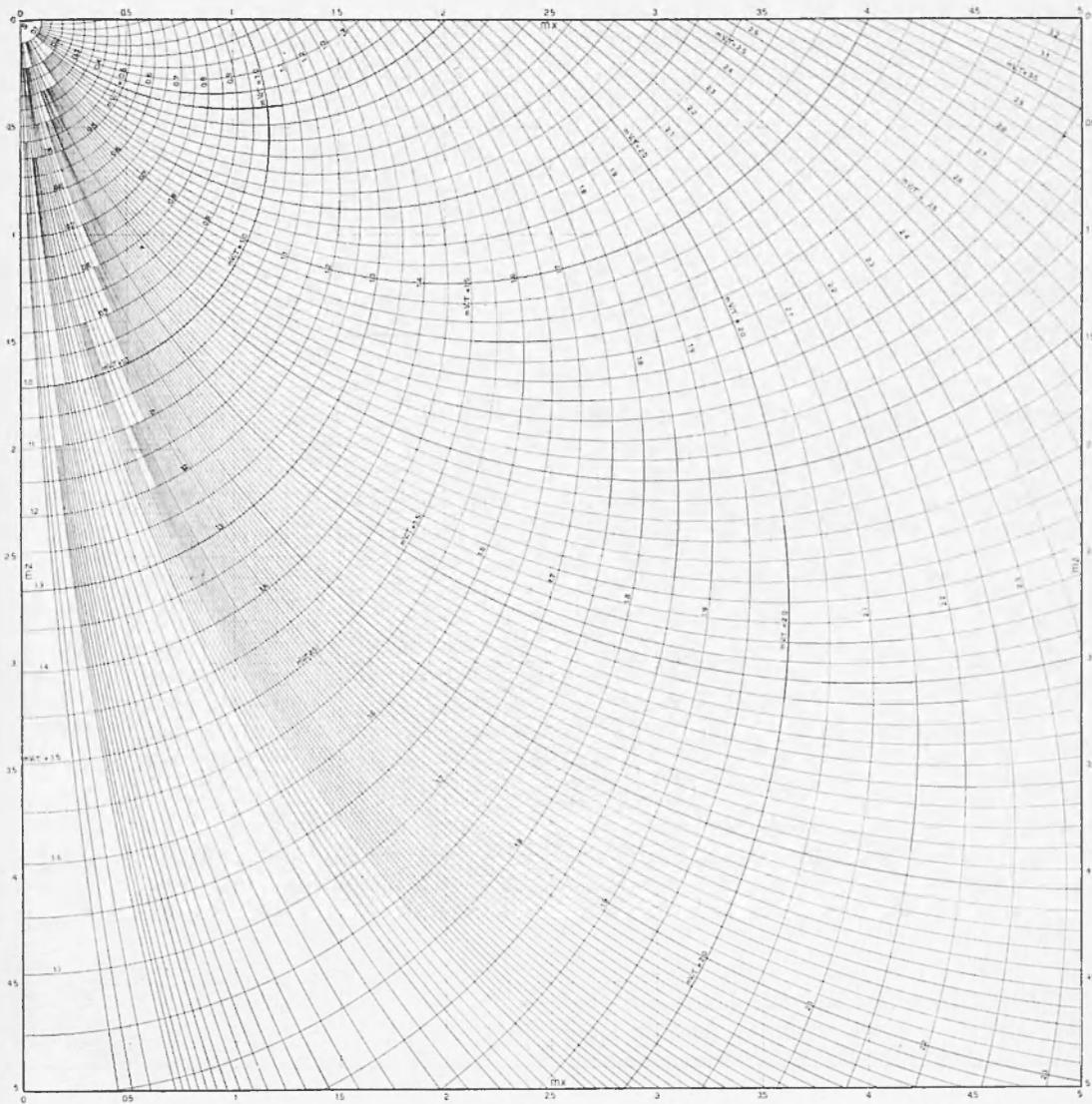
$$(mx)_i = \pm R_i \sqrt{a^2 - 1} \quad , \quad (mz)_i = (mz)_i \quad . \quad [114]$$

Per la costruzione dei diagrammi dei raggi sismici e delle isocrone possiamo in pratica costruire quelli ad elementi di cerchio che

RAGGI SISMICI E ISOCHRONE

$\alpha = 100$

$V = V_0(1 + mz)$



AGIP MINERARIA

S. DONATO - SETTEMBRE 1958

Fig. 23. - Diagramma dei raggi sismici e delle isocrone per  $V = V_0(1 + mz)$  e per  $a = 1,00$ .

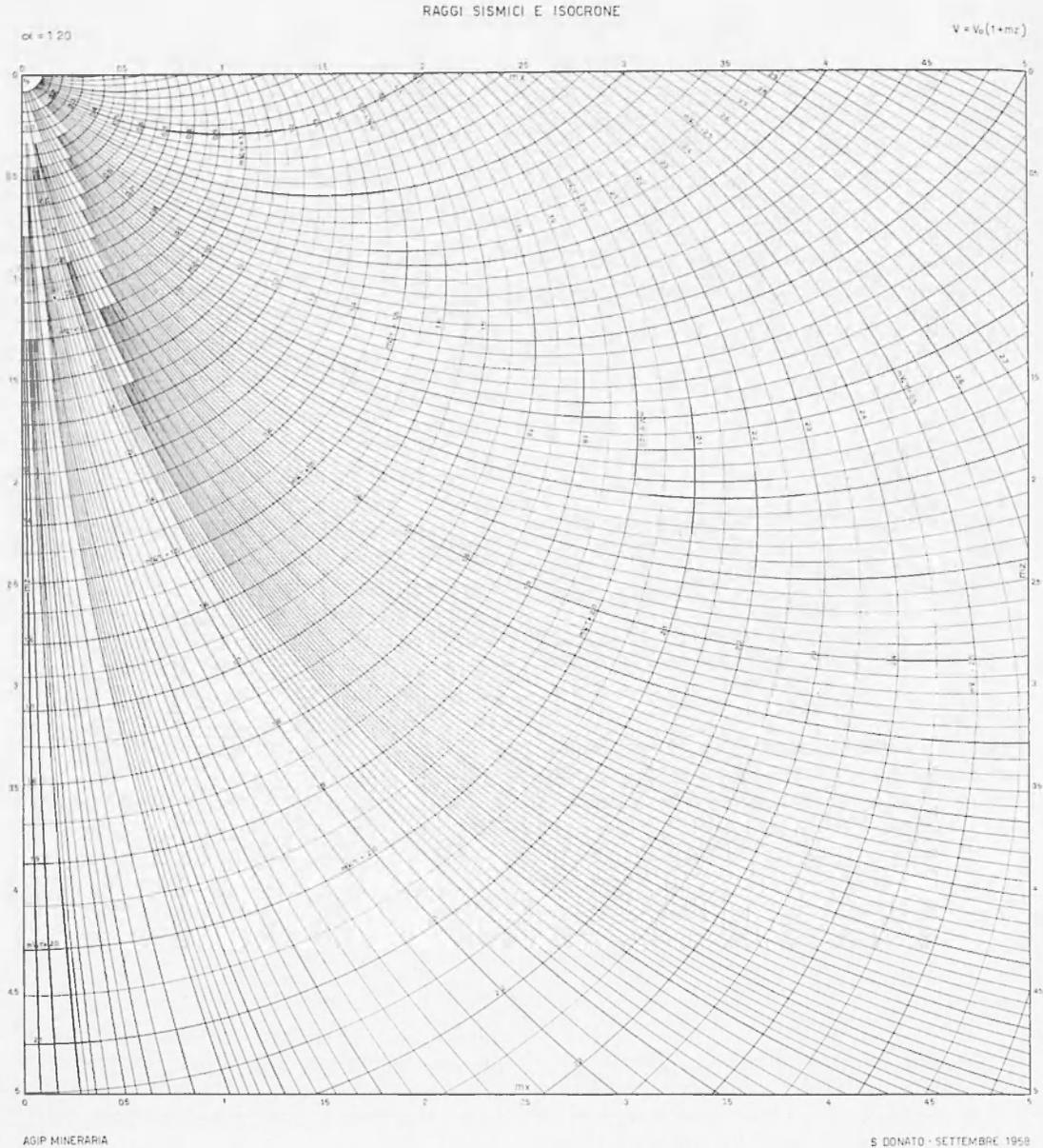


Fig. 24. - Diagramma dei raggi sismici e delle isoerone per  $V = V_0(1 + mz)$  e per  $a = 1,20$ .

risultano adottando come ascisse i valori di  $mx/a$  e quindi ricavare gli elementi per la costruzione dei grafici relativi ai diversi coefficienti d'anisotropia: evidentemente [per  $a = 1$  valgono gli stessi diagrammi base ad archi di cerchio.

Nelle figure 23 e 24 riportiamo i diagrammi relativi rispettivamente ai valori del coefficiente d'anisotropia di 1,00 e 1,20 alla scala di 1 cm  $\equiv$  0,1 unità di  $mx$  per le ascisse e di 1 cm  $\equiv$  0,1 unità di  $mz$  per le ordinate.

Nella fig. 25 riportiamo infine il grafico-prontuario di calcolo del fattore  $F$  secondo la [92] per l'esponente  $\nu = 1$ , nel modo che abbiamo detto al par. 27, naturalmente colle ordinate  $k$  alla stessa scala adottata per i prontuari di calcolo del termine  $\Delta$  delle figure 21 e 22.

### STRATI ANISOTROPI CON VELOCITÀ VARIABILE COLLA RADICE QUADRATA DELLA PROFONDITÀ

#### 31. - Formole di calcolo.

Consideriamo ora il caso che la velocità di trasmissione delle onde sismiche del suolo vari in ragione della radice quadrata della profondità, secondo la formola che si ricava dalla [68] ponendo  $\nu = 1/2$ ,

$$V = V_0 \sqrt{1 + nz}, \quad [115]$$

essendo  $n$  il coefficiente di variazione.

Dalla [71] otteniamo allora l'equazione dei raggi sismici

$$x = \frac{\alpha}{n} \left[ \sqrt{\psi_0^2 - 1} - \frac{V_0^2}{\psi^2} \sqrt{\psi^2 - 1} + \psi_0^2 \left( \arcsen \frac{1}{\psi} - \arcsen \frac{1}{\psi_0} \right) \right]. \quad [116]$$

Dalla [72] otteniamo l'equazione dei tempi di trasmissione degli impulsi

$$\tau = 2 \frac{\alpha}{n V_0} \psi_0 \left( \arcsen \frac{1}{\psi} - \arcsen \frac{1}{\psi_0} \right). \quad [117]$$

Dall'equazione [116] non è possibile ricavare in forma esplicita la  $\psi_0$ , in funzione delle coordinate  $x$  e  $z$ , come abbiamo fatto

colla [99], data la presenza dell'elemento arcoseno che non sappiamo esprimere in forma algebrica mediante le stesse coordinate. Di conseguenza non risulta possibile, in questo caso, ricavare l'equazione delle dromocrone relative all'asse  $X$ , analoga alla [101].

Eliminando l'elemento arco fra le [116] e [117] otteniamo l'equazione

$$\frac{nx}{\alpha} = \sqrt{\psi_0^2 - 1} - \frac{\psi_0^2}{\psi^2} \sqrt{\psi^2 - 1} + \frac{V_0}{2} \psi_0 \frac{n\tau}{\alpha}. \quad [118]$$

Da questa ricaviamo l'equazione della curva dromocrona, ponendo la condizione  $tg \theta = \infty$  ossia  $\psi = 1$  e sostituendo  $x/2$  ad  $x$ ,

$$T = \frac{\alpha}{n V_0} \frac{\frac{nx}{\alpha} - 2 \sqrt{\psi_0^2 - 1}}{\psi_0}, \quad [119]$$

funzione delle coordinate  $x$  e  $z$  e dell'angolo  $\theta_0$  secondo cui i raggi si staccano dall'origine dei sismi.

Da tale equazione ricaviamo in forma esplicita la  $\psi_0$

$$\psi_0 = \frac{\frac{nx}{\alpha} \frac{nTV}{\alpha} \pm 2 \sqrt{\left(\frac{nx}{\alpha}\right)^2 - \left(\frac{nTV}{\alpha}\right)^2 + 4}}{\left(\frac{nTV}{\alpha}\right)^2 - 4}. \quad [120]$$

Sulla verticale dello scoppio  $S$  i tempi sono dati, per la [80], dalla

$$\tau = 2 \frac{\alpha}{n V_0} \left( \sqrt{1 - nz} - 1 \right). \quad [121]$$

In un suolo isotropo, per cui  $a = 1$ , i raggi sismici assumono la forma della cicloide generata dal circolo di raggio

$$R = \frac{1}{2n \sin^2 \theta_0} = \frac{\psi_0^2}{2n}$$

il quale rotoli sulla retta di equazione  $z = -\frac{1}{n}$  colla velocità costante di

$$\frac{d\theta}{d\tau} = \frac{\sin \theta_0}{2} = \frac{1}{2\psi_0}.$$

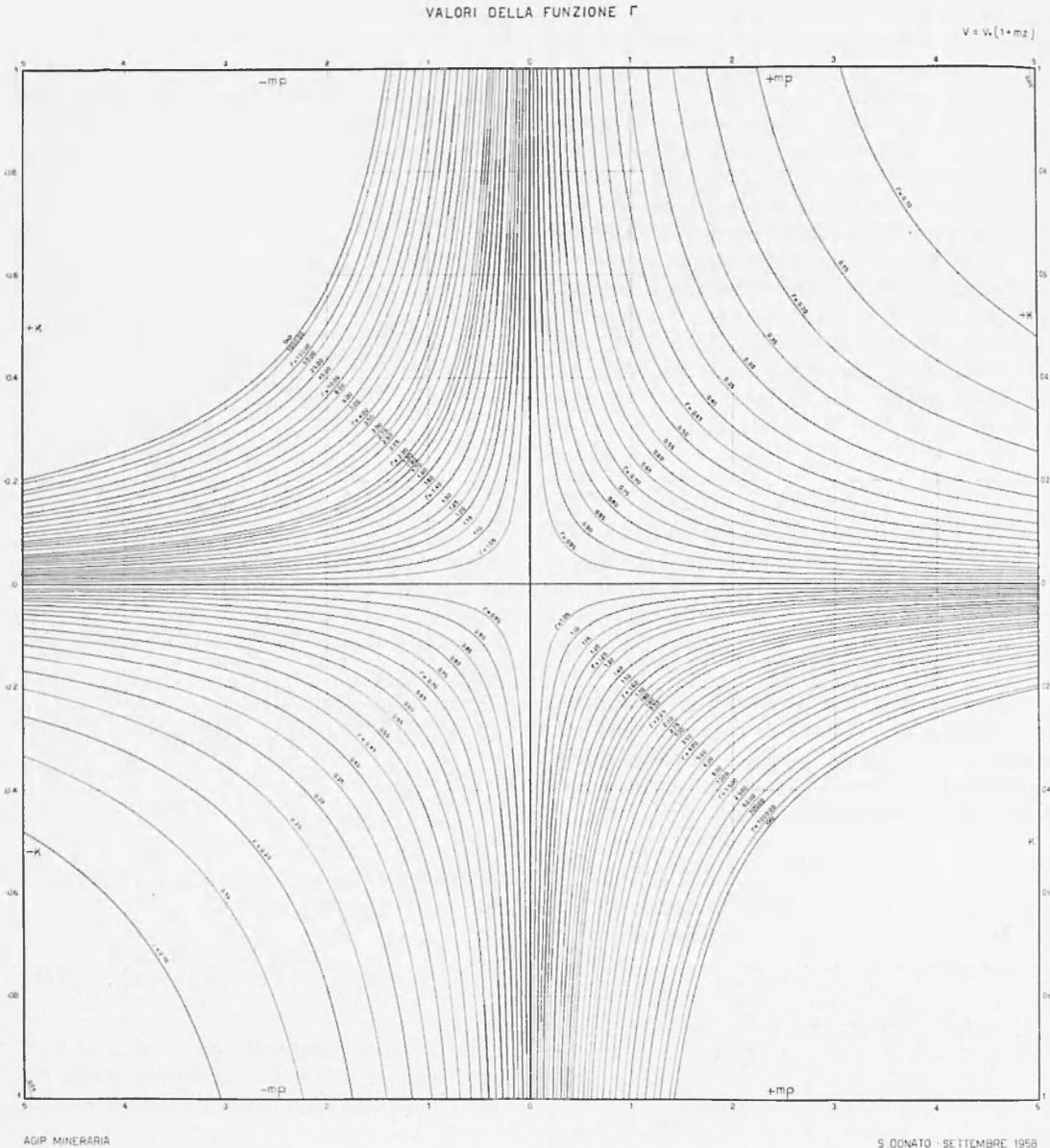


Fig. 25. - Prontuario per il calcolo del fattore  $\Gamma$  secondo la [92] noti i valori del prodotto  $mz$  e della pendenza  $k$  per  $V = V_0(1 + mz)$ .

Abbiamo infatti dalle [116] e [117] per  $a = 1$  e quindi  $\psi_0 = 1/\text{sen } \theta_0$ ,  $\psi = 1/\text{sen } \theta$ ,

$$x = \frac{1}{2} \frac{\text{sen } 2\theta_0 - \text{sen } 2\theta + 2(\theta - \theta_0)}{\text{sen}^2 \theta_0}$$

$$\tau = 2 \frac{\theta - \theta_0}{nV_n \text{sen } \theta_0} \quad [122]$$

32. - *Calcolo delle costanti.*

Nota la curva dromocrona relativa all'asse  $X$  possiamo determinare la velocità  $V_0$  e il rapporto fra i coefficienti di variazione e di anisotropia, ammesso che per il terreno in esame valga la legge [115], ponendo per la [119]

$$V_0^2 = \frac{1}{i-1} \left[ \frac{W_1^2 D_2^2 - W_2^2 D_1^2}{D_2^2 - D_1^2} + \dots \right. \\ \left. \dots + \frac{W_{i-1}^2 D_i^2 - W_i^2 D_{i-1}^2}{D_i^2 - D_{i-1}^2} \right],$$

$$\frac{n}{a} = \frac{2}{V_0 i} \left[ \frac{\sqrt{W_1^2 - V_0^2}}{D_1} + \dots \right. \\ \left. \dots + \frac{\sqrt{W_i^2 - V_0^2}}{D_i} \right], \quad [123]$$

ove

$D_1 = x_1 - W_1 T_1, \dots, D_i = x_i - W_i T_i$ ;  $W_1, W_2, \dots, W_i$  e  $T_1, T_2, \dots, T_i$  rispettivamente le velocità apparenti e i tempi corrispondenti alle distanze  $x_1, x_2, \dots, x_i$  della dromocrona.

Se abbiamo note le dromocrone relative a scoppi di diversa profondità nel suolo applicando la [78] otteniamo le formole analoghe alle [109]

$$n = \frac{1}{i-1} \left[ \frac{W_2^2 - W_1^2}{W_1^2 z_0 - W_2^2 z_1} + \dots \right. \\ \left. \dots + \frac{W_i^2 - W_{i-1}^2}{W_{i-1}^2 z_i - W_i^2 z_{i-1}} \right],$$

$$V_0^2 = \frac{1}{i} \left[ \frac{W_1^2}{1 + n z_1} + \dots \right. \\ \left. \dots + \frac{W_i^2}{1 + n z_i} \right], \quad [124]$$

$$a = \frac{1}{2i} \left[ \frac{2x_1 - T_1 V_1}{\sqrt{z_1}} + \dots \right. \\ \left. \dots + \frac{2x_i - T_i V_i}{\sqrt{z_i}} \right],$$

essendo in questo caso  $T_1, T_2, \dots, T_i$  e  $x_1, x_2, \dots, x_i$  rispettivamente i tempi e le distanze corrispondenti alle velocità apparenti minime delle dromocrone relative alle profondità  $z_1, z_2, \dots, z_i$  degli scoppi e, inoltre,  $V_1, V_2, \dots, V_i$  le velocità corrispondenti alle stesse profondità secondo la [115]; l'espressione di  $a$  è ottenuta dalla [118] esprimendo  $\psi_0$  in funzione di  $\psi$  secondo la [75] e ponendo  $\psi = 1$ .

Quando si disponesse di una dromocrona relativa a un pozzo risultano le formole, usando le stesse convenzioni precisate per le [110],

$$n = \frac{1}{i-1} \left[ \frac{W_2^2 - W_1^2}{W_1^2 z_2 - W_2^2 z_1} + \dots \right. \\ \left. \dots + \frac{W_i^2 - W_{i-1}^2}{W_{i-1}^2 z_i - W_i^2 z_{i-1}} \right], \quad [125]$$

$$\frac{V_0}{a} = \frac{1}{i} \left[ \frac{W_1}{|1 + n z_1|} + \dots \right. \\ \left. \dots + \frac{W_i}{|1 + n z_i|} \right].$$

33. - *Interpretazione tettonica.*

Analogamente a quanto abbiamo fatto al par. 30 ora costruiamo il diagramma dei raggi, delle isoerne e delle isotache in funzione di  $nx/a, nz$  ed  $n\tau/a$ .

Per la costruzione dei raggi può servire la [116], ove a  $\psi$  si sostituisca l'espressione in  $\psi_0$  e in  $nz$  che risulta dalle [75], calcolando i valori di  $nx/a$  che risultano per i raggi corrispondenti ai diversi valori di  $\psi_0$  al variare dei valori di  $nz$ , e per la costruzione delle isoerne può servire la [118], facendo la stessa sostituzione e calcolando i valori di  $nx/a$  e di  $nz$  che risultano per i raggi corrispondenti agli stessi valori di  $\psi_0$  e per valori prefissati di  $n\tau/a$ . Per la costruzione delle isotache serve evidentemente la [115].

Costruito tale diagramma possiamo facilmente avere i dati per la costruzione di quelli relativi ai diversi valori di  $a$  che in pratica interessano. Nella fig. 26 noi riportiamo il diagramma relativo ad  $a = 1$ , esattamente uguale a quello base, e nella fig. 27 riportiamo il diagramma relativo ad  $a = 1,20$ .

Nella fig. 28 infine riportiamo il grafico-prontuario di calcolo del fattore  $\Gamma$  analogo a quello della fig. 25 per l'esponente  $\nu = 1/2$ .

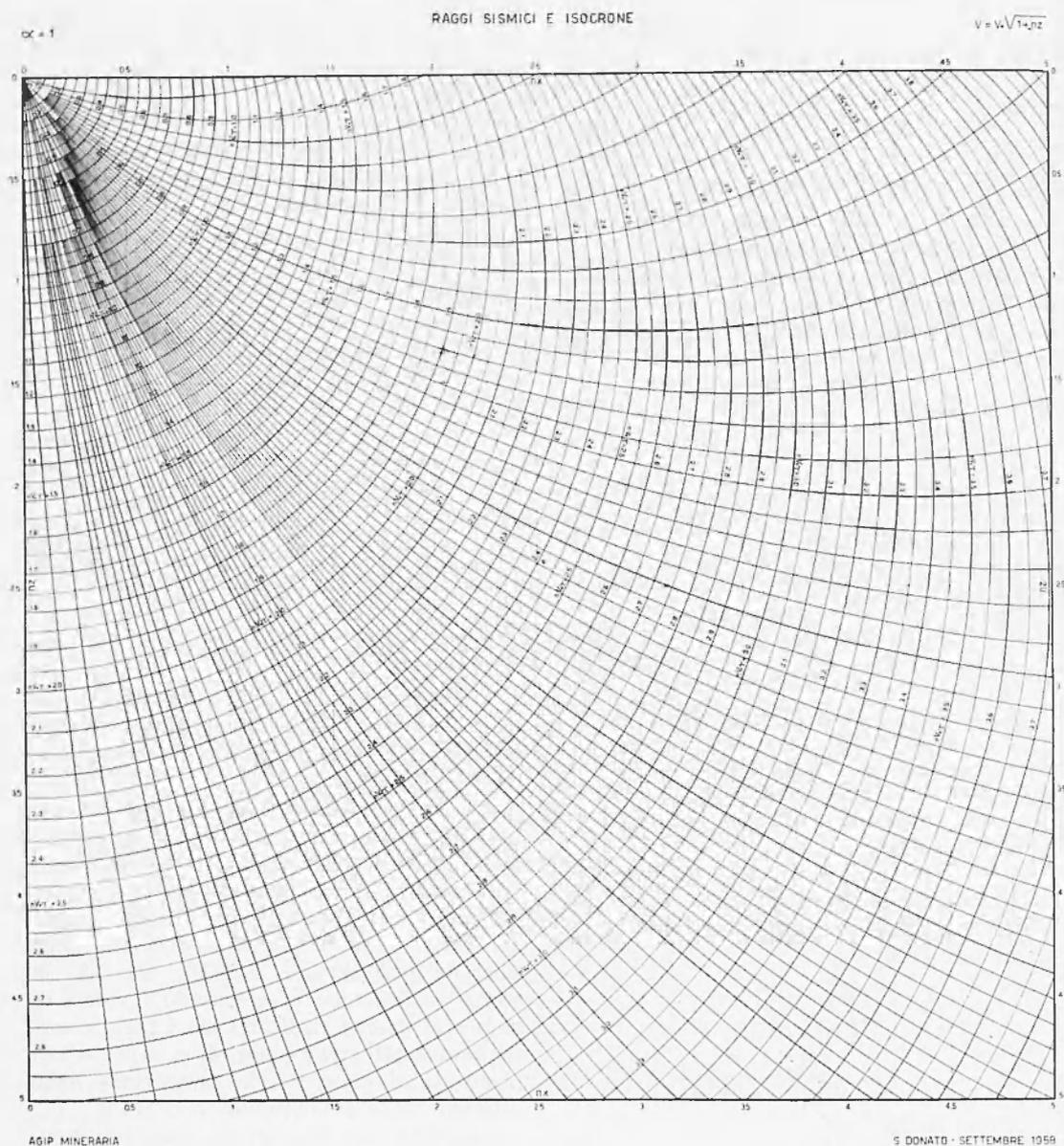
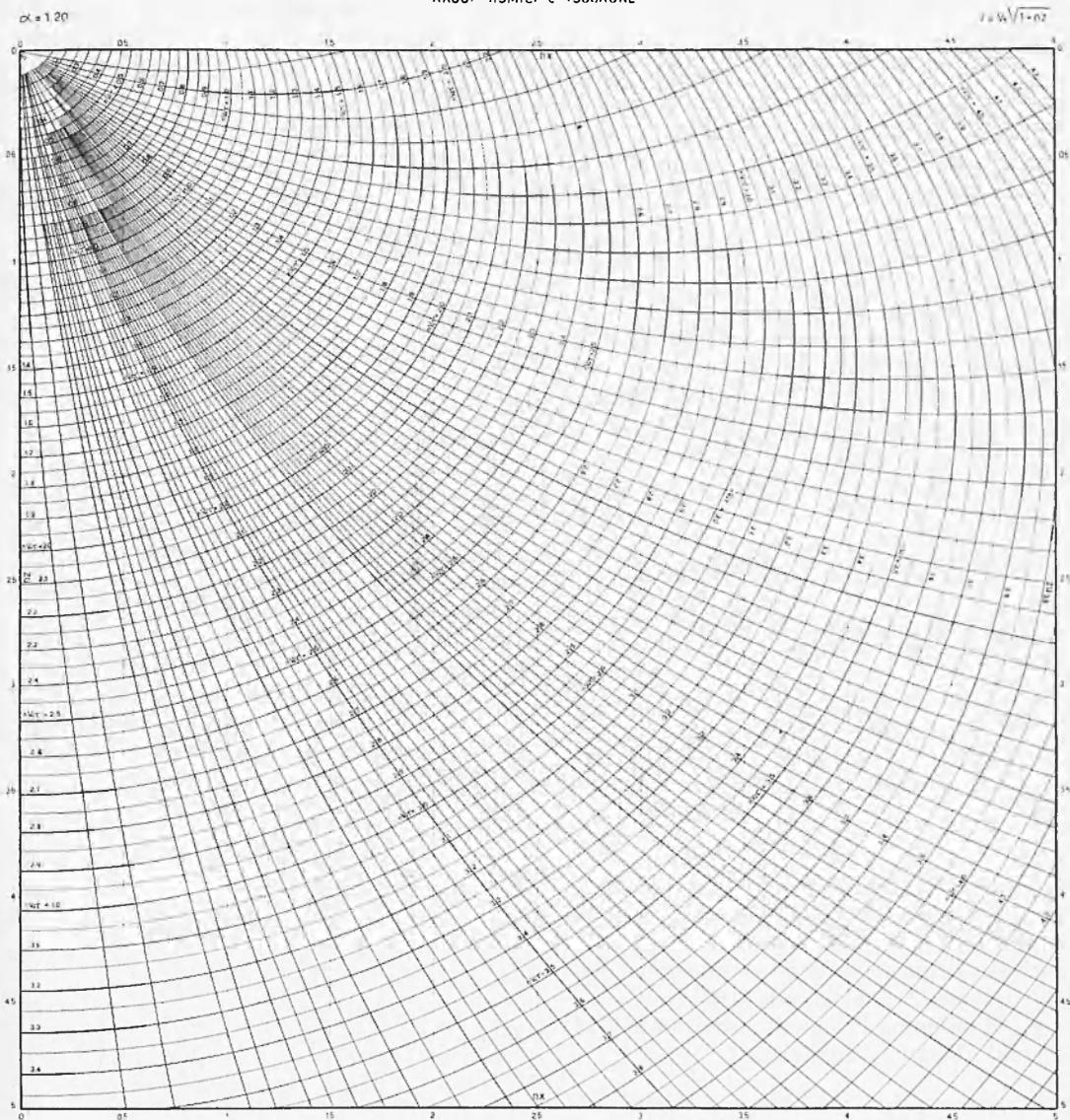


Fig. 26. - Diagramma dei raggi sismici e delle isocrone per  $V = V_0 \sqrt{1 + nz}$  ed  $\alpha = 1,00$ .

RAGGI SISMICI E ISOCRONE



AGIP MINERARIA

S. DONATO SETTEMBRE 1958

Fig. 27. - Diagramma dei raggi sismici e delle isocrone per  $V = V^0 \sqrt{1 + nz}$  ed  $\alpha = 1,20$ .

STRATI ANISOTROPI CON VELOCITÀ  
VARIABILE COLLA RADICE QUAR-  
TA DELLA PROFONDITÀ

34. - *Formole di calcolo.*

Consideriamo infine il caso che la velocità di trasmissione delle onde sismiche del suolo varii colla radice quarta della profondità secondo la formola che risulta dalla [68] per  $\nu = 1/4$ .

$$V = V_0 \sqrt[4]{1 + qz} \tag{126}$$

ove  $q$  coefficiente di variazione.

Dalle [73] otteniamo l'equazione dei raggi sismici, analoga alla [118],

$$x = \frac{3}{2} \frac{\alpha}{q} \left[ \left( \frac{2}{3} + \psi_0^2 \right) \sqrt[4]{\psi_0^2 - 1} - \frac{\psi_0^4}{\psi^4} \left( \frac{2}{3} + \psi^2 \right) \sqrt[4]{\psi^2 - 1} + \psi^4 \left( \arccos \frac{1}{\psi} - \arccos \frac{1}{\psi_0} \right) \right] \tag{127}$$

Dalla [72] otteniamo l'equazione dei tempi di trasmissione degli impulsi

$$\tau = 2 \frac{\alpha}{qV_0} \sqrt[4]{\psi_0^2 - 1} - \frac{\psi_0^2}{\psi^2} \sqrt[4]{\psi^2 - 1} + \psi^2 \left( \arccos \frac{1}{\psi} - \arccos \frac{1}{\psi_0} \right) \tag{128}$$

Neanche in questo caso, evidentemente, abbiamo la possibilità di ricavare in forma esplicita la  $\psi_0$  dall'equazione dei raggi e di scrivere l'equazione delle dromocrone relative all'asse  $X$  analoga alla [101].

Se eliminiamo l'elemento arco fra le [127] e [128] abbiamo l'equazione

$$\frac{qx}{\alpha} = \sqrt[4]{\psi_0^2 - 1} - \frac{\psi_0^4}{\psi^4} \sqrt[4]{\psi^2 - 1} + \frac{3}{4} V_0 \psi_0 \frac{q\tau}{\alpha} \tag{129}$$

Da questa ricaviamo l'equazione della curva dromocrone relativa all'asse  $X$

$$T = \frac{2}{3} \frac{\alpha}{qV_0} \frac{qx}{\alpha} - 2 \frac{\sqrt[4]{\psi_0^2 - 1}}{\psi_0} \tag{130}$$

come si vede uguale alla [119] a meno del fattore costante  $2/3$ .

L'espressione di  $\psi_0$  che risulta da tale equazione evidentemente sarà uguale alla [120] quando si sostituisca a  $T$  il termine  $3T/2$ .

Sulla verticale dello scoppio i tempi si possono calcolare, per la [80], mediante la

$$\tau = \frac{4}{3} \frac{\alpha}{qV_0} \left[ \sqrt[4]{(1 + qz)^3 - 1} \right] \tag{134}$$

Per un suolo isotropo, con  $\alpha = 1$ , non si hanno sensibili semplificazioni delle equazioni dei raggi [127] e dei tempi [128].

35. - *Calcolo delle costanti.*

Nota la curva dromocrone relativa all'asse  $X$  determiniamo la velocità  $V_0$  e il rapporto fra i coefficienti di variazione e di anisotropia, ammessa valida la legge [126], applicando le stesse formole [123] trovate per la legge [115] della velocità, sostituendo a  $T_1, T_2, \dots, T_i$  i prodotti  $3T_{1/2}, 3T_{2/2}, \dots, 3T_{i/2}$ , rispettivamente.

Note le dromocrone relative a scoppi di diversa profondità determiniamo i valori di  $q, V_0$  ed  $\alpha$  applicando le formole

$$q = \frac{1}{i-1} \left[ \frac{W_2^4 - W_1^4}{W_1^4 z_2 - W_2^4 z_1} + \dots + \frac{W_i^4 - W_{i-1}^4}{W_{i-1}^4 z_i - W_i^4 z_{i-1}} \right] \tag{132}$$

$$V_0^2 = \frac{1}{i} \left[ \frac{W_1^4}{1 + qz_1} + \dots + \frac{W_i^4}{1 + qz_i} \right]$$

$$\alpha = \frac{q}{4i} V_0 \left[ \frac{4x_1 - 3T_1 V_1}{\sqrt{V_1^2 - V_0^2}} + \dots + \frac{4x_i - 3T_i V_i}{\sqrt{V_i^2 - V_0^2}} \right]$$

che si ricavano nello stesso modo che abbiamo spiegato per le [124].

Disponendo di una dromocrone relativa a un pozzo, risultano le formole, se adotta-

VALORI DELLA FUNZIONE  $\Gamma$

$$V = W\sqrt{1+nz}$$

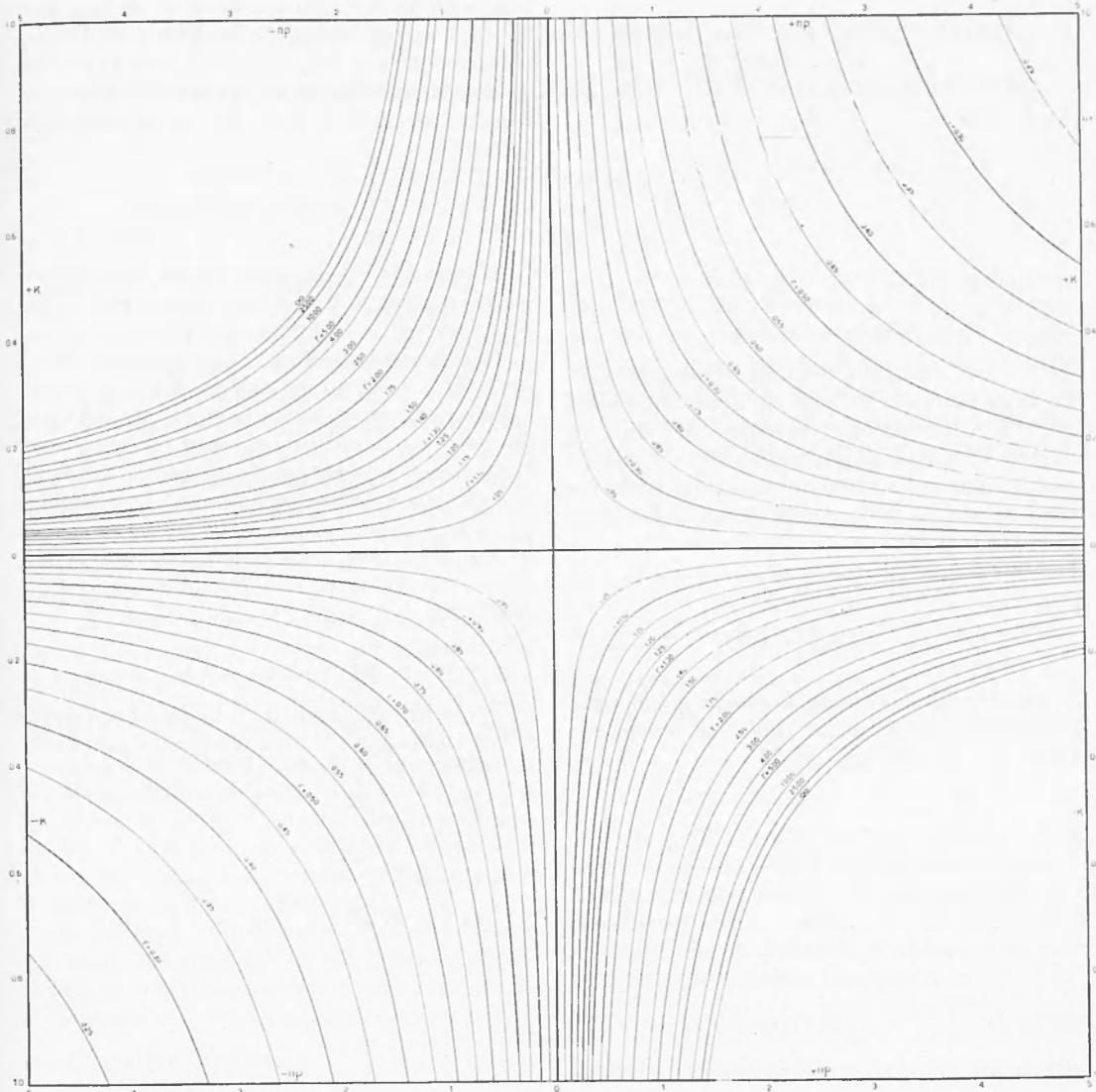


Fig. 28. - Prontuario di calcolo del fattore  $\Gamma$  secondo la (97) noti i valori del prodotto  $np$  e della pendenza  $k$  per  $V = V_0 \sqrt{1 + nz}$ .

mo le stesse convenzioni precisate per la [110],

$$q = \frac{1}{i-1} \left[ \frac{W_2^4 - W_1^4}{W_1^4 z_2 - W_2^4 z_1} + \dots \right. \\ \left. \dots + \frac{W_i^4 - W_{i-1}^4}{W_{i-1}^4 z_i - W_i^4 z_{i-1}} \right] \\ \frac{V_o}{a} = \frac{1}{i} \left[ \frac{W_1}{\sqrt[4]{1 + q z_1}} + \dots \right. \\ \left. \dots + \frac{W_i}{\sqrt[4]{1 + q z_i}} \right]. \quad [133]$$

### 36. - Interpretazione tettonica.

Per la costruzione del diagramma dei raggi, delle isocrone e delle isotache necessarie per l'interpretazione tettonica dei dati di rilievo operiamo esattamente come indicato per il caso della velocità variabile colla radice quadrata della profondità, utilizzando le [127] e [129].

### RIASSUNTO

Questa è la continuazione della monografia pubblicata sotto lo stesso titolo nel primo numero del volume, pp. 15-54.

In questa seconda parte viene preso in esame il caso generale di un sottosuolo anisotropo avente una velocità di trasmissione delle onde sismiche con la profondità; sono inoltre riportate notevoli formule e schemi di calcolo per tre casi speciali in cui la velocità è variabile, linearmente con la profondità, con la radice quadrata e con la radice quarta della stessa per i valori di 1,00 e 1,20 dei coefficienti anisotropi.

### ABSTRACT

This is the continuation of the monograph which appeared under the same title in the first issue of the volume, pp. 15-54.

In this second section the general case of an anisotropic subsoil having a velocity of transmission of seismic waves variable according to the depth is examined; relevant formulae and reckoning schemes are also given for three special cases where the velocity is variable, linearly with the depth, with the square root of the depth and with the fourth root of the depth, for the anisotropic coefficients of 1,00 and 1,20.

### BIBLIOGRAFIA

CONTINI, C., Il calcolo delle superfici riflettenti nei rilievi sismici a riflessione, « Annali di Geofisica », 5, 77-95, (1952).