

SUL GRADIENTE ADIABATICO DI TEMPERATURA NELL'INTERNO DELLA TERRA

PAOLO EMILIO VALLE

1. — Il gradiente adiabatico di temperatura nell'interno della Terra ha una notevole importanza in molte questioni di carattere geofisico. Esso è espresso dalla nota relazione termodinamica

$$\left(\frac{\partial T}{\partial p}\right)_s = \frac{T\alpha}{\rho c_p} \quad [1]$$

nella quale T è la temperatura assoluta, α la dilatazione termica, ρ la densità, c_p il calore specifico a pressione costante ed S l'entropia.

Se si ammette l'equilibrio idrostatico e si indica con h la profondità e con g l'accelerazione di gravità, risulta

$$dp = \rho g dh$$

e la [1] può essere scritta nella forma

$$\left(\frac{\partial T}{\partial h}\right)_s = \frac{T\alpha g}{c_p} \quad [2]$$

o anche

$$d \log T = \frac{\alpha g}{c_p} dh \quad [3]$$

Fino a qualche anno fa, il rapporto α/c_p veniva dedotto da misure di laboratorio eseguite su varie rocce ignee. Nel mantello della Terra il suo valore medio era ritenuto pari a circa 1.510^{-12} g erg⁻¹.

Recentemente J. Verhoogen ⁽¹⁾ ha proposto un nuovo metodo per la valutazione del suddetto rapporto, allo scopo di eliminare l'inconveniente dell'estrapolazione dei valori ottenuti in laboratorio, alle alte pressioni esistenti nel mantello della Terra.

Il suo procedimento richiede però alcune semplificazioni, le quali appaiono alquanto arbitrarie. In questa nota viene indicato un metodo per il calcolo del rapporto α/c_p , basato sulla teoria di un solido ideale, nell'ipotesi che la temperatura assoluta sia un poco superiore alla temperatura di Debye relativa alle onde longitudinali. Si am-

mette poi la reversibilità dei processi termodinamici, ciò che del resto è già implicito [1].

Viene effettuato il calcolo del rapporto α/c_p e l'integrazione della [3] per il mantello.

L'aumento di temperatura per compressione adiabatica nel nucleo, viene valutato soltanto nello strato E , mediante l'estensione del metodo sopra accennato.

2. — È noto (²⁻³⁻⁴) che un solido, il quale, in seguito ad una dilatazione o compressione isotropa ed omogenea, assuma il volume V , reagisce alla pressione esterna p con due tipi di pressioni interne: l'uno dovuto agli sforzi statici, l'altro all'agitazione termica. Mentre la valutazione del primo tipo di pressione interna è piuttosto difficile e richiede una dettagliata conoscenza della struttura del solido, la valutazione del secondo tipo di pressione interna è relativamente semplice.

Gli atomi di un solido non possono muoversi liberamente, ma oscillano intorno a determinate posizioni di equilibrio, facendo nascere onde elastiche completamente diffuse.

L'agitazione termica può essere associata a queste onde, la cui lunghezza però non può essere inferiore al doppio della distanza tra due particelle. Ne consegue che lo spettro delle frequenze è limitato superiormente.

Se si indicano con l'indice l le grandezze che si riferiscono alle onde longitudinali e con l'indice t le grandezze che si riferiscono alle onde trasversali, la frequenza massima è data da

$$v_m = v_m \left(\frac{3N}{4\pi V} \right)^{\frac{1}{3}} \quad (m = l, t)$$

nella quale v_m è la velocità, supposta indipendente dalla frequenza, ed N il numero di atomi contenuti nel volume V , che nel seguito verrà assunto come volume specifico.

La pressione dovuta all'agitazione termica, coincide con la pressione di radiazione dei due tipi di onde, e può scriversi (²)

$$P_m = \frac{U_m}{V} \left(\frac{1}{3} - \frac{\partial \log v_m}{\partial \log V} \right) \quad (m = l, t) \quad [4]$$

U_m rappresenta l'energia media di oscillazione.

L'equazione di stato di un solido ideale, il quale sia sottoposto soltanto a variazioni isotrope ed omogenee di volume, è quindi della forma

$$p = f(V) + \sum_m P_m \quad (m = l, t, t)$$

La pressione di radiazione delle onde trasversali deve essere contata due volte in relazione alle due possibili direzioni di vibrazione di queste onde.

Posto

$$p_i = \sum_m p_m \quad (m = l, t, t) \quad [5]$$

si ottiene facilmente dalla [4]

$$p_i = \rho U_l \left(\frac{1}{3} + \frac{\partial \log v_l}{\partial \log \rho} \right) + 2 \rho U_t \left(\frac{1}{3} + \frac{\partial \log v_t}{\partial \log \rho} \right) \quad [6]$$

Le energie medie di oscillazione U_l ed U_t sono pari all'energia complessiva di N oscillatori, considerati come indipendenti, la cui frequenza non può superare v_l e v_t rispettivamente.

Ad una certa temperatura U_l ed U_t saranno in generale differenti. Si supponga che la temperatura sia alquanto superiore alla temperatura di Debye relativa alle onde longitudinali, essa sarà superiore anche alla temperatura di Debye relativa alle onde trasversali, dato che queste ultime posseggono una velocità minore delle prime. In questo caso è facile vedere (2-3-4) che l'energia media di oscillazione dei due tipi di onde, tende ad assumere il comune valore classico $N k T$, dove k è la costante di Boltzmann, e quindi si potrà scrivere

$$U_l = U_t = U$$

e l'energia media totale sarà pari a $3 U$, poiché l'energia media delle onde trasversali deve essere contata due volte.

La pressione interna di radiazione assume allora la forma

$$p_i = \rho U \frac{\partial \log (\rho v_l v_t^2)}{\partial \log \rho} \quad [6']$$

Si indichino ora con x_r e x_s rispettivamente la compressibilità isoterma ed adiabatica, con c_v il calore specifico a volume costante, da note relazioni di termodinamica, si ha

$$\left(\frac{\partial p}{\partial T} \right)_v = \frac{\alpha}{x_r}$$

$$\frac{x_r}{x_s} = \frac{c_p}{c_v}$$

ossia

$$\frac{\alpha}{c_p} = \left(\frac{\partial p_i}{\partial T} \right)_v \frac{x_s}{x_v} \quad [7]$$

nella quale

$$c_v = 3 \left(\frac{\partial U}{\partial T} \right)_v \quad [8]$$

Tenendo conto della [6'] e della [8] si ottiene dalla [7]

$$\frac{\alpha}{c_p} = \rho x_s \frac{\partial \log (\rho v_1 v_t^2)^{1/3}}{\partial \log \rho} \quad [9]$$

ricordando poi che

$$\rho x_s = \frac{1}{v_t^2 - \frac{4}{3} v_l^2} \quad [10]$$

risulta in definitiva

$$\frac{\alpha}{c_v} = \frac{1}{v_t^2 - \frac{4}{3} v_l^2} \frac{\partial \log (\rho v_1 v_t^2)^{1/3}}{\partial \log \rho} \quad [11]$$

È questa una relazione che consente il calcolo del rapporto α/c_p , mediante la conoscenza della velocità delle onde longitudinali e trasversali e della densità, indipendentemente dalla composizione chimica del solido. Pertanto questa relazione si presenta particolarmente adatta per il calcolo di α/c_p nel mantello della Terra.

Il gradiente adiabatico si ottiene sostituendo la [11] nella [3] e si ha

$$d \log T = \frac{g}{v_t^2 - \frac{4}{3} v_l^2} \frac{\partial \log (\rho v_1 v_t^2)^{1/3}}{\partial \log \rho} dh \quad [12]$$

Si consideri infine uno strato di materiale omogeneo, nel quale la variazione della densità sia dovuta alla sola compressione adiabatica. Si avrà allora

$$x_s \rho g = \frac{1}{\rho} \left(\frac{\partial \rho}{\partial h} \right)_s$$

e quindi dalla [12], tenuto conto della [10], risulta

$$\frac{T^3}{\rho v_1 v_t^2} = \text{costante} \quad [13]$$

come si era già ottenuto in un precedente lavoro ⁽⁵⁾ per altra via.

Questa equazione può essere applicata agli strati nei quali l'andamento della densità è stato calcolato supponendo l'equilibrio adiabatico e una costituzione omogenea.

3. — La temperatura di Debye relativa alle onde longitudinali alla profondità di 33 km è presumibilmente alquanto inferiore a 1000° K, mentre in prossimità del nucleo vale circa 2000° K. Queste temperature non sembrano essere eccessivamente elevate e si può quindi ritenere che l'ipotesi sotto la quale è stata dedotta la [II] sia verificata.

Per la valutazione del rapporto α/c_p , occorre conoscere la velocità di propagazione delle onde longitudinali e trasversali in funzione della densità. Ora la conoscenza dei dati sismici, della massa, della densità media e del momento di inerzia, non è sufficiente a determinare univocamente l'andamento della densità nell'interno della Terra.

Pertanto il calcolo di tale andamento è stato eseguito sotto varie ipotesi ed è stata calcolata più di una distribuzione della densità.

In base ai valori della velocità delle onde sismiche calcolati da H. Jeffreys (⁶⁻⁷), K. E. Bullen (⁸), allo scopo di eliminare l'indeterminazione del problema, considera due casi: i) che la densità vari in modo continuo attraverso tutto il nucleo centrale, e cioè nelle regioni E, F e G, ii) che la densità al centro della Terra sia più grande di 10 gm⁻³ che nel caso i). Le due ipotesi conducono ad una distribuzione

TABELLA I

<i>h</i> km	v_1 km sec ⁻¹	v_2 km sec ⁻¹	ρ g cm ⁻³	$p \cdot 10^{-12}$ dine cm ⁻²	g cm sec ⁻²	$\rho^{1/3} (\rho v_1 v_2^2)^{1/3}$
33	7,75	4,35	3,32	0,009	985	11,7359
100	7,95	4,15	3,38	0,031	989	12,1611
200	8,26	4,60	3,47	0,065	992	12,8150
300	8,58	4,76	3,55	0,100	995	13,4809
413	8,97	4,96	3,64	0,141	998	14,2994
500	9,56	5,28	3,89	0,173	1000	15,9174
600	10,25	5,66	4,13	0,213	1001	17,7590
800	11,00	6,13	4,49	0,300	999	20,2738
1000	11,42	6,36	4,68	0,392	995	21,6283
1200	11,71	6,50	4,80	0,49	991	22,5055
1400	11,99	6,62	4,91	0,58	988	23,3112
1600	12,26	6,73	5,03	0,68	986	24,1296
1800	12,53	6,83	5,13	0,78	985	24,8699
2000	12,79	6,93	5,24	0,88	986	25,6448
2200	13,03	7,02	5,34	0,99	990	26,3572
2400	13,27	7,12	5,44	1,09	998	27,1024
2600	13,50	7,21	5,54	1,20	1009	27,8232
2800	13,64	7,30	5,63	1,32	1026	28,4550
2898	13,64	7,30	5,68	1,37	1037	28,6232

della densità lievemente diversa nel mantello, mentre nel nucleo si ha un divario più accentuato. Successivamente W. H. Ramsey ⁽⁹⁾ e lo stesso Bullen ⁽¹⁰⁾ hanno studiato nuove distribuzioni della densità, basate su altre ipotesi.

D'altra parte anche l'andamento della velocità delle onde sismiche nell'interno della Terra è stato ricalcolato da B. Gutenberg ⁽¹¹⁾, partendo da nuovi dati sperimentali, e i suoi risultati differiscono in modo abbastanza sensibile dai valori precedentemente calcolati da Jeffreys.

L'Autore della presente ricerca si è servito delle velocità calcolate da Jeffreys e, per quanto riguarda il mantello, delle densità calcolate da Bullen in un lavoro precedente alla formulazione delle ipotesi i) e ii) ⁽¹²⁾. I valori delle densità usate sono intermedi fra quelli delle

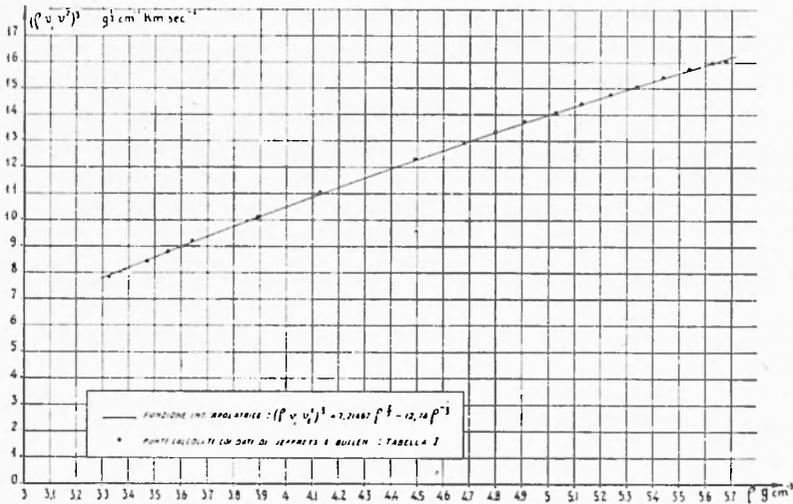


Fig. 1

due ipotesi e ne differiscono soltanto per qualche unità percentuale. Per quanto riguarda il nucleo sono stati considerati separatamente i due casi sopraccennati.

Dal lavoro di Bullen sono stati tolti altresì i valori della gravità e della pressione, i quali peraltro sono stati accuratamente calcolati anche da G. Boaga ⁽¹³⁻¹⁴⁾, che ne ha inoltre fornito le espressioni analitiche in funzione della profondità. I dati relativi al mantello sono contenuti nella tabella I e i dati che si riferiscono al nucleo nella tabella IV.

4. — Nella valutazione del rapporto α/c_p , l'operazione più delicata

è costituita dal calcolo della derivata che compare a secondo membro della [11]

Si è notato che se si moltiplica per $\rho^{1/3}$ l'espressione $(\rho v_1 v_2)^{1/3}$ si ottiene una funzione lineare nella ρ . Pertanto si può scrivere

$$\rho^{1/3}(\rho v_1 v_2)^{1/3} = a + b \rho \quad [14]$$

Eccettuato il valore della funzione in prossimità del nucleo, l'espressione a secondo membro della precedente relazione rappresenta molto bene i valori del primo membro, calcolati con i dati della tabella I. Mediante il metodo dei minimi quadrati è stato calcolato il valore delle costanti a e b , e si è ottenuto

$$a = -12,14000 \quad ; \quad b = 7,21467$$

e quindi la [14] si può scrivere

$$(\rho v_1 v_2)^{1/3} = 7,21467 \rho^{2/3} - 12,14 \rho^{-1/3} \quad [15]$$

Gli scarti ϵ , tra i valori calcolati mediante la [15] e i valori calcolati dai dati della tabella I, sono contenuti nella tabella II.

TABELLA II

ρ	ϵ	ρ	ϵ
3,32	-0,0768	4,80	+0,0151
3,38	-0,0845	4,91	+0,0272
3,47	-0,0799	5,03	-0,0202
3,55	+0,0088	5,13	-0,0014
3,64	+0,1780	5,24	-0,0201
3,89	-0,0077	5,34	-0,0291
4,13	+0,1024	5,44	-0,0054
4,49	+0,0199	5,54	-0,0061
4,68	+0,0036	5,63	-0,0236

Lo scarto più elevato si trova in corrispondenza di $\rho = 4,64$, cioè alla profondità di 413 km, proprio in corrispondenza della discontinuità del secondo ordine. Tale scarto non è però tanto elevato da introdurre seri errori nel calcolo del rapporto a/c_p .

La forma della [15] non sembra essere del tutto fortuita, almeno per quanto riguarda il primo termine a secondo membro. Da essa infatti si ricava

$$(v_1 v_2)^{1/3} = 7,21467 \rho^{1/3} - 12,14 \rho^{-2/3} \quad [16]$$

Se si pensasse ora di estrapolare aumentando la densità fino a valori per i quali il secondo termine a secondo membro della [16] diventi trascurabile di fronte al primo, tenuto conto che la velocità delle onde

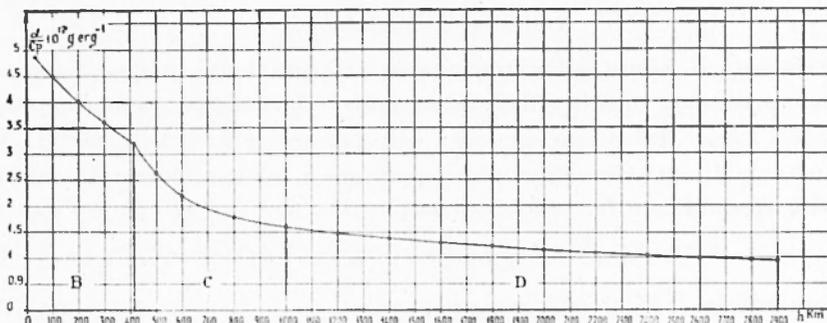


Fig. 2

trasversali sta in un rapporto press'a poco costante con la velocità delle onde longitudinali, si otterrebbe

$$v_1 = \text{cost } \varrho^{1/3} \quad [17]$$

Ora ad altissime densità corrispondono altissime pressioni, alle quali è lecito supporre che gli elettroni degli atomi si comportino quasi come un gas di Fermi (15).

Se questo punto di vista è giusto, la [17] deve avere la stessa forma dell'equazione che fornisce la velocità delle onde longitudinali in un gas di elettroni. Effettivamente, tenuto conto che per un gas di Fermi, a temperature non altissime, vale l'equazione di stato

$$p = \text{cost } \varrho^{5/3}$$

si ottiene

$$v_1 = \text{cost } \varrho^{1/3}$$

che coincide formalmente con la [17]

Ulteriori considerazioni su questo argomento uscirebbero dai limiti del presente lavoro.

TABELLA III

h km	$\frac{\partial \log (ov_1 v_t^2)^{1/3}}{\partial \log \varrho}$	$\frac{\alpha}{c_p} 10^{12}$ g erg ⁻¹	$\frac{T}{T_{33}}$
33	1,694	4,86	1
100	1,658	4,50	—
200	1,608	4,02	1,07 ₀
300	1,568	3,61	—
413	1,526	3,20	1,16 ₁
500	1,429	2,63 ₅	—
600	1,354	2,17	1,21 ₀
800	1,266	1,78 ₅	—
1000	1,228	1,60	1,31 ₁
1200	1,206 ₅	1,49	—
1400	1,188	1,39	1,39 ₁
1600	1,169	1,30	—
1800	1,155	1,22	1,46 ₁
2000	1,140	1,14 ₅	—
2200	1,127	1,08	1,53 ₀
2400	1,114 ₅	1,03	—
2600	1,103	0,98	1,59 ₀
2800	1,093	0,95	1,62 ₈
2898	(1,088)	(0,95)	(1,64 ₁)

La seconda colonna della tabella III contiene i valori di $\partial \log (ov_1 v_t^2)^{1/3} / \partial \log \varrho$ e la terza colonna il rapporto α/c_p , il cui andamento in funzione della profondità è mostrato nella fig. 2. Nella fig. 3 è riportato l'andamento del rapporto α/c_p , con la pressione, ma è bene ricordare che la temperatura nell'interno della Terra non è costante. Si può tuttavia ammettere che alle alte pressioni esistenti nel man-

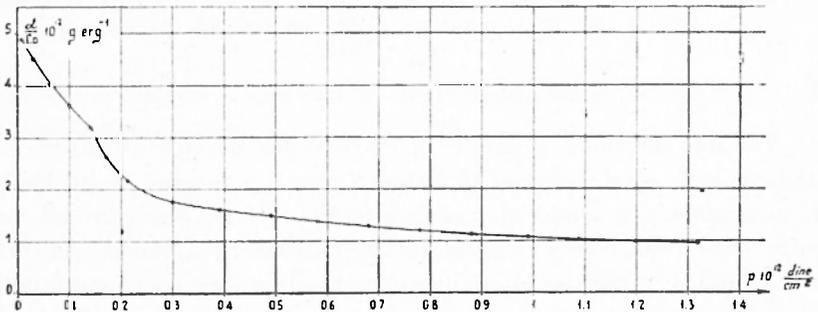


Fig. 3

tello, in prima approssimazione, l'influenza della temperatura sul rapporto α/c_p , sia trascurabile, rispetto alla influenza della pressione.

Sotto questa ipotesi è stato calcolato il rapporto T/T_{33} , dove T_{33} indica la temperatura a 33 km, e i risultati sono contenuti nella ta-

bella III. Da essi si vede che il gradiente adiabatico diminuisce al crescere della profondità. Se per es. si pone $T_{33} = 1000^\circ \text{ K}$, si ottengono i seguenti valori medi nei diversi strati.

STRATO	GRADIENTE MEDIO gradi km^{-1}
B	0,42
C	0,25 ₅
D	0,17 ₅

5. — A rigore, la teoria precedente non potrebbe essere applicata al nucleo, dato che esso, almeno per quanto riguarda lo strato *E*, si presenta come liquido.

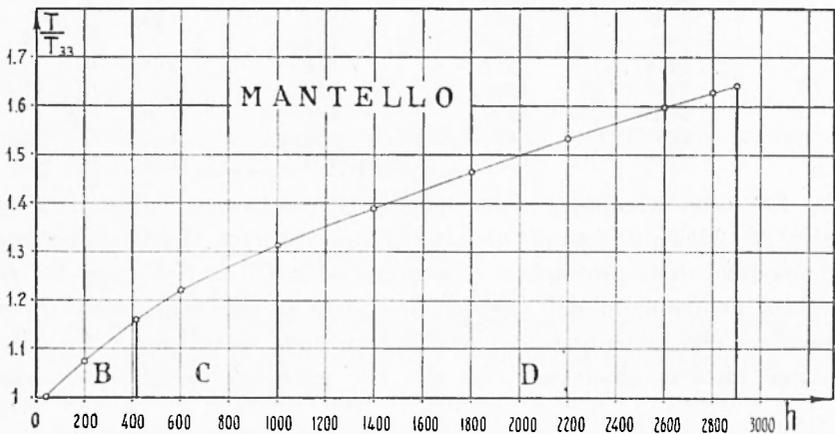


Fig. 4

Un liquido come è noto ⁽²⁻⁴⁾, è costituito da una struttura cristallina, nella quale vi sono molti posti vuoti o, meglio, molte buche di potenziale. Gli atomi non sono quindi del tutto obbligati ad eseguire oscillazioni intorno a posizioni di equilibrio, ma hanno una certa probabilità di muoversi quasi liberamente dalla loro posizione attuale ad un'altra adiacente e momentaneamente vuota. Ne consegue che la pressione interna di agitazione termica non coincide esattamente con la pressione di radiazione delle onde longitudinali, le sole possibili in un liquido, né l'energia interna sarà pari all'energia di oscillazione media di queste onde. Peraltro sotto le fortissime pressioni esistenti nel nucleo, è da presumere che un liquido conservi una struttura molto

più vicina a quella del solido da cui proviene, di quanto non accada alle ordinarie pressioni di laboratorio.

In altre parole è da presumere che la percentuale delle buche di potenziale non sia troppo elevata.

Non sembra quindi del tutto arbitrario applicare la precedente teoria anche al nucleo, con la condizione $v_t = 0$. Procedendo in modo analogo a quello indicato per lo stato solido, si ottiene facilmente la

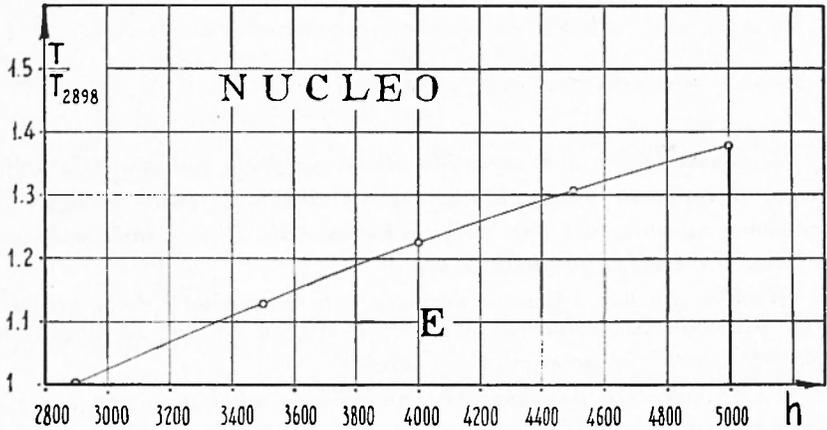


Fig. 5

relazione che lega la densità, la temperatura e la velocità delle onde longitudinali in una trasformazione adiabatica reversibile.

Si ha con qualche passaggio

$$\frac{T^3}{\rho v_l^3} = \text{costante} \quad [18]$$

e non è necessaria la condizione che la temperatura sia superiore alla temperatura di Debye.

TABELLA IV

h km	ρ (i) g cm ⁻³	ρ (ii) g cm ⁻³	v_l km sec ⁻¹	$\frac{T}{T_{2898}}$ (i)	$\frac{T}{T_{2898}}$ (ii)
2898	9,7	9,1	8,10	1	1
3500	10,5	9,8	8,9	1,12 _s	1,12 _s
4000	11,1	10,3	9,51	1,22 _s	1,22 _s
4500	11,6	10,8	9,97	1,30 _s	1,30 _s
4982	11,9	11,1	10,44	1,38 _s	1,37 _s

L'andamento della densità nello strato E del nucleo, è stato calcolato da Bullen nell'ipotesi che in tutto lo strato il materiale sia omogeneo e l'equilibrio adiabatico. Pertanto l'equazione [18] è stata applicata a questo strato e i risultati sono contenuti nella tabella IV. Essi differiscono molto poco nei due casi i) e ii).

La fig. 5 mostra l'andamento del rapporto T/T_{2898} nel caso i).

Roma — Istituto Nazionale di Geofisica — Gennaio 1952.

RIASSUNTO

Mediante la teoria di un solido ideale si calcola, nel mantello della Terra, il rapporto tra la dilatazione termica e il calore specifico a pressione costante, dai dati della velocità delle onde sismiche longitudinali e trasversali e della densità.

Risulta che tale rapporto decresce con l'aumentare della profondità, passando dal valore di $4,8610^{-12}$ g erg⁻¹ a 33 km, al valore di $0,9510^{-12}$ g erg⁻¹ in prossimità del nucleo.

Viene calcolato nel mantello l'andamento adiabatico con la profondità del rapporto T/T_{33} , dove T_{33} è la temperatura a 33 km, e se ne deducono i valori approssimati del gradiente.

L'analogo rapporto T/T_{2898} nello strato E del nucleo, viene valutato con l'estensione della teoria.

SUMMARY

On the basis of the theory of an ideal isotropic solid body, and starting from seismic data, the ratio of the coefficient of the thermal expansion to the specific heat at constant pressure in the Earth mantle, has been calculated.

It appears that such a ratio decreases by increasing of the depth, going from $4,8610^{-12}$ g erg⁻¹ at the depth of 33 Km to $0,9510^{-12}$ g erg⁻¹ near the bottom of the mantle.

The adiabatic behaviour of the ratio T/T_{33} (T_{33} means the temperature at 33 Km of depth) by varying of the depth, has been calculated and the approximate values of the gradient have been deduced.

Through the extension of that theory, the similar ratio T/T_{2898} , referring to the E region of the core, has been estimated.

BIBLIOGRAFIA

- (1) VERHOOGEN J.: *The Adiabatic Gradient in the Mantle*. Trans. Amer. Geophys. Union 32, 41-43 (1951).
- (2) BRILLOUIN L.: *Tenseurs en Mécanique et en Elasticité*. Masson, Paris (1946).
- (3) BRILLOUIN L.: *Wave Propagation in Periodic Structures*. Mc Graw-Hill, New York (1946).
- (4) SLATER J. C.: *Introduction to Chemical Physics*. Mc Graw-Hill, New York (1939).
- (5) VALLE P. E.: *Sull'aumento di temperatura nel Mantello della Terra per compressione adiabatica*. Ann. Geof., IV, 475-478 (1951).
- (6) JEFFREYS H.: *The Times of P, S and SKS, and the Velocities of P and S*. M.N.R.A.S. Geophys. Suppl. IV, 498-533 (1939).
- (7) JEFFREYS H.: *The Times of the Core Waves* (second paper). M.N.R.A.S. Geophys. Suppl. IV, 594-615 (1939).
- (8) BULLEN K. E.: *Introduction of the Theory of Seismology*. Cambridge, University Press (1947).
- (9) RAMSEY W. H.: *On the Nature of the Earth's Core*. M.N.R.A.S. Geophys. Suppl. V, 410-426 (1949).
- (10) BULLEN K. E.: *An Earth Model Based on a Compressibility-Pressure Hypothesis*. M.N.R.A.S. Geophys. Suppl. VI, 50-59 (1950).
- (11) GUTENBERG B.: *On the Layer of relatively low Wave velocity at a Depth of about 80 kilometers*. Bull. Seism. Soc. Am. 38, 121-148 (1948).
- (12) BULLEN K. E.: *The Problem of the Earth's Density Variation*. Bull. Seism. Soc. Am. 30, 235-250 (1940).
- (13) BOAGA G.: *Sopra l'ipotesi di Bullen sulla variazione discontinua della densità nell'interno della Terra e sulla conseguente variazione della gravità*. Pontificia Ass. Scient. V, n. 2 (1941).
- (14) BOAGA G.: *Sulla variazione della pressione nell'interno della Terra con riferimento a variazione discontinua della densità*. Accademia d'Italia, Serie VII, III, 619-625 (1942).
- (15) RAMSEY W. H.: *On the Compressibility of the Earth*. M.N.R.A.S. Geophys. Suppl. VI, 42-49 (1950).