

ULTERIORE STUDIO SULLE OSCILLAZIONI LIBERE DEL LAGO DI SCANNO

P. CALOI - D. DI FILIPPO - M. C. SPADEA

D. Di Filippo ha dedicato un lavoro ⁽¹⁾ allo studio delle oscillazioni libere del lago di Scanno, al quale ha applicato i metodi di Hidaka e di Defant.

Dalla forma della curva normale, riportata nella fig. 12, parve possibile pervenire alle caratteristiche idrodinamiche del lago in questione, applicando uno dei metodi suggeriti da Chrystal, e precisamente quello che considera la curva normale formata da tratti rettilinei raccordati.

Si sa che, in un lago a fondo rettilineo, dove la profondità in un punto x è data da $h(1 - \frac{x}{a})$, gli spostamenti orizzontali ξ e verticali ζ di una particella alla superficie libera sono espressi da ⁽²⁾

$$\xi = \frac{1}{2} \{ A J_1(\omega) + B Y_1(\omega) \} \sin n(t - \tau)$$

$$\zeta = \frac{1}{2a} \{ A J_0(\omega) + B Y_0(\omega) \} \sin n(t - \tau)$$

dove

$$n = \frac{2\pi}{T}, \quad \omega = \frac{2na}{\sqrt{gh}} \sqrt{1 - \frac{x}{a}}$$

A e B essendo costanti arbitrarie e $J_m(\omega)$, $Y_m(\omega)$ funzioni di Bessel e di Neumann di ordine m .

Vediamo di estendere ora questa teoria al caso rappresentato dalla fig. 1.

Sia h la minima profondità nel punto C e h_1 , h_2 , le massime profondità in B e in D. Sia $AB = p'_1$, $BC = p_1$, $CD = p_2$, $DE = p'_2$. Sia inoltre $h_1 (1 - \frac{x}{a'_1})$ la legge di profondità per AB e $h_1 (1 + \frac{x}{a'_2})$ quella per BC, dove x è misurato entrambe le volte da B, positivamente da B verso A: $h_2 (1 - \frac{x}{a_0})$ per CD, $h_2 (1 + \frac{x}{a'_2})$ per DE, dove x è misurato entrambe le volte da D, positivamente da D verso C. Allora le profondità in A, C, E richiedono che sia

$$p_1' = a_1' \quad ; \quad h = h_1 \left(1 - \frac{p_1}{a_1} \right) = h_2 \left(1 - \frac{p_2}{a_2} \right) \quad ; \quad p_2' = a_2' \quad ;$$

$$p_1 + p_2 = a_1 \left(1 - \frac{h}{h_1} \right) + a_2 \left(1 - \frac{h}{h_2} \right),$$

ciò che determina compiutamente a_1' , a_1 , a_2 , a_2' .

Gli spostamenti per il segmento AB sono

$$\xi = \frac{1}{\omega_1'} \left\{ A_1' J_1(\omega_1') + B_1' Y_1(\omega_1') \right\} \sin n(t - \tau_1')$$

$$\zeta = \frac{h_1}{2a_1'} \left\{ A_1' J_0(\omega_1') + B_1' Y_0(\omega_1') \right\} \sin n(t - \tau_1')$$

$$\omega_1' = \frac{2n a'}{\sqrt{gh_1}} \sqrt{1 - \frac{x}{a_1'}}$$

La condizione al contorno A, O, per $\omega_1 = 0$, è che sia sempre $\zeta = 0$, cioè

$$A_1' J_1(0) + B_1' Y_1(0) = 0 \quad \text{da cui} \quad \frac{B_1'}{A_1'} = - \frac{J_1(0)}{Y_1(0)}$$

Poiché $\lim_{\omega=0} \frac{J_1(\omega)}{Y_1(\omega)} = 0$, consegue $B_1' = 0$. Perciò, per punti situati su AB, abbiamo

$$\xi = \frac{A_1'}{\omega_1'} J_1(\omega_1') \sin n(t - \tau_1')$$

$$\zeta = \frac{h_1}{2a_1'} A_1' J_0(\omega_1') \sin n(t - \tau_1')$$

[1]

In B, dove $x = 0$, è

$$\omega_1' = \frac{2n a_1'}{\sqrt{gh_1}} = n \alpha_1' \quad , \quad \text{essendo} \quad \alpha_1' = \frac{2 a_1'}{\sqrt{gh_1}}$$

In B è pertanto

$$\xi = A_1' \frac{1}{n \alpha_1'} J_1(n \alpha_1') \sin n(t - \tau_1')$$

$$\zeta = A_1' \frac{h_1}{2 \alpha_1'} J_0(\alpha_1') \sin n(t - \tau_1')$$

[2]

Analogamente, per il segmento BC abbiamo

$$\begin{aligned} \xi &= \frac{1}{\omega_1} \left\{ A_1 J_1(\omega_1) + B_1 Y_1(\omega_1) \right\} \sin n(t - \tau_1) \\ \zeta &= -\frac{h}{2a_1} \left\{ A_1 J_0(\omega_1) + B_1 Y_0(\omega_1) \right\} \sin n(t - \tau_1) \\ \omega_1 &= \frac{2na_1}{\sqrt{gh_1}} \sqrt{1 + \frac{x}{a_1}} \end{aligned}$$

In B, dove $x = 0$, posto $\omega_1 = \frac{2nc_1}{\sqrt{gh_1}} = na_1$, le equazioni scritte sono quelle degli spostamenti in B. Uguagliandoli a quelli della (2), avremo:

$$\tau_1' = \tau_1 = \tau$$

$$\begin{aligned} \frac{1}{a_1} \left\{ A_1 J_1(na_1) + B_1 Y_1(na_1) \right\} &= \frac{A_1'}{a_1'} J_1(na_1') \\ -\frac{1}{a_1} \left\{ A_1 J_0(na_1) + B_1 Y_0(na_1) \right\} &= \frac{1}{a_1'} A_1' J_0(na_1') \end{aligned}$$

Osserviamo che $\frac{a_1}{a_1'} = \frac{a_1}{a_1'}$. Fatte le posizioni

$$\Delta_1 = J_1(na_1) Y_0(na_1) - J_0(na_1) Y_1(na_1) \quad [3]$$

$$\lambda_1 = J_1(na_1') Y_0(na_1) + J_0(na_1') Y_1(na_1) \quad [4]$$

$$\mu_1 = J_1(na_1) J_0(na_1') + J_1(na_1') J_0(na_1) \quad [5]$$

otterremo

$$A_1 = \frac{a_1}{a_1'} \frac{\lambda_1}{\Delta_1} A_1' \quad , \quad B_1 = -\frac{a_1}{a_1'} \frac{\mu_1}{\Delta_1} A_1' \quad [6]$$

Per il segmento BC avremo pertanto

$$\begin{aligned} \xi &= \frac{A_1' a_1}{\omega_1 \Delta_1 a_1'} \left\{ \lambda_1 J_1(\omega_1) - \mu_1 Y_1(\omega_1) \right\} \sin n(t - \tau) \\ \zeta &= -\frac{h_1 A_1' a_1}{2 a_1 \Delta_1 a_1'} \left\{ \lambda_1 J_0(\omega_1) - \mu_1 Y_0(\omega_1) \right\} \sin n(t - \tau). \end{aligned} \quad [7]$$

Ponendo

$$\omega_1 = \frac{2na_1}{\sqrt{gh_1}} \sqrt{1 - \frac{P_1}{a_1}} = n \beta_1$$

in queste equazioni, avremo gli spostamenti sul punto C; essi sono:

$$\begin{aligned}\xi &= \frac{A_1' a_1}{n \beta_1 \Delta_1 \alpha_1'} \left\{ \lambda_1 J_1(n \beta_1) - \mu_1 Y_1(n \beta_1) \right\} \sin n(t - \tau) \\ \zeta &= - \frac{h_1 A_1' \alpha_1}{2 a_1 \Delta_1 \alpha_1'} \left\{ \lambda_1 J_0(n \beta_1) - \mu_1 Y_0(n \beta_1) \right\} \sin n(t - \tau)\end{aligned}\quad [8]$$

Per DC

$$\begin{aligned}\xi &= \frac{1}{\omega_2} \left\{ A_2 J_1(\omega_2) + B_2 Y_1(\omega_2) \right\} \sin n(t - \tau_2) \\ \zeta &= \frac{h_2}{2 a_2} \left\{ A_2 J_0(\omega_2) + B_2 Y_0(\omega_2) \right\} \sin n(t - \tau_2) \\ \omega_2 &= \frac{2 n a_2}{\sqrt{g h_2}} \sqrt{1 - \frac{x}{a_2}}\end{aligned}$$

In D, dove $x = 0$, $\omega_2 = \frac{2 n a_2}{\sqrt{g h_2}} = n a_2$ gli spostamenti divengono

$$\begin{aligned}\xi &= \frac{1}{n a_2} \left\{ A_2 J_1(n a_2) + B_2 Y_1(n a_2) \right\} \sin n(t - \tau_2) \\ \zeta &= \frac{h_2}{2 a_2} \left\{ A_2 J_0(n a_2) + B_2 Y_0(n a_2) \right\} \sin n(t - \tau_2)\end{aligned}\quad [9]$$

Per il tratto DE

$$\begin{aligned}\xi &= \frac{1}{\omega_2'} \left\{ A_2' J_1(\omega_2') + B_2' Y_1(\omega_2') \right\} \sin n(t - \tau_2') \\ \zeta &= - \frac{h_2}{2 a_2'} \left\{ A_2' J_0(\omega_2') + B_2' Y_0(\omega_2') \right\} \sin n(t - \tau_2') \\ \omega_2' &= \frac{2 n a_2'}{\sqrt{g h_2}} \sqrt{1 + \frac{x}{a_2'}}\end{aligned}$$

In E, per $\omega_2' = 0$, è $\xi = 0$, cioè

$$A_2' J_1(0) + B_2' Y_1(0) = 0$$

Per una proprietà delle funzioni di Bessel, già richiamata, consegue $B_2' = 0$. Per DE è pertanto

$$\xi = -\frac{A_2'}{\omega_2'} J_1(\omega_2') \sin n(t - \tau_2') \quad [10]$$

$$\zeta = -\frac{h_2}{2a_2'} A_2' J_0(\omega_2') \sin n(t - \tau_2')$$

In D è

$$\omega_2' = \frac{2na_2'}{\sqrt{gh_2}} = n\alpha_2' \quad \alpha_2' = \frac{2a_2'}{\sqrt{gh_2}}$$

In D è pertanto

$$\xi = -\frac{A_2'}{n\alpha_2'} J_1(n\alpha_2') \sin n(t - \tau_2') \quad [10']$$

$$\zeta = -\frac{h_2}{2a_2'} A_2' J_0(n\alpha_2') \sin n(t - \tau_2')$$

Uguagliando la [9] alle [10], risulta

$$\tau_2 = \tau_2' = \tau$$

$$\frac{1}{\alpha_2} \left\{ A_2 J_1(n\alpha_2) + B_2 Y_1(n\alpha_2) \right\} = \frac{A_2'}{\alpha_2'} J_1(n\alpha_2')$$

$$\frac{1}{\alpha_2} \left\{ A_2 J_0(n\alpha_2) + B_2 Y_0(n\alpha_2) \right\} = -\frac{A_2'}{\alpha_2'} J_0(n\alpha_2')$$

Poiché $\frac{\alpha_2}{\alpha_2'} = \frac{a_2}{a_2'}$, fatte le posizioni

$$\Delta_2 = J_1(n\alpha_2) Y_0(n\alpha_2) - J_0(n\alpha_2) Y_1(n\alpha_2) \quad [11]$$

$$\lambda_2 = J_1(n\alpha_2') Y_0(n\alpha_2) + J_0(n\alpha_2') Y_1(n\alpha_2) \quad [12]$$

$$\mu_2 = J_1(n\alpha_2) J_0(n\alpha_2') + J_0(n\alpha_2) J_1(n\alpha_2') \quad [13]$$

si ottiene

$$A_2 = \frac{\alpha_2 \lambda_2}{\alpha_2' \Delta_2} A_2' ,$$

$$B_2 = -\frac{\alpha_2 \mu_2}{\alpha_2' \Delta_2} A_2' .$$

Per il segmento DC è

$$\xi = \frac{1}{\omega_2} \frac{\alpha_2}{\alpha_2'} \frac{A_2'}{\Delta_2} \left\{ \lambda_2 J_1(\omega_2) - \mu_2 Y_1(\omega_2) \right\} \sin n(t - \tau) \quad [14]$$

$$\zeta = \frac{h_2}{2a_2} \frac{\alpha_2}{\alpha_2'} \frac{A_2'}{\Delta_2} \left\{ \lambda_2 J_0(\omega_2) - \mu_2 Y_0(\omega_2) \right\} \sin n(\tau - t)$$

Poiché in C è

$$\omega_2 = \frac{2 n a_2}{\sqrt{g h_2}} \sqrt{1 - \frac{P_2}{a_2}} = n \beta_2 ;$$

gli spostamenti in C hanno l'espressione

$$\left\{ \begin{aligned} \xi &= \frac{a_2 A_2'}{a_2' n \beta_2 \Delta_2} \left\{ \lambda_2 J_1 (n \beta_2) - \mu_2 Y_1 (n \beta_2) \right\} \sin n (t - \tau) \\ \zeta &= \frac{h_2 a_2 A_2'}{2 a_2 a_2' \Delta_2} \left\{ \lambda_2 J_0 (n \beta_2) - \mu_2 Y_0 (n \beta_2) \right\} \sin n (t - \tau) . \end{aligned} \right. \quad [14']$$

Uguagliando le [8] alle [14'] si perviene alla seguente equazione per i periodi:

$$\frac{h_1 \beta_1 a_2}{h_2 \beta_2 a_1} \left\{ \lambda_1 I_0 (n \beta_1) - \mu_1 Y_0 (n \beta_1) \right\} \cdot \left\{ \lambda_2 I_1 (n \beta_2) - \mu_2 Y_1 (n \beta_2) \right\} + \\ + \left\{ \lambda_1 J_1 (n \beta_1) - \mu_1 Y_1 (n \beta_1) \right\} \cdot \left\{ \lambda_2 J_0 (n \beta_2) - \mu_2 Y_0 (n \beta_2) \right\} = 0 \quad [15]$$

dove $\lambda_1, \mu_1, \lambda_2, \mu_2$ hanno le espressioni riportate nelle [4], [5], [12], [13] rispettivamente (*).

2. — Applichiamo la teoria esposta al lago di Scanno.

La tabella I riporta i dati tratti dalla forma e dalla batimetria del lago, dati che hanno servito, fra l'altro, a determinare la curva normale, come da fig. 2.

Per l'applicazione della teoria esposta al n. 1, la curva normale è stata schematizzata in quattro tratti raccordati (fig. 00).

Valendoci dei valori riportati nella tab. I abbiamo determinato le equazioni delle rette cui appartengono i tratti 1, 2, 3, 4, della fig. 1.

(*) I giapponesi Nakamura e Honda, trattando un problema analogo (3), incorsero in due errori: uno dovuto ad una svista di Chrystal — contenuta nella prima redazione della sua memoria (2) —, l'altro — più grave — conseguente ad incomprensibili dimenticanze di segno nel corso della trattazione analitica. Questo fatto, principalmente, condusse gli autori citati ad ottenere per l'uminodale del lago di Hakoné un valore di 22^m,47, mentre le osservazioni davano soltanto 15^m ca.

Tale divergenza, per loro inesplicabile, venne attribuita alla scarsa approssimazione del metodo. In realtà, corretti gli errori di segno accennati e rifatti i calcoli con la formula da noi ottenuta, si ottiene per l'uminodale del lago Hakoné il valore di 14^m ca, molto prossimo quindi a quello osservato.

TABELLA I

Sezioni	x	S(x)	b(x)	v(x)	$\sigma(x)$
	m	m ²	m	complessive hm ²	hm ³
0	0	0	0	0	0
1	80	6540	424	3,4240	2,77296
2	160	9060	492	6,9760	4,45752
3	240	11080	572	11,4560	6,33776
4	320	13320	662	16,2880	8,81784
5	400	15960	724	21,6640	11,55504
6	480	17560	736	27,4240	12,92416
7	560	18660	758	33,2480	14,14428
8	640	18080	750	39,2000	13,56000
9	720	17940	714	45,0880	12,80916
10	800	17640	680	50,7200	11,99520
11	880	15760	650	56,0000	10,24400
12	960	15960	712	61,3760	11,36352
13	1040	17120	736	67,0720	12,60032
14	1120	17800	748	73,8880	13,31440
15	1200	18320	776	80,8320	14,21632
16	1240	17040	800	84,5120	13,63200
17	1280	14120	726	88,5440	10,25112
18	1360	11840	520	94,6560	6,15680
19	1440	10200	472	98,8800	4,81440
20	1520	6520	368	102,3040	2,39936
21	1600	5360	348	105,2800	1,86528
22	1680	5060	396	108,0640	2,00376
23	1760	2600	380	111,1040	0,98800
24	1844	0	0	112,5120	0

Ciò ci ha consentito di calcolare i valori delle costanti h_1 , h_2 , $h...$ Si è ottenuto:

$$a_1' = p_1' = 30,97 \quad ; \quad a_1 = 90,78 \quad ; \quad a_2 = 89,84 \quad ; \quad a_2' = p_2' = 33,14 \text{ h n}^2 \quad ; \\ p_1 = 25,81 \quad ; \quad p_2 = 22,60 \text{ hm}^2$$

$$h_1 = 14,82 \quad ; \quad h_2 = 14,17 \quad ; \quad h = 10,60 \text{ hm}^3$$

Ne consegue:

$$\alpha_1 = 150,93 \quad ; \quad \alpha_2 = 152,41 \quad \alpha_1' = 51,38 \quad ; \quad \alpha_2' = 56,22 \text{ sec} \quad ; \\ \beta_1 = 127,69 \quad ; \quad \beta_2 = 131,87 \text{ sec.}$$

Periodi. — I valori ottenuti consentono la risoluzione dell'equa-

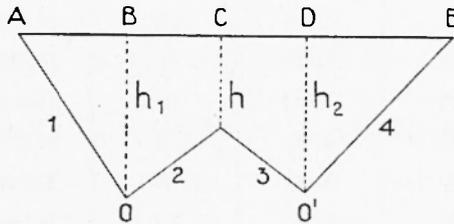


Fig. 1

zione dei periodi delle possibili oscillazioni libere del lago di Scanno.

Per quanto riguarda la sessa uninodale, il valore di n che rende praticamente nulla la [15] è .02936, cui corrisponde per il periodo dell'uninodale il valore

$$T_1 = 214^s.$$

La sessa binodale corrisponde al valore $n = .0528$, che annulla la [15]:

consegue

$$T_2 = 119^s.$$

La terza radice della [15], nell'ordine, si ha per $n = .0706$, cui corrisponde

$$T_3 = 89^s \quad ;$$

periodo della sessa trinodale.

Nodi. — È facile provare che l'uninodo cade nel segmento BC.

Nel nodo dev'essere, naturalmente, $\zeta = 0$. Con riferimento alla 2^a delle [7], dev'essere cioè

$$\frac{Y_0(\omega_1)}{J_0(\omega_1)} = \frac{\lambda_1}{\mu_1}$$

Ora, per l'oscillazione libera uninodale, è $\lambda_1 = + 0.06471$; $\mu_1 = - 0.29516$; in corrispondenza del nodo, dovrà essere pertanto

$$\frac{Y_0(\omega_1)}{J_0(\omega_1)} = - 0,21923$$

Ciò si verifica per

$$\omega_1 = 3,74355 .$$

Ma

$$\omega_1 = n\alpha_1 \sqrt{1 + \frac{x}{a_1}}$$

da cui

$$x = -a_1 \left[1 - \left(\frac{\omega_1 T}{2\pi\alpha_1} \right)^2 \right]$$

Ricordando i valori di a_1 e α_1 e posto $T = 214^s$ (periodo dell'uninodale), consegue

$$x = - 25,99 ,$$

ascissa dell'uninodo con riferimento al sistema di assi cartesiani con origine in **B** (fig. 1).

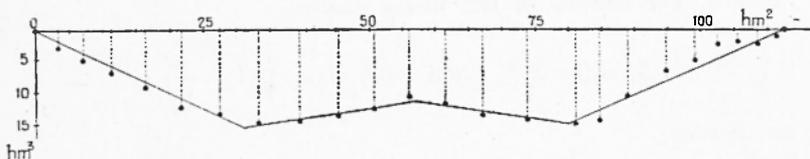


Fig. 2

L'ascissa dell'uninodo in unità delle $v(x)$ — vedi tabella — sarà allora, tenendo conto del valore di a_1' ,

$$v(x_1) = 56,96 \text{ hm}^2 .$$

L'uninodo dista quindi dall'estremo-origine m 894.

Affinché un binodo sia nel tratto AB, dovrà essere $J_0(\omega_1') = 0$.

Poiché

$$\omega_1' = n\alpha_1' \sqrt{1 - \frac{x}{a_1'}} ,$$

dovrà essere

$$x = a_1' \left[1 - \left(\frac{\omega_1' T}{2\pi a_1'} \right)^2 \right] \quad [16]$$

Un binodo sarà in AB se $\omega_1' < n a_1'$.

Per la binodale ($T = 119^s$) è

$$n a_1' = 2,713 \quad .$$

Poiché le prime radici di $J_0(\omega) = 0$ sono

$$2,4048 ; 5,5201 ; 8,6537 ; \dots$$

e poiché la prima di tali radici è appunto minore di $n a_1'$, se ne conclude un che un binodo è effettivamente nel tratto AB. La sua ascissa si deduce dalla [16], dove va fatto $\omega_1' = 2,4048$; $T = 119$ sec. Risulta

$$x = 6,6307.$$

In unità delle $v(x)$, date dalla tabella, avremo

$$v(x_2) = 30,97 - 6,6307 = 24,3393 \text{ hm}^2 \quad ,$$

valore dell'ascissa del primo binodo, nel sistema di ordinate, cui è riferita la curva normale.

La distanza del I binodo dall'estremo-origine è quindi di m 437.

Il secondo binodo cade in DE, come è facile provare.

Infatti, per cadere in DE dovrà essere

$$J_0(\omega_2') = 0 \quad , \quad \text{con} \quad \omega_2' = n a_2' \sqrt{1 + \frac{x}{a_2'}}$$

Se ne deduce

$$x = -a_2' \left[1 - \left(\frac{\omega_2' T}{2\pi a_2'} \right)^2 \right] \quad [17]$$

Dovrà essere quindi $\omega_2' < n a_2'$, ciò che in effetti si verifica, essendo $n a_2' = 2,968$.

Posto nella [17] $a_2' = 33,14$; $\omega_2' = 2,4048$; $T = 119^s$; $a_2' = 56,222$, si ha

$$x = -11,3902.$$

L'ascissa del secondo binodo è pertanto — nella successione delle $v(x)$ riportate nella tabella I,

$$v(x_2'') = 79,3731 + 11,3902 = 90,7633 \text{ hm}^2$$

Il II binodo dista quindi dall'estremo-origine m. 1309.
 Passiamo ai trinodi.

Per avere un trinodo in AB, dovrà essere $J_0(\omega_1') = 0$, e una radice di questa equazione risultare minore di $n\alpha_1'$. Per la trinodale è

$$n\alpha_1' = 3,6271 .$$

Un trinodo quindi è sicuramente nel tratto AB. Vale perciò la

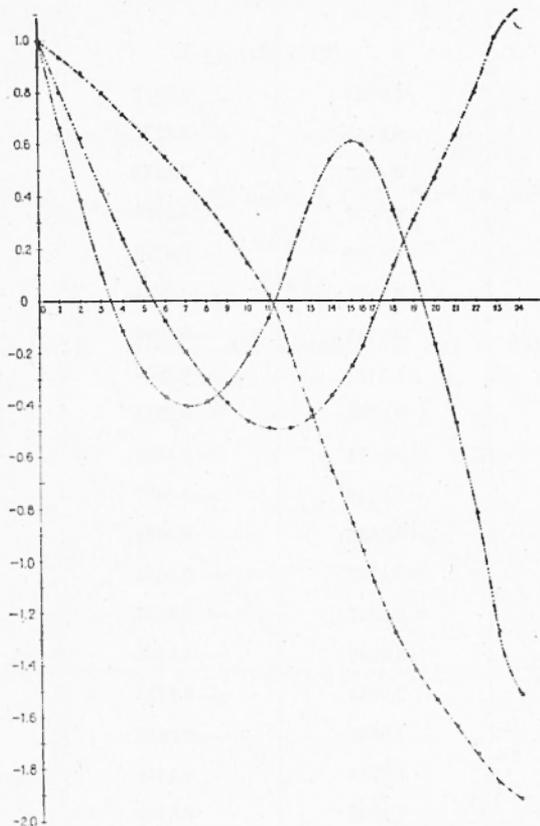


Fig. 3

[16]; dalla quale si deduce — fatto $\omega_1' = 2,4048$; $T = 89^s$; $a_1' = 30,97$
 $x = 17,3556$.

Nella serie di valori progressivi delle $v(x)$, l'ascissa del primo trinodo è allora

$$v(x_3') = 13,61 ,$$

e la sua distanza dall'estremo-origine vale m. 276.

TABELLA II — *Andamento degli spostamenti verticali*

Sezioni	Uninodale	Binodale	Trinodale
0	1	1	1
1	0.9383	0.8071	0.6691
2	0.8762	0.6274	0.3870
3	0.8005	0.4274	0.1076
4	0.7229	0.2429	— 0.1108
5	0.6403	0.0729	— 0.2707
6	0.5565	— 0.0744	— 0.3666
7	0.4740	— 0.1933	— 0.4021
8	0.3781	— 0.3017	— 0.3864
9	0.2694	— 0.3916	— 0.3193
10	0.1471	— 0.4582	— 0.2031
11	0.0240	— 0.4897	— 0.0635
12	— 0.1926	— 0.4883	0.1606
13	— 0.4192	— 0.4498	0.3750
14	— 0.6557	— 0.3687	0.5456
15	— 0.8589	— 0.2502	0.6110
16	— 0.9654	— 0.1717	0.6018
17	— 1.0865	— 0.0664	0.5435
18	— 1.2783	0.1354	0.3483
19	— 1.4205	0.3109	0.1064
20	— 1.5392	0.4749	— 0.1653
21	— 1.6467	0.6376	— 0.4701
22	— 1.7505	0.8060	— 0.8178
23	— 1.8667	1.0084	— 1.2765
24	— 1.9219	1.1099	— 1.5204

Un trinodo nel tratto CD comporta, per la 2^a delle [14],

$$\lambda_2 J_0(\omega_2) - \mu_2 Y_0(\omega_2) = 0,$$

da cui

$$\frac{J_0(\omega_2)}{Y_0(\omega_2)} = \frac{\mu_2}{\lambda_2}.$$

Poiché, per la trinodale, è $\lambda_2 = -.07435$; $\mu_2 = +.06485$, consegue

$$J_0(\omega_2) = -.87357 \cdot Y_0(\omega_2),$$

ciò che richiede

$$\omega_2 = 9,3708.$$

Ma

$$\omega_2 = n a_2 \sqrt{1 - \frac{x}{a_2}}, \quad x = a_2 \left[1 - \left(\frac{\omega_2 T}{2\pi a_2} \right)^2 \right].$$

Fatto $a_2 = 89,84$, $a_2 = 152,413$, $\omega_2 = 9,3708$, $T = 89$, si ottiene

$$x = 21,70$$

Si ha allora

$$v(x_3^{II}) = 79,37 - 21,70 = 57,67 \text{ hm}^2,$$

ascissa del secondo trinodo, nel sistema in cui è rappresentata la curva normale.

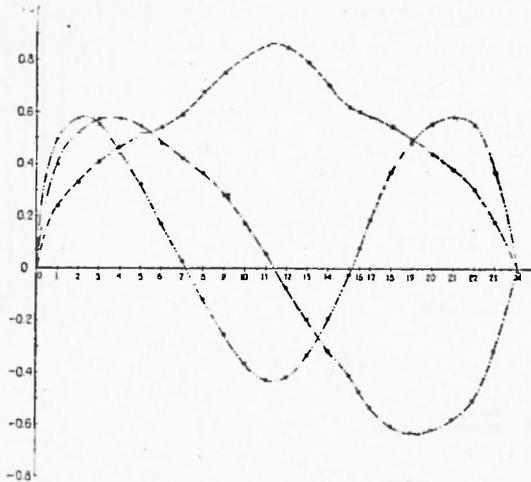


Fig. 4

Il II trinodo dista pertanto dall'estremità-base m 905.

Un trinodo nel quarto tratto DE, presuppone

$$J_0(\omega_2') = 0,$$

con una radice minore di $n a_2'$. E poiché per la trinodale è $n \omega_2' = 3,969$, il terzo trinodo è certamente nel tratto DE.

Per la [17], dove va fatto $\omega_2' = 2,4048$; $T = 89^\circ$; $\alpha_2' = 56,222$ e $\alpha_2' = 33,14$, si ha

$$x = -20,974 .$$

L'ascissa del terzo trinodo, nel sistema rappresentativo della curva normale, è allora

$$v(x_3^{III}) = 100,34 \text{ hm}^2$$

e la distanza dall'estremità-origine è pari a m 1474.

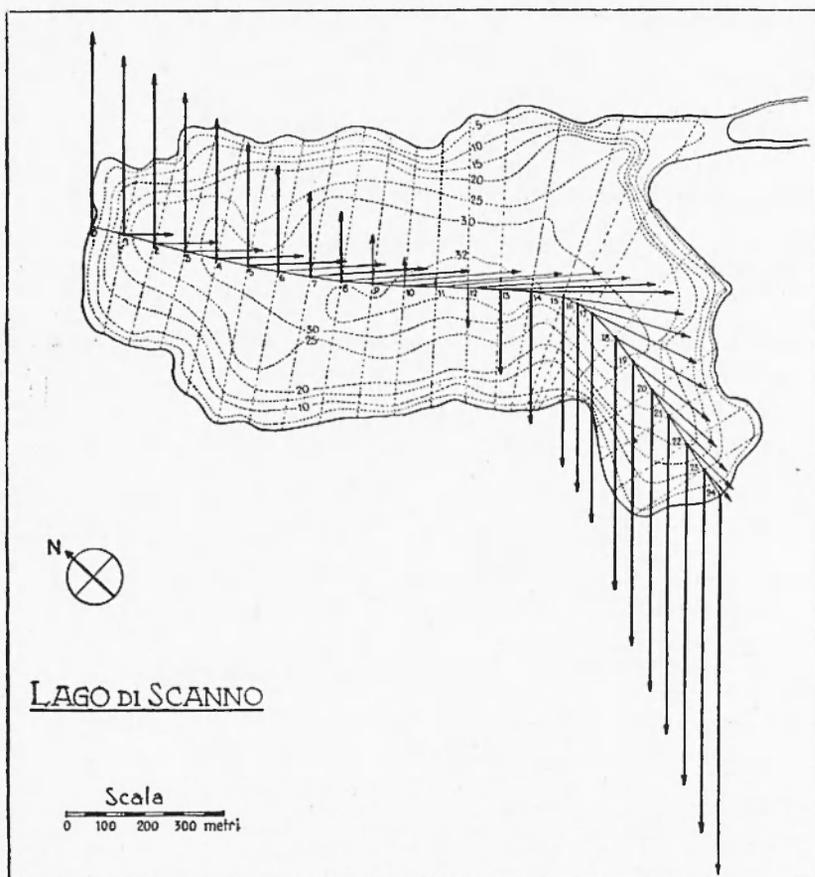


Fig. 5 - Spostamenti relativi verticali e orizzontali per la sessa uninodale (le direzioni degli spostamenti orizzontali sono state un pò deviate allo scopo di evitare sovrapposizioni).

Spostamenti verticali. — I valori relativi degli spostamenti verticali lungo la sezione longitudinale del lago, si possono ottenere, in corrispondenza dei quattro tratti in cui la curva normale è stata suddivisa, valendoci delle equazioni seconde nelle [1], [7], [14] e [10].

I valori sono riferiti ad uno spostamento della sezione O uguale a 1.

La continuità tra i valori ottenuti per le sezioni comprese nel tratto AB e quelli relativi alle sezioni comprese in BC si ottiene moltiplicando i valori che si traggono dall'espressione in parentesi quadrata nella 2^a delle [7] per il fattore $-\frac{1}{\Delta_1}$.

La continuità fra i valori di BC e quelli compresi in CD si trae dai valori che $\lambda_2 J_0(\omega_2) - \mu_2 Y_0(\omega_2)$ — vedi 2^a delle [14] — assume nelle sezioni comprese in CD, moltiplicandoli per il fattore

$$\frac{a_1' h_2 A_2' 1}{a_2' h_1 A_1' \Delta_2} = -\frac{1}{\Delta_1} \frac{\lambda_1 J_0(n \beta_1) - \mu_1 Y_0(n \beta_1)}{\lambda_2 J_0(n \beta_2) - \mu_2 Y_0(n \beta_2)} = k. \quad [18]$$

Infine, la continuità fra CD e DE è assicurata moltiplicando i valori di $-J_0(\omega_2')$ [formula (10)], relativi alle sezioni che entrano in DE, per il fattore

$$k \cdot \Delta_2,$$

dove k è dato dalla [18].

Tenendo conto delle precedenti osservazioni, sono stati calcolati gli spostamenti relativi per le sesse uni-, bi- e trinodali, riportati nella tabella II. Le figure da 3 a 7 danno gli andamenti corrispondenti

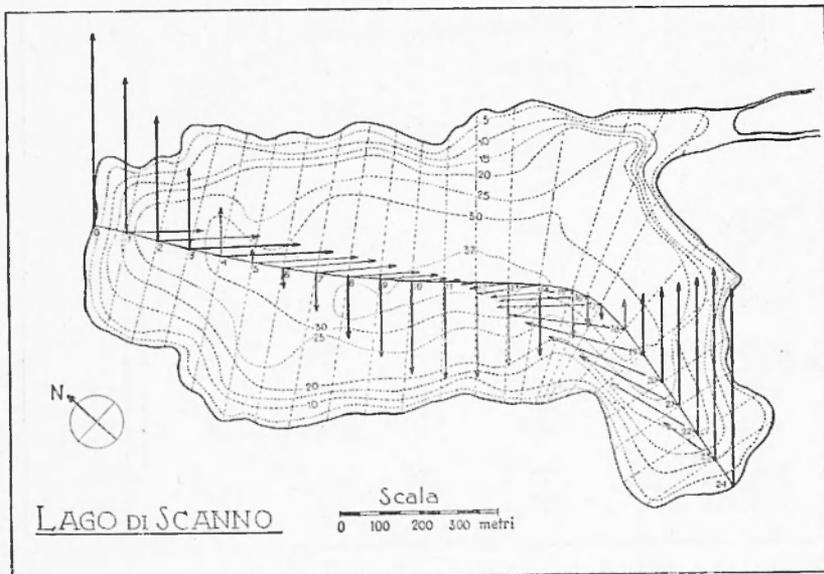


Fig. 6 - Spostamenti relativi verticali e orizzontali per la sesse binodale (i vettori rappresentativi degli spostamenti orizzontali sono stati un pò deviati, per evitare sovrapposizioni).

Spostamenti orizzontali. — I valori relativi degli spostamenti orizzontali interessanti i punti contenuti nella sezione longitudinale del lago, si possono ottenere facendo uso delle equazioni prime nelle [1], [7], [14] e [10].

Nel tratto AB furono calcolati i valori di $\frac{\omega_i}{A_i'} \xi$.

Per la continuità con i valori relativi al tratto precedente i valori calcolati per $\lambda_i J_i(\omega_i) - \mu_i Y_i(\omega_i)$ relativi alle sezioni trasversali contenute nel tratto BC — equaz. [7] — vanno moltiplicati per il fattore $\frac{1}{\Delta_i}$.

Il collegamento fra i tratti BC e CD si ottiene moltiplicando i

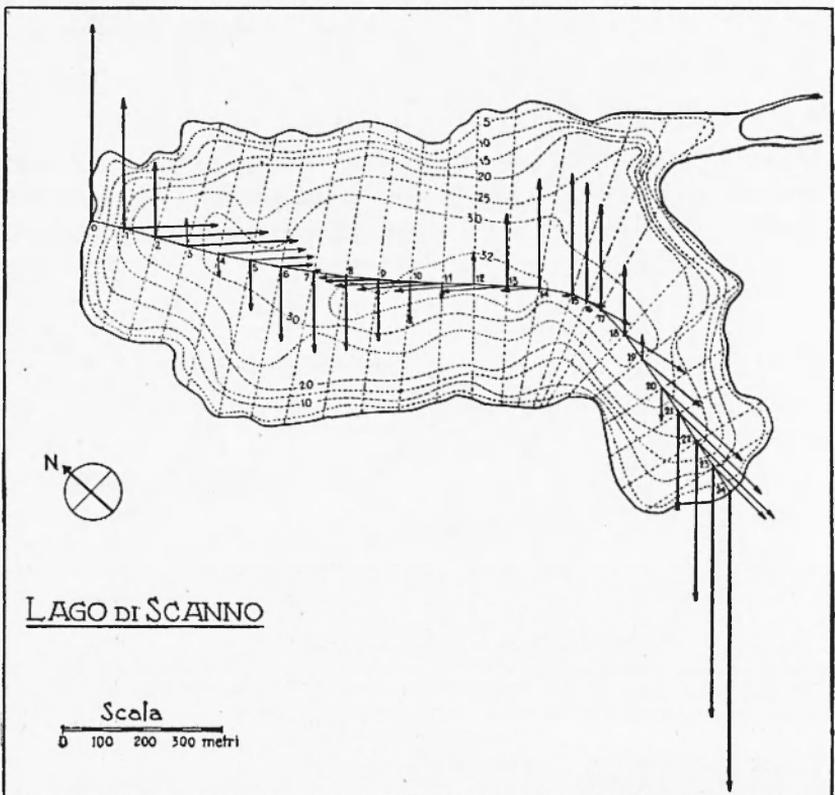


Fig. 7 - Spostamenti relativi verticali e orizzontali per la sessa trinodale (la direzione dei vettori rappresentativi dei movimenti orizzontali è stata un pò mutata, per evitare sovrapposizioni).

TABELLA III — *Andamento degli spostamenti orizzontali*

Sezioni	Uninodale	Binodale	Trinodale
0	0	0	0
1	0.2427	0.4055	0.4993
2	0.3351	0.5189	0.5787
3	0.4119	0.5742	0.5553
4	0.4689	0.5787	0.4624
5	0.5132	0.5454	0.3270
6	0.5453	0.4835	0.1738
7	0.5951	0.4253	0.0303
8	0.6813	0.3724	— 0.1164
9	0.7566	0.2901	— 0.2523
10	0.8198	0.1799	— 0.3631
11	0.8644	0.0592	— 0.4258
12	0.8537	— 0.0699	— 0.4143
13	0.7948	— 0.1948	— 0.3320
14	0.7081	— 0.3133	— 0.1873
15	0.6252	— 0.4059	— 0.0203
16	0.6132	— 0.4693	0.0765
17	0.5936	— 0.5327	0.1917
18	0.5486	— 0.6058	0.3739
19	0.5017	— 0.6300	0.4899
20	0.4504	— 0.6224	0.5602
21	0.3913	— 0.5848	0.5866
22	0.3156	— 0.5061	0.5554
23	0.1834	— 0.3165	0.3788
24	0	0	0

valori che conseguono da $\lambda_2 J_1(\omega_2) - \mu_2 Y_1(\omega_2)$ nelle varie sezioni di CD, per il fattore

$$\frac{A_2' \alpha_1}{A_1' \alpha_2} \frac{1}{\Delta_2} = \frac{\alpha_1}{\alpha_2} \frac{\beta_2}{\beta_1} \frac{1}{\Delta_1} \frac{\lambda_1 J_1(n\beta_1) - \mu_1 Y_1(n\beta_1)}{\lambda_2 J_1(n\beta_2) - \mu_2 Y_1(n\beta_2)} = k' \quad [19]$$

Infine, la continuità fra i tratti CD e DE si ottiene moltiplicando i valori di $J_1(\omega_2')$ in DE per il fattore

$$k' \cdot \Delta_2$$

dove k' è dato dalla [19].

Gli spostamenti orizzontali relativi per le oscillazioni libere con uno, due, tre nodi, calcolati sulla base delle avvertenze che precedono, sono riportati nella tabella III e, in grafico, nelle figg. da 3 a 7.

3. — Riassumiamo nel seguente prospetto, alcune caratteristiche idrodinamiche delle oscillazioni libere del lago di Scanno, ottenute con il nuovo metodo:

Periodi	sec	nodi	m
T_1	214	x_1	894
T_2	119	x_2^I	437
		x_2^{II}	1309
T_3	89	x_3^I	276
		x_3^{II}	905
		x_3^{III}	1474

Questi valori sono in ottimo accordo con quelli ottenuti nel lavoro citato.

Sottoporremo i risultati del calcolo al vaglio delle osservazioni dirette.

Roma — Istituto Nazionale di Geofisica — Gennaio 1952.

RIASSUNTO

L'andamento della curva normale relativa al lago di Scanno, ha suggerito l'opportunità dell'applicazione di un metodo, proposto da Chrystal, per la determinazione delle fondamentali caratteristiche idrodinamiche del lago stesso.

Gli sviluppi analitici ci hanno consentito di pervenire a formule atte alla determinazione dei periodi, dei nodi, degli spostamenti ver-

ticali e orizzontali, relative alle oscillazioni libere uninodali, binodali e trinodali del lago.

È questa la prima integrale applicazione del metodo proposto da Chrystal, applicazione che ci ha consentito, fra l'altro, di individuare e chiarire un errore, in cui erano incorsi nel 1910 i giapponesi Nakamura e Honda.

I risultati ottenuti sono in ottimo accordo con quelli tratti in un precedente lavoro.

Ci riserviamo di confrontare i risultati dei calcoli con una serie di registrazioni, che ci proponiamo di ottenere con limnografi, in fase di allestimento.

SUMMARY

The study of the normal curve shape for the Scanno Lake, has suggested the opportunity of the application of the method suggested by Chrystal for the determination of the fundamental hydrodynamical characteristics of the above mentioned Lake.

Analytical developments enabled the A. to obtain formulae which are particularly fit to determine periods, nodes as well as vertical and horizontal displacements in connection to uninodal, binodal and trinodal free oscillations of the Lake.

This study represents the first integral application of the method proposed by Chrystal, and this application enabled the A. to trace and explain at the same time a fault committed in 1910 by the Japanese Nakamura and Honda.

Results agree perfectly with those obtained in a previous work.

The A. will in due time compare the computation results with those he will obtain from a series of records from some limnographic recording apparatus which are presently under manufacturing.

BIBLIOGRAFIA

- (1) DI FILIPPO D.: *Le sesse del lago di Scanno*. Ann. di Geof., II (1949).
- (2) CALOI P.: *Le sesse del lago di Garda*. Parte II. Ann. di Geof., I (1948).
- (3) NAKAMURA S. e HONDA K.: *Seiches in Some Lakes of Japan*. The Journal of the Coll. of Science, Imp. Univ. Tokyo, XXVIII (1910).