

CASI PARTICOLARI DI « CURVE INDICATRICI » NEI METODI DI PROSPEZIONE ELETTROMAGNETICA

RAOUL GASTONE FIANO

Premessa. — Nella presente nota, che si riallaccia direttamente ad una del prof. Aquilina ⁽¹⁾, ci proponiamo di esaminare il comportamento della « curva indicatrice » in alcuni casi particolari, simili a quelli già trattati nel citato articolo.

Essi ci consentono di seguire le variazioni della curva al mutare della disposizione reciproca di due « spire » sia al variare della profondità di una di esse rispetto all'altra, che all'affondarsi di entrambe. Scopo essenziale è quello di avvicinarsi ad una curva ottenibile nella prospezione.

Supponiamo, come è solito fare, che il campo primario sia diretto orizzontalmente (ciò che avviene solo lungo l'asse del quadro trasmettente) e che il secondario sia schematizzabile in due spire poste in piani verticali (limitazione che ci porta a considerare lo schema più semplice che si avvicini a condizioni pratiche).

Vogliamo trattare i sotto-notati casi particolari per seguire l'andamento di detta « curva indicatrice » per:

- 1°) due spire parallele,
- 2°) due spire la cui pendenza sia uguale ad 1, che vengono gradatamente affondate,
- 3°) due spire, che vengono anche esse gradatamente affondate, ma la cui pendenza sia uguale ad $\frac{1}{2}$.

In relazione a queste premesse, ci attendiamo di rilevare che, per il caso riferentesi al primo punto, si ha una curva simmetrica, invece per i casi riferentesi al 2° e 3° punto si avranno curve disimmetriche con minimi accentuati in corrispondenza delle spire più alte.

Riportiamo di seguito, dall'articolo citato, le formule e le notazioni che vengono usate nella presente trattazione:

⁽¹⁾ AQUILINA C.: *Considerazioni teoriche sulla « curva indicatrice » nei metodi di prospezione elettromagnetica* - Riv. Geomineraria, VIII, I.

a) Formula della curva indicatrice nel caso di due spire.

$$y = \frac{2x^6 + Ax^5 + Bx^4 + Cx^3 + Dx^2 + Ex + Fx^3 + Gx^2 + Hx}{Lx^4 + Mx^3 + Nx^2 + Px + Qx + R}$$

b) Espressioni dei termini A, B, ecc.:

$$A = 2(a_0 + a_1)$$

$$B = 2(b_0 + a_0a_1 + b_1) - 8K(b - a)$$

$$C = 2(c_0 + a_1b_0 + b_1a_0 + c_1) - 6K(b - a)(a_0 + a_1)$$

$$D = 2(d_0 + a_1c_0 + b_1b_0 + c_1a_0 + d_1) - K(b - a)/4[g_0 + g_1 + 16a_0a_1 + 16(b_0 + b_1)]$$

$$E = 2(a_1d_0 + b_1c_0 + c_1b_0 + d_1a_0) - K(b - a)/4[g_0a_1 + g_1a_0 + 8(a_0b_1 + a_1b_0) + 16(c_0 + c_1)]$$

$$F = 2(b_1d_0 + c_1c_0 + d_1b_0) - K(b - a)/4[g_0b_1 + g_1b_0 + 8(a_0c_1 + a_1c_0) + 16(d_0 + d_1)]$$

$$G = 2(c_1d_0 + d_1c_0) - K(b - a)/4[g_0c_1 + g_1c_0 + 8(a_0d_1 + a_1d_0)]$$

$$H = 2d_1d_0 - K(b - a)/4(g_0d_1 + g_1d_0)$$

$$L = 4K(b - a)(e_0 + e_1)$$

$$M = K(b - a)[(4a_1 + a_0)e_0 + (4a_0 + a_1)e_1]$$

$$N = K(b - a)[(4b_1 + a_0a_1)e_0 + (4b_0 + a_1a_0)e_1]$$

$$P = K(b - a)[(4c_1 + a_0b_1)e_0 + (4c_0 + a_1b_0)e_1]$$

$$Q = K(b - a)[(4d_1 + a_0c_1)e_0 + (4d_0 + a_1c_0)e_1]$$

$$R = K(b - a)(a_0d_1e_0 + a_1d_0e_1)$$

c) Espressioni dei coefficienti a_r , b_r , ecc.

$$a_r = -4t_r$$

$$b_r = u_r^2 + v_r^2 + 6t_r^2$$

$$c_r = -2(u_r^2 + v_r^2)t_r - 4t_r^3$$

$$d_r = u_r^2v_r^2 + (u_r^2 + v_r^2)t_r^2 + t_r^4$$

$$e_r = u_r + v_r$$

$$f_r = 4b_rv_r$$

$$g_r = a_r^2 - f_r$$

dove:

$$u_r = a_r + rp, \Lambda; \quad v_r = b_r + rp, \Lambda; \quad t_r = r, \Lambda.$$

d) Significato delle notazioni riportate nei disegni e nelle espressioni di u_r , v_r , t_r .

u_r = profondità della traccia superiore della spira r^{ma}

a_r = profondità della traccia superiore della 1^{a} spira di ordine zero.

r = indice progressivo del posto occupato dalla spira.

p = pendenza.

Λ = distanza fra le due spire successive.

$\Lambda' - \Lambda''$ = distanza dalla spira di ordine uno dall'asse delle ordinate.

v_r = profondità della traccia inferiore della spira r^{ma}

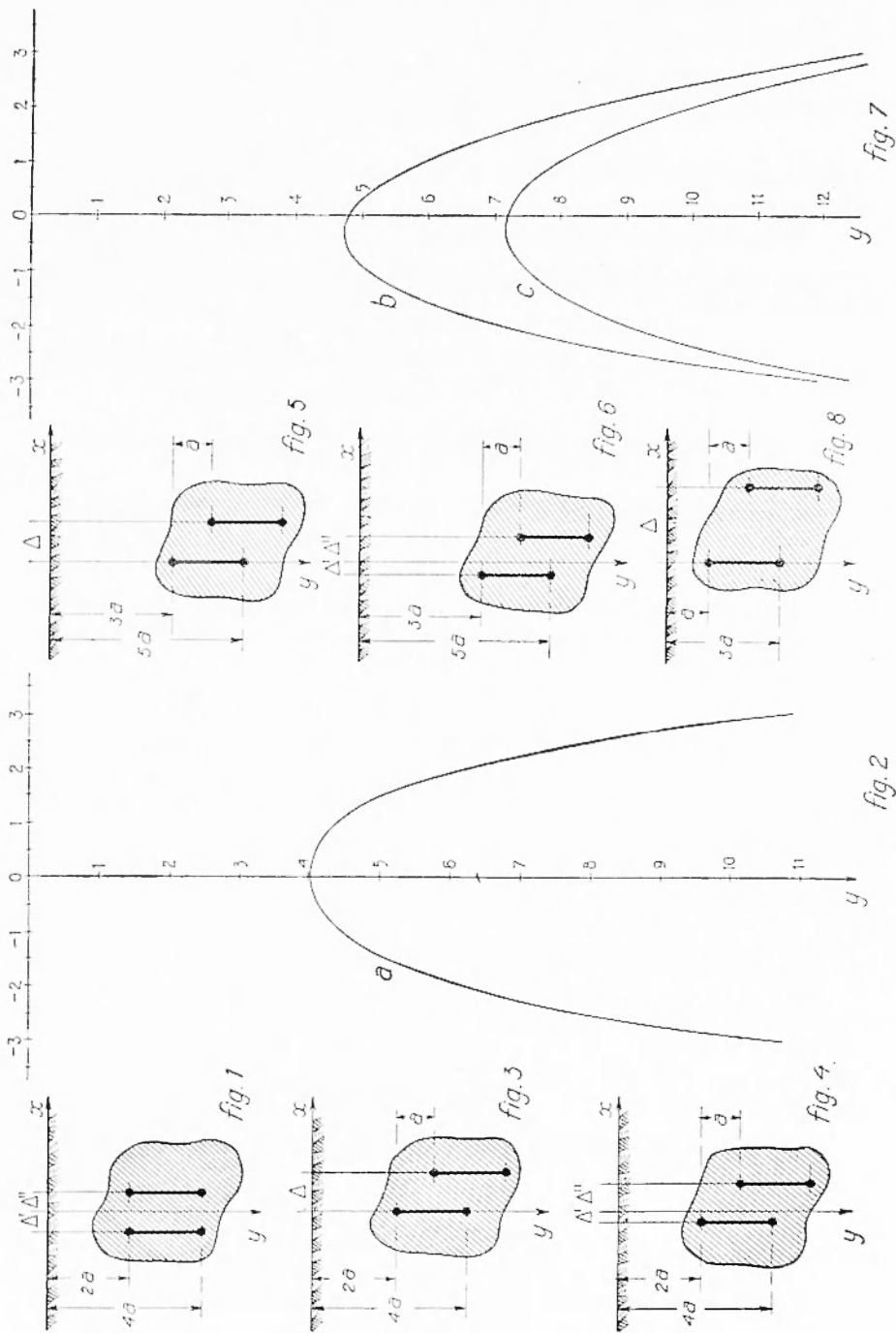
b = profondità della traccia inferiore della 1^{a} spira di ordine zero.

t_r = distanza dall'origine della spira di ordine r^{ma}

$K = \frac{1}{3}$ affondamento dell'estremo superiore della spira.

CASI PARTICOLARI. — A) *Spire alla medesima profondità.* - Consideriamo le spire in piani paralleli normali al piano xy ; questa osservazione vale per tutti i casi che saranno trattati. In fig. 1 si pongono

$$p = 0 \quad a_r = 2a \quad b = 4a \quad \Lambda' = \frac{-1}{2}a \quad \Lambda'' = \frac{1}{2}a \quad K = \frac{1}{3} \quad a_1 = \frac{2}{3}a.$$



Calcolati i vari coefficienti, la espressione della curva assume la forma:

$$y = \frac{2x^8 + 67,33333x^6 + 1075,41666x^4 + 6358,2033x^2 + 15248,42447}{64x^4 + 1312x^2 + 3764} \quad [1]$$

avendo posto la unità di misura a , pari ad uno, uguale per tutti e due gli assi coordinati.

Al variare della posizione di un generico punto sull'asse delle ascisse, abbiamo ottenuto per y i valori corrispondenti riportati nella seguente tabella

x	-3	-2	-1,5	-1	-0,5	0
y	10,68	6,24	5,08	4,42	4,12	4,05
	+0,5	+1	+1,5	+2	+3	
	4,12	4,42	5,08	6,24	10,68	

Nel grafico fig. 2 riportiamo disegnata la curva indicatrice per tale caso.

B) *Spire a profondità diversa* (pendenza uguale ad uno - profondità della traccia più alta della spira superiore $a_t = 2a$). Si pongono (vedere fig. 3)

$$p=1 \quad a_t=2a \quad b=4a \quad \Delta=a \quad k=\frac{1}{3} \quad a_1=\frac{2}{3}a.$$

Calcoliamo, come è consigliato nella nota citata, i coefficienti del solo denominatore.

L'espressione di questo, a meno del fattore moltiplicatore comune $3 \cdot 2a^3$, è:

$$f(x) = 112x^5 - 256ax^4 + 3200a^2x^3 - 4736a^3x^2 + 16576a^4x - 4096a^5 \quad [2]$$

l'equazione ammette quattro radici complesse coniugate ottenibili risolvendo con il metodo del Cardano, ed una radice reale il cui valore approssimato è:

$$a_1 = +0,263473a$$

In corrispondenza di tale radice il valore dell'equazione [2] è:

$$f(a_1) = +0,00054a^5$$

Portiamo a coincidere l'asse delle y con il punto di discontinuità ottenendo il vantaggio di abbassare di un grado le espressioni a nu-

numeratore e denominatore della equazione della « curva indicatrice », in quanto si è logicamente annullato il termine noto del denominatore.

In figura 4 riportiamo la nuova posizione delle spire nei confronti dall'asse delle ordinate.

Risultano (vedere fig. 4).

$$p = 1 \quad b = 4a \quad a_f = 2a \quad \Delta' = -0,263473 \quad \Delta'' = +0,736527 \quad k = \frac{2}{3} a.$$

$$y = \frac{2x^8 - 3,78442x^7 + 98,46628x^6 - 108,77532x^5 + 1796,40979x^4 - 959,80576x^3 + 74,66666x^2 - 72,30317x + 2005,30117x^0 - 15458,03017x^2 - 3125,16198x + 47229,43514}{-1528,53261x + 9820,53320} \quad [3]$$

L'unità di misura è, come prima, uguale per tutti e due gli assi ($a=1$).

La seguente tabella ci dà, a fianco delle x scelte, i corrispondenti valori calcolati per le y :

x	-3	-2	-1,5	-1	-0,5	0
y	12,03	7,16	5,85	5,09	4,76	4,80
	+0,5	+1	+1,5	+2	+3	
	5,18	5,86	6,85	8,22	12,66	

Nel grafico b di fig. 7 riportiamo disegnata la « curva indicatrice » per tale caso.

C) Spire a profondità diversa (pendenza uguale a 1 - profondità della traccia più alta della spira superiore $a_f = 3a$)

Si pongono (vedere fig. 5).

$$p = 1 \quad b = 5a \quad a_f = 3a \quad \Delta = a \quad k = \frac{1}{3} \quad a_f = \frac{3}{3} a.$$

Calcoliamo i coefficienti del solo denominatore per i motivi già esposti nel caso B .

L'espressione del denominatore della « curva indicatrice » è:

$$f(x) = 144x^5 - 336ax^4 + 6432a^2x^3 - 9632a^3x^2 + 58256a^4x - 18000a^5 \quad [4]$$

Il valore approssimativo della radice reale è:

$$a_1 = -0,32253a$$

In corrispondenza di tale radice il valore della equazione [4] è:

$$f(a_1) = +0,00217a^5$$

Portiamo a coincidere l'asse delle y con il punto di discontinuità.

In fig. 6 riportiamo la nuova posizione delle spire dei confronti dell'asse delle ordinate.

Risulta (vedere fig. 6).

$$p=1 \quad b=3a \quad a_c=3a \quad k=a \quad \Delta'=-0,32253a \quad \Delta''=+0,67747a$$

$$y = \frac{2x^8 - 2,83952x^7 + 155,76362x^6 - 128,60826x^5 + 4764,69298x^4 + 141x^3 - 103,7781x^2 + 6148,31172x - 3569,86388x + 1829,19266x^3 + 70413,38610x^2 - 11299,21817x + 388843,75624 + 54012,72692}{[5]}$$

Con la solita osservazione circa l'unità di misura, la tabella seguente ci dà a fianco delle x scelte i corrispondenti valori calcolati per le y .

x	-3	-2	-1,5	-1	-0,5	0
y	12,31	8,99	8,04	7,46	7,194	7,199
	+0,5	+1	+1,5	+2	+3	
	7,45	7,94	8,73	9,81	13,16	

Nel grafico C di fig. 7 riportiamo disegnata la « curva indicatrice ».

D) Spire a profondità diversa (pendenza uguale a $\frac{1}{2}$ - profondità della traccia più alta della spira superiore $a_c=a$).

Si pongono (vedere fig. 8).

$$p = \frac{1}{2} \quad a_c = a \quad b = 3a \quad \Delta = 2a \quad k = \frac{1}{3} \quad a_c = \frac{1}{3} a.$$

Per il denominatore, otteniamo la seguente espressione:

$$f(x) = 40x^5 - 176ax^4 + 944a^2x^3 - 2272a^3x^2 + 2776a^4x - 432a^5 \quad [6]$$

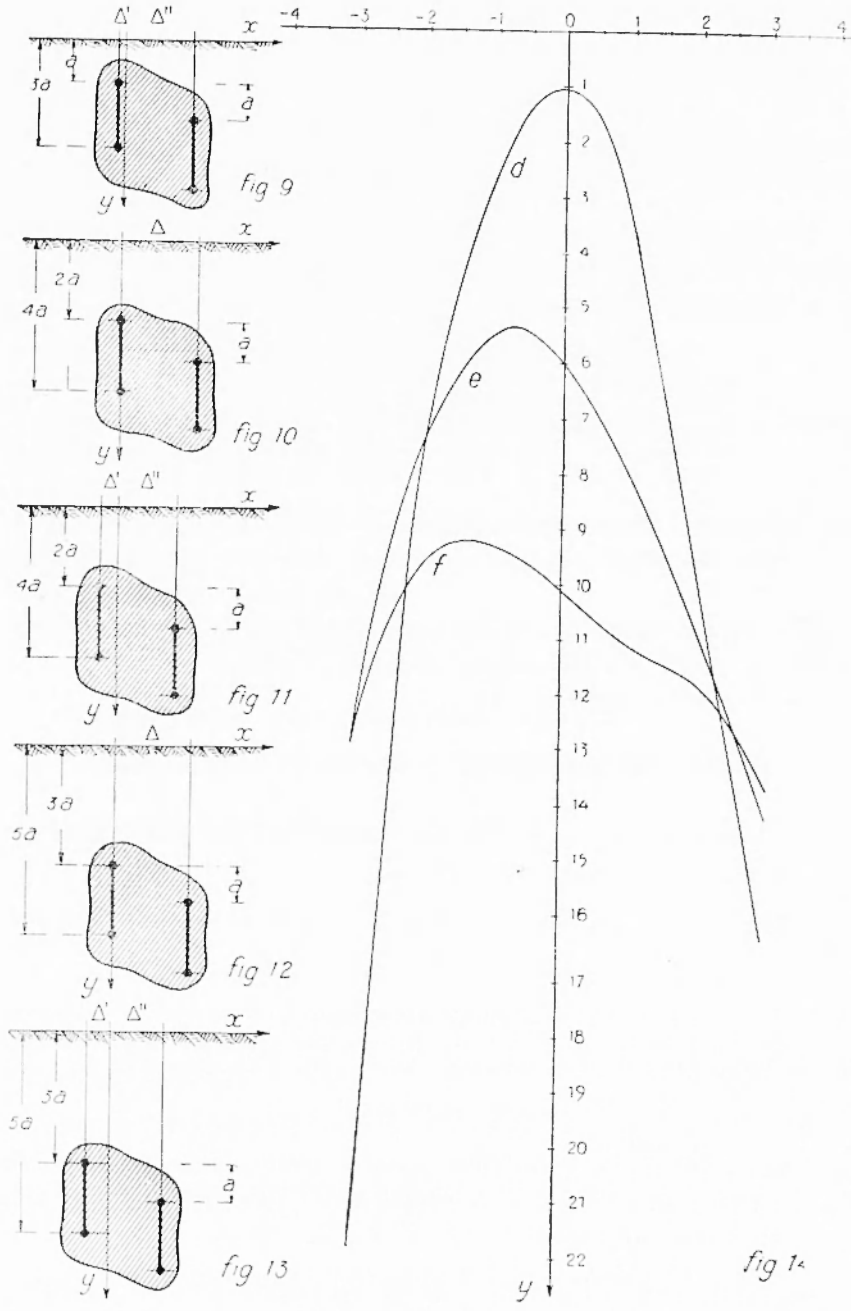
il valore approssimato della radice reale è:

$$\alpha_1 = +0,180296a$$

In corrispondenza di tale radice il valore della equazione [6] è:

$$f(\alpha_1) = +0,000851a^5$$

portiamo a coincidere l'asse delle y con il punto di discontinuità. In fig. 9 è rilevabile la nuova posizione delle spire nei confronti dell'asse delle ordinate e si ha



$$p = \frac{1}{2} \quad a_t = a \quad b = 3a \quad k = \frac{1}{3} a \quad \Delta' = 0,180296 \quad \Delta'' = +1,819704$$

$$y = \frac{2x^8 - 13,11526x^7 + 84,29389x^6 - 251,20352x^5 + 822,27183x^4 - 26,66666x^3 - 93,29391x^3 + 553,38318x^2 - 1357,61246x^3 + 3089,19611x^2 - 1548,96529x + 1399,63652}{-1195,59030x + 1363,25354} \quad [7]$$

Premesso che a è stata assunta come unità di misura uguale per entrambi gli assi coordinati, si sono calcolati i seguenti valori di y in corrispondenza dei valori di x scelti e riportati a fianco

x	-3	-2	-1,5	-1	-0,5	0
y	20,63	7,91	4,65	2,65	1,50	1,03
	+0,5	+1	+1,5	+2	+3	
	1,42	3,40	7,06	10,55	16,40	

Nel grafico $d)$ di fig. 11 riportiamo disegnata la « curva indicatrice » per tale caso.

E) Spire a profondità diversa (pendenza uguale $\frac{1}{2}$ - profondità della traccia più alta della spira superiore $a_t = 2a$).

Si pongono (vedere fig. 10).

$$p = \frac{1}{2} \quad a_t = 2a \quad b = 4a \quad \Delta = 2a \quad k = \frac{1}{3} \quad a_t = \frac{2}{3} a.$$

I coefficienti del denominatore sono riportati nella seguente espressione:

$$f(x) = 74x^5 - 341ax^4 + 2709a^2x^3 - 7082a^3x^2 + 14794a^4x - 5461a^5 \quad [8]$$

il valore approssimato della radice reale è:

$$a_1 = +0,450370a$$

in corrispondenza di tale radice il valore della equazione [8] è:

$$f(a_1) = 0,00164a^5$$

portiamo a coincidere l'asse delle y con il punto di discontinuità. In fig. 11 riportiamo la nuova posizione delle spire nei confronti dell'asse delle ordinate e si ha

$$p = \frac{1}{2} \quad a_t = 2a \quad b = 4a \quad k = \frac{2}{3} a \quad \Delta' = 0,450370 \quad \Delta'' = +1,549630$$

$$y = \frac{2x^8 - 8,79408x^7 + 106,25042x^6 - 257,19794x^5 + 1950,95735x^4 - 74,66676x^4 - 173,19606x^3 + 2245,87500x^2 - -2517,05630x^3 + 17717,46212x^2 - 9029,62255x + 60098,13558}{-3769,25236x + 9953,13980} \quad [9]$$

Assunta a come unità di misura uguale per entrambi gli assi coordinati, si sono calcolati i sottotati valori di y , in corrispondenza dei valori di x scelti e riportati a fianco.

x	-3	-2	-1,5	-1	-0,5	0
y	12,36	7,47	6,26	5,65	5,59	6,13
	+0,5	+1	+1,5	+2	+3	
	6,94	8,17	9,51	10,88	14,40	

Nel grafico $e)$ di fig. 14 riportiamo disegnata la « curva indicatrice » per tale caso.

F) Spire a profondità diversa (pendenza uguale $\frac{1}{2}$ · profondità della traccia più alta della spira superiore $a_1 = 3a$).

Si pongono (vedere fig. 12).

$$p = \frac{1}{2} \quad a_1 = 3a \quad b = 5a \quad \Delta = 2a \quad k = \frac{1}{3} \quad a_1 = a.$$

Il denominatore assume la seguente espressione:

$$f(x) = 144x^5 - 672ax^4 + 7584a^2x^3 - 20800a^3x^2 + 69200a^4x - 36000a^5 \quad [10]$$

il valore approssimato della radice reale è:

$$a_1 = +0,6078211a$$

in corrispondenza di tale radice il valore dell'equazione [10] è:

$$f(a_1) = 0,0010a^5$$

portiamo a coincidere l'asse delle y con il punto di discontinuità. In fig. 13 riportiamo la nuova posizione delle spire nei confronti dell'asse delle ordinate, e si ha

$$p = \frac{1}{2} \quad a_1 = 3a \quad b = 5a \quad k = a \quad \Delta' = -0,60782a \quad \Delta'' = +1,39218a.$$

$$y = \frac{2x^8 - 6,27488x^7 + 156,61298x^6 - 283,01134x^5 + 4821,56842x^4 - 144x^4 - 234,3691x^3 + 6338,17668x^2 - -6245,26675x^3 + 57455,17634x^2 - 28563,4429x + 525440,35678}{-8097,11728x + 51814,94136} \quad [11]$$

Assunta come unità di misura a uguale per entrambi gli assi, coordinati, si sono calcolati i sottonotati valori di y , in corrispondenza dei valori di x scelti e riportati a fianco.

x	-3	-2	-1,5	-1	-0,5	0
y	12,52	9,84	9,369	9,349	9,657	10,11
	+0,5	+1	+1,5	+2	+3	
	10,643	11,063	11,412	11,82	13,62	

Nel grafico f) di fig. 14 riportiamo disegnata la « curva indicatrice » per tale caso.

Conclusioni. — 1) Osserviamo che nel caso delle due spire poste alla medesima profondità, si ottiene una curva simmetrica, nella quale, dato il maggiore approfondimento delle spire stesse, nei confronti del caso trattato dal prof. Aquilina nella nota già citata, sono scomparse le due anse simmetricamente poste, rispetto all'asse delle ordinate.

2) Nei casi esaminati per le spire con pendenza $p=1$, si nota, con l'aumentare della profondità, un appiattimento delle « curve indicatrici », non solo, ma uno spostamento dei minimi (4,76 per la curva b) fig. 7 $a_c=2a$, e 7,194 per la curva c medesima figura, profondità $a_c=3a$, in corrispondenza della ascisse $-0,5$). Lo spostarsi del minimo verso l'ascissa corrispondente alla spira meno affondata, $\Delta' = -0,26$ nel caso B , e $\Delta' = -0,32$ nel caso C , è messo in maggiore evidenza se confrontato con il caso trattato (profondità $a_c=a$) da Aquilina nella pubblicazione citata, in cui si aveva il minimo pari a 2,51 per l'ascissa uguale a zero, essendo $\Delta' = -0,14$.

Inoltre la curva si allontana più rapidamente dall'asse delle ascisse dalla parte della spira più affondata e ciò è d'altra parte intuitivo.

Infatti se affondassimo all'infinito la seconda spira, ci ridurremo ad una sola spira che darebbe luogo alla parabola di Jakosky, simmetrica rispetto all'asse delle ordinate.

3) L'esame dei tre casi D) E) F) in cui si hanno due spire, con pendenza $p=1/2$, che vengono gradualmente affondate a profondità crescenti a_c uguali rispettivamente ad a , $2a$, $3a$, porta alle seguenti conclusioni.

Anche qui si ha appiattimento delle « curve indicatrici » ed uno spostamento dei minimi, 1,03 per l'ascissa 0 e $\Delta' = -0,13$, 5,59 per l'ascissa $-0,5$ e $\Delta' = -0,45$, 9,34 per l'ascissa -1 e $\Delta' = -0,60$, per i casi rispettivamente trattati.

È da notare inoltre l'ansa che presenta la curva f) di fig. 14, relativa al caso in cui l'affondamento è pari a $3a$, dovuta all'attenuarsi dell'effetto sulla zona circostante, dovuto ad ogni singola spira.

Con l'aumentare della profondità si dovrà avere, nell'andamento generico della curva, una esaltazione di questa ansa, e la curva presenterà due minimi accentuati, in corrispondenza delle ascisse relative alle posizioni delle due spire.

*Roma — Istituto di Geofisica Mineraria dell'Università
(Facoltà di Ingegneria) — Gennaio 1949.*

RIASSUNTO

Facendo seguito ad una precedente nota di C. Aquilina, si esamina il comportamento della « curva indicatrice » nel caso di due spire parallele che vengono diversamente poste. I risultati che si ricavano dagli esempi considerati vengono poi opportunamente discussi.