SULLA MISURA DELLA VELOCITÀ DI GRUPPO DELLE ONDE SISMICHE SUPERFICIALI

PAOLO EMILIO VALLE

La misura della velocità di gruppo delle onde sismiche superficiali L ed M viene effettuata mediante l'osservazione, in una o più stazioni, dei tempi di arrivo t_i corrispondenti ai periodi T_i misurati direttamente sui sismogrammi. Si assume come velocità di gruppo relativa al periodo T_i, il rapporto*

$$C(T_i) = \frac{x}{t_i - H} \qquad [1]$$

dove con H si è indicato il tempo origine e con x la distanza epicentrale.

Anche restando entro i limiti del caso unidimensionale, si può impostare più correttamente la teoria della misura e valutare le approssimazioni sottintese dalla [1]. Si consideri una componente qualunque $s = s(t, P)$ dello spostamento dovuto al passaggio di un'onda superficiale nel generico punto P della superficie della Terra.

Per le onde M si può prendere la componente verticale, che appare sufficientemente separata dalle altre fasi a distanze relativamente piccole dall'epicentro.

Se lo strumento collocato nel punto P è per es. uno strumento meccanico, indicando con $\sigma = \sigma(t, P)$ lo spostamento sul sismogramma, si avrà

$$\ddot{\sigma} + 2\varepsilon\,\dot{\sigma} + n^2\,\sigma + V_0\,\ddot{s} = 0 \qquad [2]$$

La durata del passaggio della perturbazione per il punto P è limitata e quindi lo spettro delle frequenze in essa contenute è continuo.

Più precisamente se si definisce la larghezza dello spettro come il minimo intervallo della frequenza entro il quale la sua ampiezza è diversa da zero e come durata del passaggio della perturbazione

(*) V. STONELEY, Geophys. Suppl. III, 262 (1935).

nel punto P l'analogo intervallo di tempo, un noto teorema** assicura che le due grandezze non sono mai entrambe finite.

Pertanto lo spettro di s sarà continuo e (teoricamente) illimitato nel senso ora definito.

Se lo spostamento è dovuto ad un'onda progressiva e si suppone dipendente soltanto da x e t, sarà del tipo

$$s(x,t)=\int_0^\infty A(p,x)\,e^{-kx}\cos(pt-fx-\alpha)\,dp \qquad [3]$$

e quindi per un prefissato valore di x presenterà lo spettro

$$A(p,x)\,e^{-kx}\,e^{-j(fx+\alpha)}=\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} s(x,t)\,e^{-jpt}\,dt \qquad [4]$$

Analogamente per lo spostamento σ sul sismogramma si avrà

$$\sigma(x,t)=\int_0^\infty B(p,x)\cos(pt-\beta)\,dp \qquad [3']$$

$$B(p,x)e^{-j\beta}=\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\sigma(x,t)e^{-jpt}\,dt \qquad [4']$$

Il collegamento dei due spettri si ottiene subito tramite la [2] e risulta

$$B\,e^{-j\beta}\;U\,e^{j\gamma}=A\,e^{-kx}\;e^{-j(fx+\alpha)} \qquad [5]$$

dove si è posto

$$U=\frac{\sqrt{(n^2-p^2)^2+4\varepsilon^2p^2}}{p^2\,V_0}$$

$$\tan\gamma=\frac{2\varepsilon p}{n^2-p^2} \qquad [6]$$

Se si indica con t_0 l'istante, letto sul sismogramma, in cui la fase

(**) V. NEUMANN, Z. S. f. Phys. LVII, 31 (1929).

incomincia ad emergere alla generica distanza x e con τ il tempo contato a partire da tale istante, lo spetto [4'] assume la forma

$$B\,e^{-j\beta} = \frac{1}{\pi}\, e^{-jpt_0} \int_0^{\infty} \sigma(x,\tau)\, e^{-jp\tau}\, d\tau \qquad [4'']$$

e quindi la [5] diviene (senza cambiare i simboli)

$$B\,e^{-j\beta}\, U\, e^{j\gamma}\, e^{-jpt_0} = A\, e^{-kx}\, e^{-j(fx+\alpha)} \qquad [5']$$

nella quale B e β sono date dalla [4''].

$$B = \frac{1}{\pi} \left| \sqrt{\left(\int_0^{\infty} \sigma \sin p\tau\, d\tau\right)^2 + \left(\int_0^{\infty} \sigma \cos p\tau\, d\tau\right)^2}\, \right| \qquad [7]$$

$$\operatorname{tang} \beta = \frac{\int_0^{\infty} \sigma \sin p\tau\, d\tau}{\int_0^{\infty} \sigma \cos p\tau\, d\tau} \qquad [7']$$

Separando la parte reale dal coefficiente dell'immaginario nella [5'], si ottengono le due relazioni

$$B\,U = A\,e^{-kx} \qquad [8]$$

$$fx = pt_0 + \beta - \gamma - \alpha + 2\,m\pi \qquad [9]$$

Mediante i sismogrammi di due stazioni situate alle distanze epicentrali x_1 e x_2 ($x_2 > x_1$), se per es. la funzione A si può esprimere come il prodotto di una funzione della sola x per una funzione della sola p, ossia

$$A(p,x) = \chi(x)\, A'(p) \qquad [10]$$

e se inoltre χ è nota, il coefficiente di assorbimento si calcola in base alla [8] e si ha

$$k = \frac{1}{x_2 - x_1}\, ln \frac{B_1\, U_1\, \chi(x_2)}{B_2\, U_2\, \chi(x_1)} \,. \qquad [11]$$

Per differenza la [9] consente di eliminare α.

$$f(x_2 - x_1) = p\,(t_{02} - t_{01}) + \beta_2 - \beta_1 - \gamma_2 + \gamma_1 + 2\,m\,\pi \qquad [12]$$

La presenza nella [12] *del termine* $2\,m\,\pi$ *lascia peraltro indeterminato il numero delle lunghezze d'onda che, per ogni fissato valore della frequenza, entrano nella distanza compresa tra le due stazioni di osservazione. Ne consegue l'impossibilità essenziale della misura della velocità di fase* (*).

Per la velocità di gruppo la [12] fornisce

$$\frac{1}{C} = \frac{df}{dp} = \frac{(t_{02} - t_{01}) + \dfrac{d\beta_2}{dp} - \dfrac{d\beta_1}{dp} - \dfrac{d\gamma_2}{dp} + \dfrac{d\gamma_1}{dp}}{x_2 - x_1} \qquad [13]$$

Le derivate di β_1 e β_2 si calcolano, in base alla [7'], con la relazione

$$\frac{d\beta_n}{dp} = \frac{\displaystyle\int_0^\infty\!\!\int \tau\,\sigma(x_n,\tau)\,\sigma(x_n,\tau')\cos p(\tau-\tau')\,d\tau\,d\tau'}{\displaystyle\int_0^\infty\!\!\int \sigma(x_n,\tau)\,\sigma(x_n,\tau')\cos p(\tau-\tau')\,d\tau\,d\tau'} \qquad [14]$$

$(n = 1,2)$

Si noti che se non vi è dispersione

$$\frac{d\beta_2}{dp} - \frac{d\beta_1}{dp} - \frac{d\gamma_2}{dp} + \frac{d\gamma_1}{dp} = \text{costante} \qquad [15]$$

Supponendo che nelle due stazioni di osservazione siano stati posti due strumenti identici la [15] diviene

$$\frac{d\beta_2}{dp} - \frac{d\beta_1}{dp} = \text{costante} \qquad [16]$$

perché

$$\frac{d\gamma_1}{dp} = \frac{d\gamma_2}{dp}$$

e quindi in questo caso la costante è nulla se la perturbazione si

(*) Circa l'impossibilità di una definizione operativa della velocità di fase vedi per es. M. Born, « Atomic Physics ».

propaga senza cambiare di forma. La [13] può essere riferita all'impiego di una sola stazione. Posto

$$t_{01} = H \quad , \quad \frac{d\beta_1}{dp} = \frac{\int_0^\infty\!\!\int \tau\, s(0,\tau)\, s(0,\tau')\cos p(\tau-\tau')\, d\tau\, d\tau'}{\int_0^\infty\!\!\int s(0,\tau)\, s(0,\tau')\cos p(\tau-\tau')\, d\tau\, d\tau'}$$

[17]

$$t_{02} = t_0 \quad , \quad x_1 = 0 \quad , \quad x_2 = x \quad , \quad \frac{d\gamma_1}{dp} = 0$$

risulta

$$\frac{1}{C} = \frac{(t_0 - H) + \dfrac{d\beta_2}{dp} - \dfrac{d\beta_1}{dp} - \dfrac{d\gamma_2}{dp}}{x} \qquad [18]$$

nella quale però il termine $d\beta_1/dp$ non è conosciuto.

La durata della perturbazione iniziale è molto piccola rispetto alla durata del passaggio dell'onda superficiale per un punto situato ad una distanza sufficientemente grande dall'epicentro, pertanto

$$\frac{d\beta_1}{dp} << \frac{d\beta_2}{dp} \qquad [19]$$

Nella [18] quindi potrà essere spesso trascurato il termine $d\beta_1/dp$ senza errore sensibile.

La [13] mostra che mediante l'uso di due stazioni è possibile eseguire una misura della velocità di gruppo delle onde superficiali entro zone abbastanza ristrette della superficie della Terra.

Nel caso che si voglia usufruire di un numero maggiore di stazioni, potrà essere opportunamente applicato il metodo dei minimi quadrati.

* * *

Si supponga che l'andamento delle registrazioni sismografiche sia tale da consentire l'approssimazione di σ mediante mezze sinusoidi. Indicando con v_i la distanza tra due successivi passaggi del sismogramma per la linea di riposo, con σ_i la sua ampiezza massima nell'intervallo v_i e con τ_i il tempo d'inizio della semionda, si potrà scrivere genericamente

$$\sigma_i \sin \frac{2\pi}{2v_i}(\tau - \tau_i) \qquad [20]$$

Lo spettro sarà dato pertanto dall'espressione

$$\frac{1}{\pi}\int_0^{\infty} \sigma e^{-jp\tau} d\tau = \frac{1}{\pi}\sum_{i\,0}^{n} \sigma_i \int_{\tau_i}^{\tau_i+v_i} \sin\frac{\pi}{v_i}(\tau-\tau_i)\, e^{-jp\tau} d\tau$$

[21]

nella quale la somma va estesa a tutte le $n+1$ semionde che abbiano un'ampiezza sensibile e si è posto $\tau_0 = 0$.

Un calcolo elementare fornisce

$$\frac{1}{\pi}\int_0^{\infty} \sigma e^{-jp\tau} d\tau = \frac{1}{\pi}\sum_{i\,0}^{n} \sigma_i e^{-jp\tau_i'} \left\{ \frac{\sin\left[(p_i-p)\frac{v_i}{2}\right]}{p_i-p} + \frac{\sin\left[(p_i+p)\frac{v_i}{2}\right]}{p_i+p} \right\}$$

[22]

con le posizioni:

$$p_i = \frac{\pi}{v_i} \quad , \quad \tau'_i = \tau_i + \frac{v_i}{2}$$ [23]

e quindi il tempo τ_i' rappresenta l'istante in cui la generica semionda che approssima il sismogramma raggiunge il suo valore massimo.

La [22] può anche scriversi nella forma

$$\frac{2}{\pi}\sum_{i\,0}^{n} \sigma'_i \, Y_i \, e^{-jp\tau'_i}$$ [24]

dove

$$Y_i = \frac{\cos\left[\frac{\pi}{2}\left(\frac{p}{p_i}\right)\right]}{1-\left(\frac{p}{p_i}\right)^2} \quad , \quad \sigma'_i = \frac{\sigma_i}{p_i}$$ [24']

e quindi

$$\frac{d\beta}{dp} = \frac{\sum_{is\,0}^{n} \tau_i'\sigma_i'\sigma_s' Y_i Y_s \cos p(\tau_i'-\tau_s') + \sum_{is\,0}^{n} \sigma_i'\sigma_s' Y_i \frac{dY_s}{dp} \sin p(\tau_i'-\tau_s')}{\sum_{is\,0}^{n} \sigma_i'\sigma_s' Y_i Y_s \cos p(\tau_i'-\tau_s')}$$

[25]

Il secondo termine a numeratore della [25] sarà generalmente trascurabile di fronte al primo.

Se si fissa l'attenzione su una generica semionda di ampiezza σ_i e si prende $T = T_i = 2v_i$ risulterà

$$\frac{d\beta}{dp} = \tau_i'$$

soltanto se si trascurano nella [25] *tutti i contributi dovuti alle altre semionde.*

In seguito a tale approssimazione, essendo

$$t_i = t_0 + \tau_i'$$

dalla [18], nella quale si ponga $d\beta_1/dp = 0$, $d\gamma_2/dp = 0$, risulta

$$C(T_i) = \frac{x}{t_i - H} \qquad [1]$$

che è la relazione comunemente adoperata.

Se la perturbazione è contenuta in un intervallo di tempo non troppo grande rispetto al periodo medio delle semionde in essa contenute e ci si riferisce al periodo associato al massimo dell'ampiezza, la [1] può anche essere sufficientemente approssimata.

Se ciò non avviene le velocità che mediante la [1] vengono attribuite alle varie frequenze, presenteranno, in genere, un errore per eccesso per i periodi più lunghi e per difetto per i periodi più brevi, dato il tipo di dispersione che si riscontra nelle onde sismiche superficiali.

Le precedenti considerazioni potrebbero essere generalizzate estendendole con dovuti accorgimenti anche alle onde spaziali.

Roma — Istituto Nazionale di Geofisica — luglio 1949.

RIASSUNTO

Viene impostata la teoria della misura della velocità di gruppo delle onde sismiche superficiali nel caso unidimensionale. Si pongono inoltre in evidenza le approssimazioni sottintese nel procedimento comunemente seguito per l'esecuzione della predetta misura.