

# LE SESSE DEL LAGO DI ISEO

FRANCESCO PERONACI

## PARTI II: SESSE CHE INTERESSANO L'INTERO LAGO E PROVE CON IL MODELLO

In una precedente nota sono stati calcolati con i metodi di Defant e di Hidaka i valori relativi alle sesse uni-bi-trinodale per il lago d'Iseo. I risultati ottenuti sono riassunti nella seguente tabella:

Sesse interessanti l'intero lago					
Tipo	Periodi		Distanza dei nodi dall'estremo Nord (km)		
	Defant	Hidaka	Defant		Hidaka
Uninodale . . .	25 <sup>m</sup> .70	25 <sup>m</sup> .97	14 <sup>m</sup> .91		15 <sup>m</sup> .43
Binodale . . .	16 .20	14 .55	10.21	20.81	8.92 19.71
Trinodale . . .	10 .75	9 .16	1.93	16.39 21.70	3.18 12.48 20.85

Dall'esame dei dati si nota subito che i due metodi adoperati hanno condotto per la uninodale a risultati praticamente identici (differenza dell'1%) mentre per la binodale e la trinodale l'accordo è soddisfacente, specialmente se si tiene conto della forma irregolare del bacino (differenze dell'11% e del 15% circa).

Se si tiene ora presente la cartina riportata nella nota su accennata si può rilevare che le sesse uni e trinodale possono aver luogo, mentre la binodale ben difficilmente potrà verificarsi; infatti la zona dei massimi spostamenti verticali (zona ventrale) compresa fra i due binodi, cade a Sud di Montisola proprio dove il lago si restringe deviando bruscamente da Nord a Ovest.

Rimane ora da verificare quale accordo esista tra i risultati ot-

tenuti per via analitica e la realtà; purtroppo a questo proposito dobbiamo osservare che fino ad oggi non sono state mai effettuate delle registrazioni limnologiche sul Sebino e che quindi non possiamo valerci di alcun dato diretto di osservazione. Rimandando di conseguenza la questione al giorno in cui saremo in possesso del materiale sperimentale necessario, abbiamo voluto tuttavia eseguire una serie di prove su modello appositamente costruito in questo Istituto a cura del prof. Aquilina.

Il modello è stato ricavato da una carta batimetrica al 50.000 (la stessa di cui ci siamo serviti per l'esecuzione dei calcoli) edita dall'Istituto Geografico De Agostini, e i rapporti nei quali vengono a trovarsi le sue dimensioni orizzontali e verticali rispetto alla realtà sono di 1:20.000 e 1:2.000 rispettivamente.

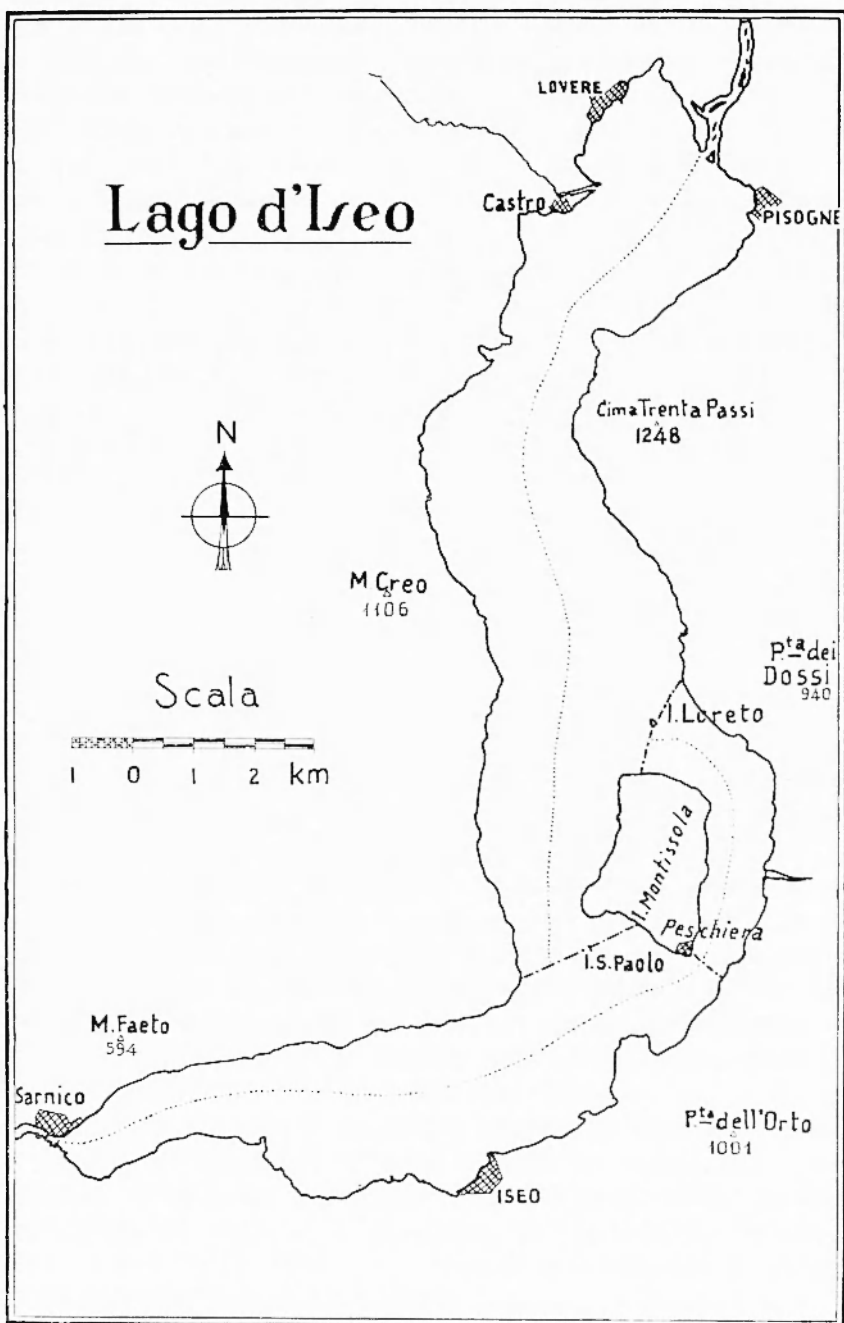
Il passaggio dai dati sperimentalmente ottenuti su di esso ai valori reali è ottenuto applicando il principio di similitudine di Harris il quale, purché i rapporti tra le dimensioni si mantengano costanti, e si supponga che si tratti di moti di piccola componente verticale, conduce alla formula

$$T = T_0 \sqrt{\frac{b}{a}} \quad [1]$$

ove  $T$  e  $T_0$  sono rispettivamente i periodi del moto oscillatorio del liquido nel modello e nel bacino reale,  $a$  e  $b$  i rapporti delle dimensioni orizzontali e verticali dei bacini stessi. Nel nostro caso detto rapporto vale 0,0022361.

L'acqua del modello è stata posta in oscillazione con due artifici e precisamente, sia sollevando il modello ad un estremo, sia imprimendo a quest'ultimo delle oscillazioni mediante un pendolo ad esso accoppiato rigidamente, dopo di aver posta la base del modello su due rulli di ottone a loro volta poggianti su una superficie piana e perfettamente orizzontale. Notiamo che nel primo caso l'acqua compie delle oscillazioni con quel periodo che è proprio del sistema e che gli è più spontaneo (uninodale), mentre col secondo metodo, quando il periodo del pendolo è prossimo a quello di una armonica della fondamentale del nostro sistema, le oscillazioni delle acque si smorzano molto lentamente e si verificano i fenomeni di risonanza (aumento dell'ampiezza di oscillazione e passaggio di energia dal pendolo al sistema e viceversa).

Con i metodi su accennati abbiamo eseguito un gran numero di prove ottenendo i seguenti risultati:



1) La sessa uninodale non è quasi mai comparsa o al massimo, si è limitata ad una sola mezza oscillazione in modo tale da non permettere il rilevamento né del periodo né della posizione dell'uninodo.

2) La binodale non si è mai verificata.

3) È stata notata una sessa con periodo medio di 1,23 sec che corrisponde al valore reale di 9<sup>m</sup>,17. Detta sessa, che è la trinodale, presentava due zone nodali (zone dei massimi spostamenti orizzontali delle particelle) in corrispondenza del 4° e del 22° km rispettivamente, a partire dall'estremo Nord del Lago. Facciamo osservare che allo scopo di porre in evidenza le linee nodali avevamo cosparsa la superficie dell'acqua di polvere di alluminio.

4) Sollevando il modello da un lato e facendo compiere alle acque libere oscillazioni, si osservava un'oscillazione con periodo di 3,25 sec; detta oscillazione si smorzava molto rapidamente nella zona Nord del Lago mentre permaneva a lungo nel bacino Sud.

5) Nel canale di Sale è stata osservata una sessa con un periodo di 0,85 sec.

L'applicazione della [1] ci conduce ai seguenti valori:

$$T = 24,^m22 \quad T = 6,34$$

Per quanto riguarda la trinodale facciamo osservare che il metodo di Hidaka ci aveva fornito un periodo di 9<sup>m</sup>,16; l'accordo dei periodi è quindi perfetto e altrettanto può dirsi per la posizione dei due trinodi esterni. Passando all'esame della sessa di 24<sup>m</sup>,22 osservavamo che non solo essa era minore di più di un minuto del periodo teorico dell'uninodale, ma che interessava particolarmente il bacino Sud dando luogo ad una nettissima linea nodale a circa 3 km dall'estremo Sud del lago; questi fatti ci hanno fatto sospettare che essa avesse origine in una zona del lago e precisamente fosse caratteristica del bacino Sud.

Da quanto è stato esposto e osservando la forma estremamente sinuosa del Sebino, sbarrato quasi a metà dall'Isola di Montisola, siamo autorizzati a ritenere che, escluso per la trinodale, le sesse interessanti l'intero lago abbiano poca probabilità di venir registrate, mentre che giuochino un ruolo di primaria importanza quelle che si riferiscono a parti del lago stesso. Del resto, anche da un sommario esame della carta batimetrica sorge spontaneo dividere il Sebino in 3 parti e precisamente:

1) Il bacino Nord, limitato a Sud dalla costa meridionale dell'Isola di Montisola e dall'Isola di S. Paolo.

TABELLA II

Sezione	Distanze km	$v(x)$ $10^3 \text{ m}^2$	$\sigma(x)$ $10^6 \text{ m}^3$	$z = \frac{v}{a}$	$\frac{M_{\infty}}{z^2 (1-z^2)} \Delta z$ $\frac{M_{\infty}}{\sigma(z)}$	$Mz$	$Mz^2$	$Mz^3$	$Mz^4$
0									
1	1	950	12,30	0,04522	0,06833	0,00309	0,00014	0,00001	0,00000
2	2	2107,5	12,60	0,10032	0,35609	0,03572	0,00358	0,00036	0,00004
3	3	3232,5	17,08	0,15387	0,72456	0,11149	0,01715	0,00264	0,00041
4	4	4932,5	105,38	0,23480	0,24787	0,05820	0,01367	0,00321	0,00075
5	5	7745,0	271,38	0,36968	0,26725	0,09853	0,03633	0,01339	0,00494
6	6	10370,0	319,18	0,49363	0,22357	0,11036	0,05448	0,02689	0,01327
7	7	12970,0	400,40	0,61740	0,17248	0,10694	0,06575	0,04059	0,02555
8	8	15295,0	477,12	0,72807	0,09093	0,06620	0,04828	0,03509	0,02156
9	9	17582,5	461,25	0,83696	0,04395	0,03678	0,03072	0,02376	0,00984
10	10	19320,0	328,00	0,91967	0,01375	0,01265	0,01163	0,01070	0,00000
11	11	21007,5	33,00	1,00000	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000
					2,20883	0,63851	0,28144	0,15864	0,10142
					$I_0$	$I_1$	$I_2$	$I_3$	$I_4$

2) Il canale di Sale.

3) Il bacino Sud comprendente la restante parte del lago.

Abbiamo quindi ritenuto necessario studiare separatamente l'andamento dei tre bacini, applicando ad essi i metodi di calcolo già illustrati nella precedente nota.

*Sesse che interessano il bacino Sud.* — Usando la carta batimetrica, furono tracciate a partire dall'estremo Sud, 11 sezioni orizzontali con direzione normale alla linea di valle del bacino in questione e, costruite le corrispondenti sezioni verticali, si calcolarono con un planimetro le aree  $V(x)$  e  $S(x)$  delle medesime. Fu quindi applicato il metodo di Hidaka (vedi tab. 2).

L'equazione dei periodi è:

$$791,082 \lambda^3 - 23,049 \lambda^2 + 0,11793 \lambda - 0,00095238 = 0$$

che risolta fornisce le radici

$$\lambda_1 = 0,00099141 \quad \lambda_2 = 0,0053750 \quad \lambda_3 = 0,0226566$$

cui corrispondono i periodi

$$T_{10} = 22^m,28 \quad T_{20} = 9^m,56 \quad T_{30} = 4^m,67$$

relativi alle sesse uni-bi-trinodale rispettivamente.

E da notarsi che il calcolo è stato effettuato considerando il bacino chiuso agli estremi e quindi è necessario applicare una correzione ai valori trovati per ricondurci al caso reale. La correzione è data, per la uninodele, dalla formula

$$T_{1c} = T_{10} \left( 1 + 4 P \frac{b}{l} \right)^{\frac{1}{2}} \quad [2]$$

ove  $T_{1c}$  è il periodo corretto,  $T_{10}$  quello ricavato dal metodo suesposto,  $b$  la larghezza della bocca,  $l$  la lunghezza della linea di valle fino alla bocca,  $P$  si ottiene dalla relazione

$$P = \frac{1}{2\pi} \left( \frac{3}{2} - \gamma - \log_e \frac{\pi b}{2l} \right)$$

ove  $\gamma = 0,5772$  è la costante di Mascheroni. Ora il bacino Sud comunica con il restante del lago con due bocche, una all'altezza dell'isola di Montisola mentre l'altra è in comunicazione con il canale di Sale. La prima, disposta parallelamente alla direzione del moto delle particelle, non apporta alcuna modifica al fenomeno oscillatorio e

quindi basterà applicare la [2] solo alla seconda. Eseguiti i calcoli si è ottenuto per la uninodale:  $T_{1c} = 22,28 \times 1,075 = 23^m, 95$ , valore che coincide praticamente con quello trovato sul modello. Resta quindi accertato che la sessa di 24 minuti prende origine nel bacino Sud del Lago.

La correzione di bocca per la binodale si può ottenere dalla semplice relazione

$$\frac{T_{1c}}{T_{2c}} = \frac{T_{10}}{T_{20}}$$

ove il significato dei simboli è evidente: si ha quindi immediatamente  $T_{2c} = 10^m, 28$ . Per la trinodale, data la ristrettezza della bocca, non si è apportata alcuna correzione assumendo quindi direttamente il valore non corretto di  $4^m, 67$ .

La determinazione delle linee nodali ha dato luogo alle tre seguenti equazioni di condizione

$$4,983390 z^3 - 9,658797 z^2 + 5,94750 z - 1 = 0 \text{ per la uninodale}$$

$$18,164003 z^3 - 32,035185 z^2 + 14,274786 z - 1 = 0 \text{ per la binodale}$$

$$46,176648 z^3 - 60,082755 z^2 + 18,966828 z - 1 = 0 \text{ per la trinodale}$$

ne consegue che le posizioni in km dei nodi sulla linea di valle sono rispettivamente, a partire dall'estremo Sud del Lago

uninodale 4.264

binodale 1,736 : 6.781

trinodale 1.372 : 5.186 : 9.107

Facciamo notare subito che per quanto si riferisce alla trinodale, dato che il trinodo più a nord cade all'altezza dell'imboccatura del bacino Nord, essa non potrà in nessun modo aver luogo. Prima dell'applicazione del metodo di Hidaka avevamo eseguito un tentativo con quello di Defant che nel nostro caso, dato il piccolo numero delle sezioni è di rapida applicazione (vedi tab. III).

Si era ottenuto per il periodo della uninodale il valore 21.68 minuti che, applicando la correzione di bocca, diviene  $T_{1c} = 23.37$  in ottimo accordo con il risultato fornito dall'altro metodo. Come è noto l'ultima colonna della tab. III ci dà l'andamento delle ampiezze della sessa rispetto ad uno spostamento verticale inizialmente arbitrariamente eseguito; ne deriva che la posizione della linea nodale a partire dall'estremo considerato è di km 3,415, inferiore di 849 metri del valore

TABELLA III

 $T = 21^m.68$ 

Sezioni	$a\lambda x \cdot 10^6$	$q = 2\eta_0 F(x) / 10^{10} \text{ cm}^2$	$2\xi_0$	$2\Delta\eta_0$	$\Sigma\eta_{0i} \text{ (cm)}$
0	0	0	0	0	+ 100,00
1	2378,33	+ 95,00	— 7,9167	— 18,83	81,17
2	»	188,95	— 11,5316	— 34,57	46,60
3	»	241,38	— 17,2414	— 41,01	5,59
4	»	250,88	— 5,6543	— 13,45	— 7,86
5	»	228,77	— 1,9936	— 4,74	— 12,60
6	»	195,69	— 1,3812	— 3,29	— 15,89
7	»	154,38	— 0,8425	— 2,00	— 17,89
8	»	112,79	— 0,5792	— 1,38	— 19,27
9	»	68,71	— 0,2681	— 0,64	— 19,91
10	»	34,12	— 0,2133	— 0,51	— 20,42
11	»	— 0,31			

ottenuto con il metodo di Hidaka; anche qui l'accordo tra i due metodi è soddisfacente.

Siamo passati ad eseguire una serie di osservazioni sul modello, isolando il bacino Sud mediante sbarramenti alle due bocche; la media delle osservazioni sul modello ci ha fornito per la uninodale il periodo di 3,08 minuti cui corrisponde nella realtà un periodo di 22,85 minuti (col calcolo si è ottenuto 22,28). Abbiamo quindi posto il bacino in comunicazione con il canale di Sale ottenendo il valore 3,24 cioè 24,14 minuti. Questi risultati ci autorizzano a confermare l'ipotesi fatta precedentemente, in base ai dati analitici del metodo di Hidaka, e ci offrono anche una conferma sperimentale della buona approssimazione cui si giunge applicando la correzione di bocca data dalla [2]. La posizione dell'uninodo è risultata nel modello di circa 5 km dall'estremo Sud del bacino; essa concorda con quanto si era trovato con i calcoli (Hidaka), confermando il fatto che il metodo di Defant tende a spostare la posizione dei nodi verso l'estremità del Lago.

*Canale di Sale.* — È noto che in un canale non è possibile il verificarsi di sesse, ma nel nostro caso, se esaminiamo la carta batimetrica, notiamo come esso sia praticamente ostruito a Nord, all'altezza dell'isola Loreto, da un bassofondo che, ad una profondità medi di circa 20 metri congiunge l'Isola con la sponda sinistra. Tra Montisola e Lereto, poi, il fondo del Lago ha la forma di una valle poco profonda con pendenza circa del 10%, e solo in un tratto molto ri-

stretto, le acque profonde del canale comunicano con il restante del Lago. In base a queste considerazioni resta giustificato il nostro tentativo di applicare al canale i metodi analitici già usati, tenendo conto solamente della bocca Sud situata all'altezza di Peschiera. Abbiamo quindi, a partire dall'estremo Nord del bacino, tracciato 9 sezioni normali alla linea di valle, e, applicato il metodo di Defant (vedi tab. IV), abbiamo ottenuto il valore di  $T_0 = 5.67$  minuti che con l'applicazione della correzione di bocca conduce al periodo di 6.17 per la sessa uninodale. Dalla tabella si nota anche che la linea nodale cade circa nella regione mediana del bacino.

TABELLA IV

 $T = 5^m.67$ 

Sezioni	$Ax$	$S(x)$	$Ac(x)$	$\alpha Ax$	$q$	$2\xi_0$	$2\eta_0$	$2\eta_{0i}$
	$10^7$ cm	$10^6$ cm <sup>2</sup>	$10^8$ cm <sup>2</sup>	$10^{-6}$	$10^{10}$ cm <sup>3</sup>			
0	0	0	0	0	0	0	0	— 100.00
1	50	787	61.25	17106.2	61.25	— 0.7777	— 13.51	186.16
2	50	610	48.75	»	103.10	— 1.6950	— 29.50	56.96
3	50	705	47.50	»	130.16	— 1.8505	— 32.21	21.75
4	50	765	57.50	»	111.69	— 1.8913	— 32.92	— 8.17
5	50	700	55.00	»	110.20	— 2.0028	— 31.86	13.03
6	50	685	42.50	»	121.99	— 1.7808	— 31.00	71.03
7	50	680	45.00	»	88.68	— 1.3011	— 22.70	96.73
8	50	110	45.00	»	11.95	— 1.0216	— 17.78	114.51
9	50	385	37.50	»	2.01			

A conferma di questi risultati abbiamo sul modello isolato il canale di Sale e ottenuto un periodo di 0.75 sec corrispondente a 5.52 minuti, mentre tenendo aperta la bocca Sud del bacino si ottiene 0.85 sec pari a minuti 6.34; come si vede l'accordo con l'esperienza è ottimo e analoga conferma è stata fornita anche per la linea nodale.

Nell'esecuzione dei calcoli non si è ritenuto necessario applicare anche il metodo di Hidaka dato che la forma del canale è praticamente rettangolare e quindi molto vicina alle ipotesi che si fanno per l'applicazione del metodo di Defant. Del resto quest'ultimo ha dato un risultato più che soddisfacente.

*Bacino Nord.* — Rimane ora da esaminare il comportamento del bacino Nord del Lago. Dalla prima esperienza eseguita sul modello si era notato, come si è visto, l'esistenza in questa zona della sessa

T = 11<sup>m</sup>, 14

TABELLA V

Sezioni	$\Delta x$ $10^3$ cm	$S(x)$ $10^6$ cm <sup>2</sup>	$\Delta r(x)$ $10^8$ cm <sup>2</sup>	$\alpha \Delta x$ $10^{-5}$	$q$ $10^{10}$ cm <sup>3</sup>	$2\xi_0$	$2\Delta u_0$	$2\eta_{oi}$
0	0	0	0	0	0	0	0	+ 100,00
1	100	3110	358,75	9007,82	358,75	- 1,1125	- 10,29	89,71
2	200	2910	256,75	»	589,08	2,0243	18,23	71,48
3	300	3502,5	218,25	»	745,09	2,1274	19,16	52,32
4	350	5025	118,25	4503,91	806,96	2,6676	12,46	39,86
5	400	2825	103,75	»	848,31	3,0028	13,52	26,34
6	500	3595	173,75	9007,82	891,08	2,4870	22,40	3,91
7	600	6085	275,00	»	901,92	1,4871	13,40	- 9,16
8	700	6512,5	310,00	»	875,59	1,3444	12,11	21,75
9	800	6045	272,50	»	816,81	1,3512	12,17	33,71
10	900	6630	329,00	»	705,81	1,0646	9,59	43,33
11	1000	5600	295,00	»	577,99	1,0321	9,30	52,63
12	1025	5510	71,25	2251,95	540,49	0,9809	2,21	54,81
13	1050	6140	68,75	»	502,79	0,8189	1,81	56,68
14	1075	4803	80,00	»	457,45	0,9524	2,11	58,82
15	1100	4655	62,50	»	420,69	0,9037	2,01	60,86
16	1125	4300	57,50	»	385,70	0,8970	2,02	62,88
17	1150	4185	57,50	»	349,51	0,8352	1,88	64,76
18	1200	4050	125,00	4503,91	368,59	0,6632	2,99	66,75
19	1250	3538	112,50	»	193,50	0,5169	2,46	69,21
20	1300	2775	91,25	»	130,35	0,4697	2,12	71,33
21	1325	2108	38,75	2251,95	102,71	0,4872	1,10	72,43
22	1350	2440	52,50	»	64,68	0,2651	0,60	73,03
23	1375	1695	31,25	»	41,86	0,2470	0,56	73,59
24	1400	1500	30,00	»	19,78	0,1318	0,30	73,89
25	1425	1220	23,75	»	2,23			

trinodale e di un'onda di 24.22 minuti che però si smorzava molto rapidamente. Abbiamo quindi determinato con il metodo di Defant il periodo proprio del bacino, eseguendo il rilevamento dei dati necessari per il calcolo su 25 sezioni orizzontali e verticali. Il calcolo ci ha fornito (tab. VI,  $T=11^m.14$ ; correzione di bocca 0.78; periodo della sessa uninodale del bacino aperto 11.92 minuti; naturalmente non abbiamo tenuto conto del canale di Sale. Dalle prove eseguite sul modello abbiamo ottenuto, sbarrando il lago all'altezza della bocca, 1.75 sec pari a minuti 13.01 con una linea nodale situata in prossimità del 5° km dall'estremo Nord della linea di valle. Abbiamo anche verificato che sbarrando completamente il canale di Sale non si alterava il periodo della sessa, confermando quindi l'ipotesi fatta che detto canale fosse da considerare completamente chiuso all'altezza dell'isola di Loreto.

Concludendo possiamo ritenere che la sessa di 24.22 minuti, che si riscontra anche nel bacino Nord, sia un'oscillazione forzata delle acque di detto bacino, imposta ad esse dalla parte Sud del lago.

*Roma — Istituto Nazionale di Geofisica — Marzo 1949.*

### RIASSUNTO

*Si confrontano i dati sperimentali, relativi alle sesse uni-bi-trinodale, ottenuti su un modello del lago di Iseo con i risultati analitici riportati in una precedente nota. Si pongono in rilievo alcune sesse interessanti solo determinati bacini del lago, facendo risultare il pieno accordo tra l'indagine analitica e le osservazioni.*

### BIBLIOGRAFIA

- PERONACI F.: *Le sesse del lago di Iseo*. Parte I, « Annali di Geofisica », II, 2 (1949).  
CALOI P.: *Le sesse del lago di Garda*. Parte III, « Annali di Geofisica », II, 1 (1949).