

LE SESSE DEL LAGO DI GARDA

PIETRO CALOI

PARTE PRIMA

SESSE CHE INTERESSANO L'INTERO LAGO

Le ipotesi che generalmente si fanno nelle teorie idrodinamiche delle sesse possono così riassumersi: lunghi bacini (canali) di larghezza e profondità variabili; componente laterale del movimento orizzontale, normale alla linea di valle, trascurabile, ciò che presuppone il moto orizzontale verificarsi soltanto parallelamente all'asse x , che, in corrispondenza della linea di valle, sta nel piano orizzontale costituito dalla superficie libera del lago in quiete. Queste ipotesi si ritengono praticamente soddisfatte se non si verificano brusche variazioni né in larghezza e profondità, né lungo la linea di valle.

Si ritiene inoltre che lo spostamento verticale η delle particelle d'acqua dipenda soltanto da x e dal tempo t ; conseguentemente esse è uguale per tutte le particelle che si trovano, in un dato istante, in una sezione verticale $S(x)$ del lago, normale all'asse x .

Per onde lunghe, rispetto alla lunghezza d'onda delle quali la profondità h del bacino sia piccola, l'accelerazione verticale si ritiene trascurabile. Conseguenza di questa ipotesi è che soltanto la pressione idrostatica risulta dinamicamente efficace; sono quindi da considerare soltanto le variazioni di pressione derivanti dalle variazioni di livello. Naturalmente, anche gli spostamenti orizzontali ξ sono uguali per tutte le particelle di una stessa sezione trasversale $S(x)$.

Infine, la supposizione, generalmente realizzata nei bacini naturali, che ritiene i dislivelli η piccoli rispetto alle profondità h , comporta la soppressione del termine $u_x \frac{\partial u_x}{\partial x}$ nell'equazione idrodinamica fondamentale di Eulero; per cui l'equazione del movimento in un bacino generico assume la forma

$$\frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} = -g \frac{\partial u}{\partial x} \quad [1]$$

L'equazione di continuità esprime che l'eccedenza dell'acqua entrante su quella uscente dallo strato di spessore δx , compreso fra le sezioni $S(x)$ e $S(x + \delta x)$ genera il dislivello alla superficie dello strato stesso. L'equazione di continuità, se $b(x)$ significa la larghezza variabile del bacino, misurata alla superficie libera, diventa

$$\eta = - \frac{1}{b(x)} \frac{\partial}{\partial x} \left[S(x) \cdot \xi \right]. \quad [2]$$

La soluzione di queste equazioni conduce ad un problema ai limiti di 2. ordine; il quale, notoriamente, ha soluzioni soltanto per determinati autovalori di un parametro. Nel nostro caso, questi valori sono i periodi delle possibili oscillazioni libere.

G. Chrystal (1) trasforma le equazioni [1] e [2] mediante l'introduzione delle variabili

$$u = \xi \cdot S(x) \quad [3]$$

e

$$v = \int_0^x b(x) \cdot dx. \quad [4]$$

u rappresenta il volume del liquido che attraversa la sezione $S(x)$ in forza dello spostamento orizzontale ξ , mentre v esprime l'area, calcolata sulla superficie libera, della superficie limitata da quella sezione e dall'estremo $x=0$.

Si ha

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = S(x) \frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2}; \quad \frac{\partial u}{\partial v} = \frac{\partial u}{\partial x} \frac{dx}{dv} = \frac{1}{b(x)} \frac{\partial u}{\partial x};$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial v^2} = \frac{\partial}{\partial x} \left[\frac{1}{b(x)} \frac{\partial u}{\partial x} \right] \frac{dx}{dv} = \frac{1}{b(x)} \frac{\partial}{\partial x} \left[\frac{1}{b(x)} \frac{\partial [S(x) \cdot \xi]}{\partial x} \right].$$

Dalle (1), (2) consegue

$$\frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} = \sigma \frac{\partial}{\partial x} \left[\frac{1}{b(x)} \frac{\partial [S(x) \cdot \xi]}{\partial x} \right].$$

Moltiplicando per $S(x)$ e ponendo

$$S(x) \cdot b(x) = \sigma(v),$$

dove x risulta, per la [4], funzione di v , si ottengono le equazioni di movimento e di continuità sotto la forma

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = g \sigma(v) \frac{\partial^2 u}{\partial v^2}; \quad [5]$$

$$\eta = -\frac{\partial u}{\partial v}. \quad [6]$$

Se u è rappresentabile mediante la somma di una serie di semplici funzioni armoniche di t ,

$$u = \sum_i U_i(v) \sin \omega_i(t-t_i), \quad \omega_i = \frac{2\pi}{T_i}$$

l'equazione di Chrystal assume la forma

$$\sigma(v) \frac{d^2 u}{dv^2} + \frac{4\pi^2}{gT^2} u = 0. \quad [7]$$

La curva rappresentata dalla funzione $\sigma(v)$ fu detta da Chrystal *curva normale* del bacino d'acqua: essa ha per ordinate i valori di $S(x).b(x)$ e per ascisse i valori di $\int b(x) dx$.

La determinazione delle oscillazioni libere nei laghi è quindi ricondotta alla risoluzione di un'equazione differenziale omogenea del second'ordine, con certe condizioni agli estremi. Chrystal ha risolto la [7] in molti casi particolari, nei quali la curva normale può identificarsi con una curva analitica o tratti raccordati di curve analitiche (curve paraboliche o biparaboliche, concave o convesse, quartiche, tratti rettilinei, ecc.).

Nel 1915 Proudman ⁽²⁾ risolve il problema — sesse libere, rappresentate dalla [7], e sesse forzate — in tutta la sua generalità, prescindendo dalla forma della curva normale, purché la forma e le dimensioni della sezione trasversale del lago mutino lentamente. Nel 1924 Matteuzzi ⁽³⁾ dimostrò che il problema può essere risolto elegantemente e in modo più rapido della soluzione proposta da Proudman, mediante un'equazione integrale di Volterra di seconda specie. All'atto pratico però queste soluzioni riescono molto faticose (il metodo di Proudman è stato applicato una sola volta: da Doodson e collaboratori ⁽⁴⁾ al lago di Ginevra). Data la natura del problema è preferibile ricorrere a soluzioni, forse meno rigorose, ma che riescono più agevoli, pur consentendo risultati attendibili. Fra queste merita particolare menzione il procedimento proposto da Hidaka ⁽⁵⁾, che applica il metodo delle variazioni di Ritz alla determinazione delle sesse di un lago.

Hidaka considera l'equazione di Chrystal [7], con le condizioni ai limiti

$$u(0) = u(a) = 0, \quad [8]$$

dove a è l'area superficiale totale del lago. Sarà quindi

$$0 < v < a.$$

La funzione $\sigma(v)$ ha la proprietà di annullarsi agli estremi del lago, così che è

$$\sigma(0) = \sigma(a) = 0. \quad [9]$$

Posto

$$z = \frac{v}{a}$$

ed espresso σ in funzione di z , la [7] si può scrivere

$$\frac{d^2 u}{dz^2} + \frac{\lambda}{\sigma(z)} u = 0, \quad [10]$$

con le condizioni ai limiti

$$u(0) = 0, \quad u(1) = 0, \quad [11]$$

e dove

$$\lambda = \frac{4\pi^2}{T^2} \frac{a^2}{g}. \quad [12]$$

La [10], con le condizioni [11], è soddisfatta solo da certi valori del parametro λ . L'integrazione della [10], soggetta alle condizioni [11], per un noto teorema del calcolo delle variazioni, è equivalente alla ricerca del valore stazionario dell'integrale

$$I(u) = \int_0^1 \left\{ \left(\frac{du}{dz} \right)^2 - \frac{\lambda}{\sigma(z)} \cdot u^2 \right\} dz. \quad [13]$$

Siano $\Psi_0(z), \Psi_1(z), \dots, \Psi_m(z)$, $m+1$ funzioni soddisfacenti alle (11)

$$\Psi_i(0) = \Psi_i(1) = 0, \quad (i=0, 1, 2, \dots, m) \quad [14]$$

e sia u esprimibile con la serie finita

$$u = A_0 \Psi_0 + A_1 \Psi_1 + \dots + A_m \Psi_m. \quad [15]$$

Poniamo, nel nostro caso,

$$\Psi_i(z) = z(1-z)^i, \quad [16]$$

relazione che soddisfa alle condizioni [11]; avremo allora

$$u = \sum_0^m A_i z(1-z)z^i. \quad [17]$$

Sostituiamo la [17] nella [13] e determiniamo le $m+1$ costanti A_0, A_1, \dots, A_m in modo che $I(u)$ diventi un minimo, il che richiede che sia $\frac{\partial I}{\partial A_0} = 0, \frac{\partial I}{\partial A_1} = 0, \dots, \frac{\partial I}{\partial A_m} = 0$.

Ora è

$$\frac{du}{dz} = \sum_0^m \left[(i+1)z^i - (i+2)z^{i+1} \right] A_i,$$

$$\left(\frac{du}{dz} \right)^2 = \sum_0^m A_i \left[(i+1)z^i - (i+2)z^{i+1} \right] \cdot \sum_0^m A_j \left[(j+1)z^j - (j+2)z^{j+1} \right],$$

e quindi

$$\begin{aligned} \frac{\partial I}{\partial A_i} = \sum_0^m \left[\int_0^1 \left\{ (i+1)z^i - (i+2)z^{i+1} \right\} \cdot \left\{ (i+1)z^i - (j+2)z^{j+1} \right\} dz - \right. \\ \left. - \gamma \int_0^1 \frac{z(1-z)z^i \cdot z(1-z)z^j}{\sigma(z)} dz \right] \cdot A_i = 0. \quad [18] \\ (j = 0, 1, 2, \dots, m) \end{aligned}$$

Il primo integrale può essere agevolmente valutato. Si ha quindi

$$\begin{aligned} \sum_0^m \left\{ \frac{(i+2)(j+2)}{i+j+3} - \frac{(i+2)(j+1) + (i+1)(j+2)}{i+j+2} + \frac{(i+1)(j+1)}{i+j+1} - \right. \\ \left. - \gamma \int_0^1 \frac{z^2(1-z)^2 z^{i+j}}{\sigma(z)} dz \right\}^{(*)} = 0. \quad [19] \end{aligned}$$

L'integrale

$$\int_0^1 \frac{z^2(1-z)^2 z^{i+j}}{\sigma(z)} dz, \quad [20]$$

va calcolato numericamente.

(*) Inespiegabilmente, Hidaka scrive i primi due termini tra parentesi come segue: $\frac{i+j}{i+j-1} - \frac{i(j+1) + (i+1)j}{i+j}$. La stessa forma erronea viene ripresa da G. Neumann (6).

Hidaka dà quindi un procedimento atto a determinare la curva normale, qualora questa sia esprimibile in forma analitica esplicita. Poiché nell'applicazione che noi faremo ciò non è possibile, trascuriamo di accennarvi.

Dalla (19) consegue il sistema di $m+1$ equazioni:

$$\begin{aligned} \left(\frac{1}{3} - I_0\lambda\right)A_0 + \left(\frac{1}{6} - I_1\lambda\right)A_1 + \left(\frac{1}{10} - I_2\lambda\right)A_2 + \dots &= 0 \\ \left(\frac{1}{6} - I_1\lambda\right)A_0 + \left(\frac{2}{15} - I_2\lambda\right)A_1 + \left(\frac{1}{10} - I_3\lambda\right)A_2 + \dots &= 0 \\ \left(\frac{1}{10} - I_2\lambda\right)A_0 + \left(\frac{1}{10} - I_3\lambda\right)A_1 + \left(\frac{3}{35} - I_4\lambda\right)A_2 + \dots &= 0. \end{aligned}$$

L'eliminazione di A_0, A_1, A_2, \dots conduce all'annullamento del determinante dei coefficienti di A_0, A_1, A_2, \dots , il che costituisce l'equazione dei periodi. In questa equazione è

$$I_n = \int_0^1 \frac{z^2(1-z)^2 z^n}{\sigma(z)} dz. \quad [21]$$

La soluzione del problema per grossi valori di m diventa assai ardua. Hidaka dà la soluzione per $m=1$ e $m=2$.

Per $m=1$ si ha

$$u = z(1-z)(A_0 + A_1 z)$$

e l'equazione dei periodi diviene

$$\begin{vmatrix} \frac{1}{3} - I_0\lambda & \frac{1}{6} - I_1\lambda \\ \frac{1}{6} - I_1\lambda & \frac{2}{15} - I_2\lambda \end{vmatrix} = 0,$$

cioè, sviluppando,

$$(I_0 I_2 - I_1^2)\lambda^2 - \left(\frac{2}{15} I_0 - \frac{1}{3} I_1 + \frac{1}{3} I_2\right)\lambda + \frac{1}{60} = 0. \quad [22]$$

Per forme semplici della curva normale, la [22] è sufficiente per la sessa uninodale.

Per $m=2$ è

$$u = z(1-z)(A_0 + A_1 z + A_2 z^2)$$

e l'equazione dei periodi diviene

$$\begin{vmatrix} \frac{1}{3} - I_0\lambda & \frac{1}{6} - I_1\lambda & \frac{1}{10} - I_2\lambda \\ \frac{1}{6} - I_1\lambda & \frac{2}{15} - I_2\lambda & \frac{1}{10} - I_3\lambda \\ \frac{1}{10} - I_2\lambda & \frac{1}{10} - I_3\lambda & \frac{2}{35} - I_4\lambda \end{vmatrix} = 0,$$

da cui sviluppando:

$$\begin{aligned} & (I_0 I_2 I_4 - I_0 I_3^2 - I_1^2 I_4 + 2 I_1 I_2 I_3 - I_2^3) \lambda^3 - \left[\frac{3}{35} (I_0 I_2 - I_1^2) + \right. \\ & + \frac{1}{5} (-I_0 I_3 + I_1 I_2 + I_1 I_3) + \frac{2}{15} I_2 I_3 + \frac{1}{5} (-I_1 I_4 - \\ & \left. I_2^2 + I_2 I_3 + I_2 I_4 - I_3^2) \right] \lambda^2 + \left(\frac{1}{700} I_0 - \frac{3}{350} I_1 + \frac{53}{2100} I_2 - \right. \\ & \left. - \frac{1}{30} I_3 + \frac{1}{60} I_4 \right) \lambda - \frac{1}{10500} = 0. \quad [23] \end{aligned}$$

Calcolati numericamente gli integrali I_0, I_1, \dots, I_4 è facile risolvere la [23] rispetto a λ . Ai tre valori $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ che così si ottengono corrispondono, mediante la [12], i periodi delle sesse uni-, bi- e trinodali.

Caso $m=3$. — Come si è detto, Hidaka si limita a considerare il caso $m=2$. In pratica ciò può soddisfare alla precisione richiesta. Però, per curve normali molto complicate, può essere utile ricorrere al caso $m=3$: oltre ad una maggiore precisione per le sesse di più piccola nodalità, ciò consente pure la determinazione del periodo della sesse quadrinodale.

Per $m=3$, come si può facilmente verificare, l'equazione dei periodi diventa

$$\begin{vmatrix} \frac{1}{3} - I_0\lambda & \frac{1}{6} - I_1\lambda & \frac{1}{10} - I_2\lambda & \frac{1}{15} - I_3\lambda \\ \frac{1}{6} - I_1\lambda & \frac{2}{15} - I_2\lambda & \frac{1}{10} - I_3\lambda & \frac{8}{105} - I_4\lambda \\ \frac{1}{10} - I_2\lambda & \frac{1}{10} - I_3\lambda & \frac{3}{35} - I_4\lambda & \frac{1}{14} - I_5\lambda \\ \frac{1}{15} - I_3\lambda & \frac{8}{105} - I_4\lambda & \frac{1}{14} - I_5\lambda & \frac{4}{63} - I_6\lambda \end{vmatrix} = 0.$$

Sviluppando il determinante di quart'ordine si ottiene l'equazione in λ :

$$\alpha_4 \lambda^4 + \alpha_3 \lambda^3 + \alpha_2 \lambda^2 + \alpha_1 \lambda + \alpha_0 = 0, \quad [24]$$

dove

$$\begin{aligned} \alpha_4 = & + I_0 I_3 I_4 I_6 - I_0 I_3 I_6 + 2 I_0 I_3 I_4 I_5 - I_0 I_3 I_5 - I_0 I_4 + \\ & + I_1 I_5 - I_1 I_3 I_6 + 2 I_1 I_2 I_3 I_6 - 2 I_1 I_2 I_4 I_5 - 2 I_1 I_3 I_5 + \\ & + 2 I_1 I_3 I_4 - I_2 I_5 + 2 I_2 I_3 I_5 + I_2 I_4 - 3 I_2 I_3 I_4 + I_3; \\ \alpha_3 = & - \frac{4}{63} I_0 I_2 I_4 + \frac{1}{7} I_0 I_2 I_5 - \frac{3}{35} I_0 I_2 I_6 - \frac{1}{7} I_0 I_3 I_4 - \\ & - \frac{16}{105} I_0 I_3 I_5 + \frac{1}{5} I_0 I_3 I_6 - \frac{1}{5} I_0 I_4 I_5 - \frac{2}{15} I_0 I_4 I_6 - \\ & + \frac{4}{63} I_0 I_5 + \frac{5}{21} I_0 I_6 + \frac{2}{15} I_1 I_2 + \frac{4}{63} I_1 I_4 - \frac{1}{7} I_1 I_5 + \\ & + \frac{3}{35} I_1 I_6 - \frac{8}{63} I_1 I_2 I_3 + \frac{1}{7} I_1 I_2 I_4 + \frac{16}{105} I_1 I_2 I_5 - \\ & - \frac{1}{5} I_1 I_2 I_6 - \frac{34}{105} I_1 I_3 I_4 + \frac{1}{3} I_1 I_3 I_5 - \frac{1}{5} I_1 I_3 I_6 + \\ & + \frac{1}{5} I_1 I_4 I_5 + \frac{1}{3} I_1 I_4 I_6 + \frac{1}{7} I_1 I_5 - \frac{2}{15} I_1 I_6 - \\ & - \frac{1}{3} I_2 I_3 + \frac{4}{63} I_2 - \frac{1}{7} I_2 I_3 - \frac{16}{105} I_2 I_4 - \frac{2}{15} I_2 I_5 + \\ & + \frac{1}{3} I_2 I_6 + \frac{5}{21} I_2 I_3 I_4 + \frac{1}{15} I_2 I_3 I_5 - \frac{1}{15} I_2 I_3 I_6 - \\ & - \frac{1}{3} I_2 I_4 I_5 - \frac{1}{5} I_2 I_4 I_6 + \frac{1}{3} I_2 I_4 I_5 - \frac{1}{3} I_2 I_4 I_6 + \\ & + \frac{1}{3} I_2 I_5 - \frac{1}{3} I_3 + \frac{1}{3} I_3 I_4 + \frac{1}{3} I_3 I_5 + \frac{1}{3} I_3 I_6 - \\ & - \frac{1}{3} I_3 I_4 - \frac{2}{3} I_3 I_1 I_5 + \frac{1}{3} I_4; \\ \alpha_2 = & + \frac{1}{2940} I_0 I_2 - \frac{4}{2205} I_0 I_3 + \frac{257}{66150} I_0 I_4 - \frac{2}{525} I_0 I_5 + \\ & + \frac{1}{700} I_0 I_6 + \frac{4}{2205} I_1 I_2 + \frac{43}{22050} I_1 I_3 - \frac{131}{9450} I_1 I_4 + \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{2}{105} I_1 \bar{I}_2 - \frac{3}{350} I_1 I_3 - \frac{1}{2940} I_1^2 + \frac{167}{9450} I_2 I_3 + \\
& + \frac{19}{1890} I_2 I_4 - \frac{22}{525} I_2 I_5 + \frac{53}{2100} I_2 I_6 - \frac{193}{33075} I_2^2 - \\
& - \frac{577}{18900} I_3^2 + \frac{53}{1050} I_3 I_4 + \frac{23}{1050} I_3 I_5 - \frac{1}{30} I_3 I_6 - \\
& - \frac{33}{700} I_4^2 + \frac{1}{30} I_4 I_5 + \frac{1}{60} I_4 I_6 - \frac{1}{60} I_5^2;
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
a_1 = & - \frac{1}{771750} I_2 + \frac{1}{73500} I_4 - \frac{1}{13500} I_5 + \frac{143}{661500} I_6 - \\
& - \frac{229}{661500} I_1 + \frac{1}{3500} I_3 - \frac{1}{10500} I_6;
\end{aligned}$$

$$a_0 = + \frac{1}{18522000}.$$

Determinate le radici della [24], i valori dei periodi delle sesse si ottengono sostituendo a λ le radici ottenute nell'equazione

$$T = \frac{2\pi a}{\sqrt{\lambda g}}, \quad [25]$$

che deriva dalla [12].

L'ampiezza dello spostamento consegue dalla [6], che può anche essere scritta

$$\eta = - \frac{du}{dz} \cdot a \quad [26]$$

Questa esige la determinazione di u espressa dalla [17]; e quindi di A_0, A_1, \dots . Queste ultime si possono determinare dalle relative equazioni dei periodi, che variano al variare di m ($m=0, 1, 2, 3, \dots$).

La localizzazione dei nodi si ha invece mediante l'annullamento di η :

$$\frac{du}{dz} = 0. \quad [27]$$

Le sesse del lago di Garda.

Pochi sono finora gli studi sulle sesse fatti in Italia. Le ricerche di carattere teorico si limitano al citato lavoro di Matteuzzi.

Una prima sommaria esposizione della teoria di Chrystal si trova

Tabella I

sezione	α		z	$z^2(1-z)^2$	$\sigma(z)$ $10^6 m^3$	$\frac{z^2(1-z)^2}{\sigma(z)}$ [10^{-6}]	ΛZ	$M =$		$M \cdot z$ 10^{-2}	$M \cdot z^2$ 10^{-2}	$M \cdot z^3$ 10^{-2}	$M \cdot z^4$ 10^{-2}	$M \cdot z^5$ 10^{-2}	$M \cdot z^6$ 10^{-2}	
	500%	25%						$\frac{M}{\sigma(z)}$								
	1.0170	10312						10^{-2}	10^{-2}							
	m	m^2														
1	0	0	0	0,00000	0,0	—	—	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000
2	0,6	1,3	0,00299	.00001	1115,9	0,0090	0,00299	0,00269	.00001	.00000	.00000	.00000	.00000	.00000	.00000	.00000
3	1,1	7,7	.00536	.00003	1384,8	0,0217	.00237	.00511	.00003	.00000	.00000	.00000	.00000	.00000	.00000	.00000
4	1,2	13,8	.00961	.00009	1765,4	0,0510	.00425	.02168	.00021	.00000	.00000	.00000	.00000	.00000	.00000	.00000
5	2,1	25,8	.01796	.00031	1602,0	0,1935	.00835	.16175	.00290	.00005	.00000	.00000	.00000	.00000	.00000	.00000
6	6,2	36,0	.02506	.00060	1478,9	0,4057	.00710	.28305	.00722	.00018	.00000	.00000	.00000	.00000	.00000	.00000
7	8,2	46,1	.03209	.00096	1599,9	0,6000	.00703	.42180	.01351	.00013	.00000	.00000	.00000	.00000	.00000	.00000
8	10,2	56,1	.03926	.00142	1644,4	0,8635	.00717	.61913	.02131	.00095	.00001	.00000	.00000	.00000	.00000	.00000
9	11,5	62,8	.04371	.00175	1695,1	1,0321	.00445	.75912	.02008	.00038	.00001	.00000	.00000	.00000	.00000	.00000
10	13,3	76,1	.05297	.00252	2096,3	1,2021	.00926	1,11314	.05896	.00312	.00012	.00001	.00000	.00000	.00000	.00000
11	15,3	89,0	.06195	.00338	2610,3	1,2949	.00898	1,16282	.07204	.00116	.00028	.00002	.00000	.00000	.00000	.00000
12	17,1	103,1	.07177	.00414	3723,1	1,1926	.00982	1,17113	.08105	.00063	.00013	.00003	.00000	.00000	.00000	.00000
13	19,2	116,5	.08109	.00555	2684,8	2,0672	.00932	1,92663	.15623	.01267	.00103	.00003	.00001	.00000	.00000	.00000
14	21,2	130,3	.09070	.00680	2388,0	2,8476	.00961	2,73651	.24820	.02251	.00201	.00019	.00002	.00000	.00000	.00000
15	23,1	142,2	.09898	.00795	2568,6	2,8715	.00828	2,37760	.23533	.02329	.00231	.00023	.00002	.00000	.00000	.00000
16	25,2	154,6	.10762	.00922	2435,5	3,7857	.00864	3,27081	.35201	.03738	.00408	.00041	.00005	.00001	.00000	.00000
17	27,2	168,5	.11729	.01072	2018,2	3,8038	.00967	3,67827	.43142	.05060	.00591	.00070	.00003	.00001	.00000	.00000
18	29,2	182,1	.12676	.01225	2662,0	4,6018	.00947	4,13579	.55211	.07002	.00888	.00113	.00014	.00002	.00000	.00000
19	31,2	196,5	.13678	.01391	2746,8	5,0750	.01002	5,08515	.69555	.09514	.01301	.00178	.00024	.00003	.00001	.00000
20	33,2	211,8	.14743	.01580	2797,5	5,6479	.01065	6,01501	.88679	.09575	.01254	.00178	.00024	.00003	.00001	.00000
21	35,2	226,0	.15732	.01758	3019,9	5,8214	.00989	5,75736	.96575	.11219	.02212	.00353	.00056	.00009	.00001	.00000
22	37,2	241,3	.16797	.01953	3400,1	5,7434	.01065	6,11672	1,02743	.12758	.02899	.00457	.00082	.00011	.00001	.00000
23	39,2	256,3	.17841	.02149	4012,7	5,3556	.01041	5,59114	.99752	.17797	.03175	.00586	.00101	.00018	.00001	.00000
24	41,2	273,2	.19017	.02372	4861,9	4,8757	.01176	5,72382	1,09040	.20736	.03913	.00750	.00143	.00027	.00001	.00000
25	43,6	295,0	.20535	.02663	5235,1	5,0868	.01158	7,77176	1,58566	.22251	.06667	.01373	.00292	.00058	.00001	.00000
26	45,6	313,3	.21808	.02908	5672,6	5,1264	.01273	6,52591	1,12317	.31037	.06768	.01476	.00322	.00070	.00001	.00000
27	47,6	332,9	.23173	.03170	6562,0	4,8308	.01365	6,59491	1,72801	.35109	.08205	.01901	.00411	.00102	.00001	.00000
28	49,6	353,2	.24586	.03438	7524,8	4,5649	.01413	6,15586	1,58721	.39021	.09594	.02359	.00520	.00143	.00001	.00000
29	51,6	375,9	.26166	.03732	7173,1	4,9939	.01580	7,89036	2,06159	.54022	.11135	.03699	.00968	.00253	.00001	.00000
30	53,5	397,5	.27669	.04005	8115,4	4,9351	.01503	7,41546	2,05234	.56786	.15712	.04347	.01203	.00333	.00001	.00000
31	55,5	423,0	.29145	.04316	7123,6	6,0587	.01776	10,66025	3,16836	.93292	.25470	.08089	.02382	.00701	.00001	.00000
32	57,1	445,3	.30997	.04575	7078,1	6,4636	.01552	10,03151	3,40947	.96381	.29876	.09261	.02871	.00890	.00001	.00000
33	59,6	467,6	.32549	.04820	7309,7	6,5940	.01552	10,23389	3,33103	.10842	.35290	.11487	.03739	.01217	.00001	.00000
34	61,5	491,8	.34142	.05098	8337,7	6,1141	.01893	11,57456	3,98651	.13703	.41720	.16288	.05640	.01932	.00001	.00000
35	63,5	519,8	.36183	.05332	7458,7	7,1187	.01741	12,11589	4,50330	.16293	.58938	.21333	.07749	.02793	.00001	.00000
36	65,5	542,1	.37735	.05520	6748,2	8,1800	.01552	12,69536	4,79059	.18073	.68245	.25541	.09713	.03665	.00001	.00000
37	67,5	576,2	.40109	.05770	11128,0	5,1851	.02371	12,30943	4,93749	.19805	.79426	.31857	.12778	.05125	.00001	.00000
38	69,6	611,6	.42782	.05992	13058,8	4,5885	.02673	12,26506	5,21721	.21487	.96040	.41088	.17778	.07520	.00001	.00000
39	71,6	656,8	.45719	.06159	13526,3	4,5531	.02937	13,37333	6,11116	.22953	1,27800	.58129	.26713	.12213	.00001	.00000
40	73,2	709,1	.49360	.06248	6677,8	9,3564	.03611	31,06665	16,81530	.8,30003	1,89690	2,02223	.99817	.19270	.00001	.00000
41	75	738,3	.51392	.06240	6722,3	9,2825	.02032	18,86201	9,69358	.1,98173	2,56021	3,15751	.67649	.31751	.00001	.00000
42	77,7	792,2	.55144	.06119	12370,8	4,9866	.03752	18,70972	10,31729	5,68936	3,13731	4,73006	.95192	.52608	.00001	.00000
43	81,1	840,1	.58478	.05896	12128,0	4,7141	.03334	15,81633	9,24937	5,0885	3,16299	4,31965	.108164	.63252	.00001	.00000
44	82,7	867,0	.60851	.05726	11262,4	5,0812	.01873	9,57224	5,74705	3,16810	2,09321	2,26327	.76240	.16012	.00001	.00000
45	83,8	889,1	.61889	.05563	10891,2	5,1078	.01538	7,85580	4,86438	3,00897	1,86222	1,52551	.71328	.14114	.00001	.00000
46	84,5	911,9	.63476	.05375	11816,8	4,5486	.01587	7,24863	4,58210	3,20853	1,81622	1,47490	.74388	.15219	.00001	.00000
47	85,7	937,9	.65286	.05136	12226,3	4,2008	.01810	7,68315	4,96399	3,24078	2,14578	1,88134	.90480	.20875	.00001	.00000
48	86,7	963,9	.67096	.04871	13383,6	3,6418	.01810	6,59466	4,12274	3,96748	1,99466	1,35292	.89635	.60141	.00001	.00000
49	87,7	990,7	.68961	.04582	11880,1	3,0793	.01865	5,74289	3,96035	2,73110	1,88339	1,29081	.89567	.61766	.00001	.00000
50	88,7	1021,6	.71112	.04220	15171,6	2,7276	.02151	5,86707	4,17249	2,96693	2,10983	1,59035	2,06693	.75872	.00001	.00000
51	89,5	1051,3	.73180	.03852	15893,6	2,1236	.02068	5,01200	3,66578	2,68408	1,96421	1,37541	1,65490	.76978	.00001	.00000
52	90,5	1078,7	.75087	.03500	18873,9	2,3531	.01907	4,13748	3,36942	2,53000	1,89970	1,42643	1,05106	.80423	.00001	.00000
53	91,5	1107,2	.77071	.03123	11147,9	2,2074	.02053	1,87936	3,57531	2,60138	2,00491	1,51521	1,19090	.91785	.00001	.00000
54	92,5	1136,7	.79121	.02728	11495,1	2,3782	.01908	1,87248	3,85566	3,05028	2,11351	1,99966	1,51001	1,19556	.00001	.00000
55	93,5	1161,1	.81032	.02363	10443,4	2,2627	.02025	1,31723	3,19834	2,43178	2,29708	1,89431	1,59831	1,22221	.00001	.00000
56	94,5	1193,2	.83057	.01981	10083,5	1,9646	.02290	3,97832	3,30427	2,74413	2,47911	1,89431	1,57246	1,30601	.00001	.00000
57	95,6	1226,1	.85317	.01564	10192,1	1,5482	.01838	3,51538	3,02588	2,58219	2,20408	1,88412	1,60548	1,37023	.00001	.00000
58	96,6	1252,5	.87185	.01248	10740,2	1,1620	.02154	2,13576	1,86206	1,62341	1,41539	1,23004	1,07587	.93809	.00001	.00000
59	97,7	1283,9	.89336	.00907	6699,5	1,3538	.02165	2,91202	2,60148	2,32106	2,07622	1,85481	1,65701	1,18031	.00001	.00000
60	98,7	1314,5	.91501	.00604	5646,7	1,0697	.02123	2,31590	2,11907	1,93897	1,77418	1,62839	1,18542	1,35917	.00001	.00000
61	99,8	1345,0	.93621	.00357	3774,8	0,9457	.01838	2,00572	1,87951	1,57986	1,61765	1,51259	1,14121	1,35215	.00001	.00000
62	100,9	1371,1	.95162	.00188	2200,8	0,8512	.01649	1,57002	1,19877	1,13076	1,36583	1,30385	1,21468	1,18820	.00001	.00000
63	101,9	1395,1	.97111	.00078	1551,3	0,5028	.01392	0,82912	0,80517	0,78491	0,75932	0,73738	.71608	.69539	.00001	.00000
64	102,9	1415,1	.98503	.00021	756,0	0,2778	.01197	0,38670	0,38094	0,37521	0,36959	0,36406	.35861	.35321	.00001	.00000
65	101	1436,6	1,00000	.00000	0,0	0,0000	—	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000
								336,97187	171,32035	93,39320	57,82506	39,05257	28,11714			

nel volumetto « Limnologia » di G. P. Magrini (7), pubblicato nel 1907. Nel 1909 Francesco Vercelli (8) applicò il metodo Du Boys e uno dei metodi Chrystal (quello relativo alla curva normale biparabolica) al lago di Garda: ed è questo l'unico lavoro di applicazione delle teorie sulle sesse ad un lago italiano. Poco prima A. Defant (9) applicava al lago di Garda un altro metodo proposto da Chrystal, quello che considera la curva normale come risultante dal raccordo di tratti rettilinei. Per le prime quattro sesse Vercelli ottenne i periodi $41,3^m$; $22,97^m$; $16,13^m$; $12,51^m$. Defant invece pervenne ai seguenti valori per le prime cinque sesse: $42,28^m$; $28,00^m$; $20,13^m$; $14,83^m$; $11,9^m$. Il disaccordo era particolarmente sensibile nella sessa binodale, che Defant aveva calcolato in $28,00$, conforme, secondo lui, alle osservazioni che davano una media di $28,5^m$. Gli autori sostennero i propri punti di vista (10-11), finchè nel 1918, applicando al Garda un metodo di sua ideazione,

20 MARZO 1940

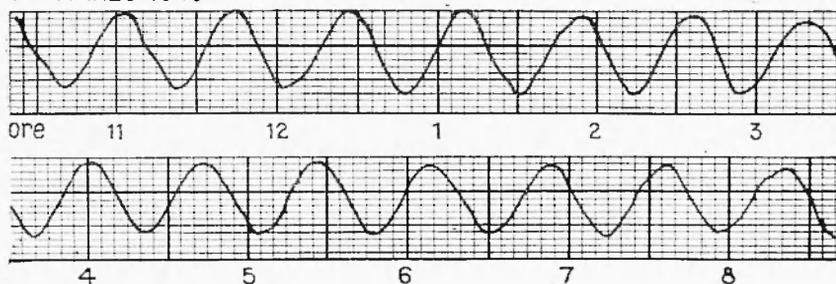


Fig. 1. — Sesse uninodali registrate a Riva (per 36 oscillazioni complete, periodo medio $T = 43^m$, 06; riduzione strumentale 1 a 5).

Defant (12) ottenne per le sesse uninodale e binodale i valori $39,8^m$ e $22,65^m$ rispettivamente; e fu quindi costretto a constatare che l'onda di $28,6^m$ non poteva essere la binodale. Egli attribuì il risultato erroneo della sua prima ricerca al metodo di Chrystal, di cui si era valso. In un prossimo lavoro, avremo modo di provare che l'errore non era da attribuirsi al metodo ma ad un coefficiente sbagliato sfuggito a Chrystal nello sviluppo della sua teoria relativa a laghi con curve normali rettilinee; fu tale svista che condusse Defant a quei valori errati. Nello stesso errore incapparono anche i giapponesi Nakamura e Honda nello studio delle sesse del lago Hakoné (Giappone).

Le osservazioni fatte da Valentin e Teglio attribuiscono alla sessa uninodale del lago di Garda il periodo medio di 43^m (13-14). La media dei valori osservati da Vercelli è di $42,3^m$, mentre Defant nello spoglio

di 222 serie, consistenti in 5494 oscillazioni complete, ottenne un valore medio di 42,92^m, avendo osservato anche molti valori intorno ai 44^m. Possiamo quindi ritenere come uguale a 43^m il valore più probabile osservato per la sessa uninodale del Garda (fig. 1). I valori del periodo della sessa binodale presentano una estesa gamma fra i 20^m e i 25^m. La giustificazione di questa variazione piuttosto ampia sarà data in un prossimo lavoro.

Poichè il valore del periodo della sessa uninodale ottenuto da Vercelli (41,3^m) e, più ancora, quello trovato da Defant con il suo metodo (39,8^m) risultano sensibilmente inferiori a quello osservato, ho ritenuto non inutile applicare il metodo di Hidaka al lago di Garda. Data la complessità della curva normale relativa a questo lago, solo un metodo che prescindendo dalla forma di tale curva può infatti consentire di ottenere valori maggiormente approssimati. Oltre ai periodi e alla posizione dei nodi, avremo modo di calcolare anche la suddivisione delle ampiezze per tutta la lunghezza del lago, in corrispondenza delle prime quattro sesse.

Resta poi la questione relativa all'oscillazione di 30^m circa, che viene registrata nella parte settentrionale del lago e a Peschiera: ma di essa ci occuperemo in seguito.

In questa prima parte del lavoro mi sono valso, per i calcoli, dei dati ottenuti da Vercelli suddividendo il lago in 65 sezioni trasversali sopra una carta batimetrica al 50.000. La linea di valle nella parte meridionale del lago fu da Vercelli ritenuta media fra le linee di fondo massimo dei bacini di Desenzano e di Peschiera.

I dati tratti dal lavoro di Vercelli sono contenuti nelle colonne seconda e terza della tabella I, e si riferiscono alle grandezze x (ascisse) e v (superficie parziali).

Per il calcolo dell'integrale [20] Hidaka dà un procedimento che, consentendo di esprimere analiticamente $\sigma(z)$, permette una rapida integrazione. Nel nostro caso però, tale procedimento non può essere applicato, data la complessità della curva normale del Garda, quale risulta dalle determinazioni di Vercelli; pertanto, dovremo ricorrere all'integrazione numerica, tenendo presenti le condizioni agli estremi, corrispondenti a $z=0$, $z=1$.

Come risulta dalla tabella I, il calcolo ha dato per gli integrali i seguenti risultati:

$$I_0 = 3,8697487; I_1 = 1,7132035; I_2 = 0,9339320; I_3 = 0,5782506; \\ I_4 = 0,3905257; I_5 = 0,2811714; I_6 = 0,2126242. \quad [28]$$

Periodi. -- Trascurando il caso $m=0$, per $m=1$ dalla [22] si ha

$$6790159\lambda^2 - 2562092\lambda + 166667 = 0,$$

da cui

$$\lambda_1 = 08355, \lambda_2 = 29377.$$

Osserviamo ora che la superficie totale del lago è $a=371432930 \text{ m}^2$; inoltre $g=9,807 \text{ m/sec}^2$. Data l'unità di misura prescelta (M), dalla [23] si ha per le sesse uninodale e binodale, rispettivamente:

$$T_1 = 42^m,97 ; T_2 = 22^m,92.$$

Per $m=2$, dalla [23] e per le [28] si ha

$$7048126\lambda^3 - 6670760\lambda^2 + 1648038\lambda - 95238 = 0,$$

che risolta dà per λ i valori

$$\lambda_1 = 08355, \lambda_2 = 2752, \lambda_3 = 5877.$$

Dalla [25] conseguono per le sesse uninodale, binodale e trinodale rispettivamente

$$T_1 = 42^m,95, T_2 = 23^m,67, T_3 = 16^m,2.$$

Nel caso $m=3$, dalla [24] -- dove si tenga conto delle α_i ($i=0, 1, 2, 3, 4$) -- e ricordando le [28], si ottiene

$$4100\lambda^4 - 7907\lambda^3 + 4751\lambda^2 - 990,5\lambda + 54 = 0,$$

le cui radici sono

$$\lambda_1 = 08351, \lambda_2 = 2755, \lambda_3 = 5760, \lambda_4 = 9935.$$

La [25] dà allora per le sesse unidodale, binodale, trinodale e quadrinodale

$$T_1 = 42^m,97, T_2 = 23^m,66, T_3 = 16^m,365, T_4 = 12^m,46.$$

Determinare i periodi delle sesse di nodalità più elevata sarebbe praticamente impossibile con il metodo di Hidaka.

In genere appare superfluo proseguire la ricerca delle sesse di nodalità superiore a 3 o a 4. Quando lo si ritenga opportuno, può servire molto bene allo scopo il metodo delle *approssimazioni quadratiche*, dovuto a Chrystal ⁽¹⁵⁾. Nell'esposizione, mi limiterò allo stretto necessario per la comprensione del metodo.

La curva normale sia una quartica della forma

$$\sigma = h(1 - v^2/a^2)^2.$$

quartica concava. Per semplicità sarà supposto, come di consueto nella teoria di Chrystal, che il lago abbia larghezza uniforme e sezione trasversale rettangolare così che l'espressione per la profondità è

$$h(1-x^2/a^2)^2, (*)$$

a essendo la distanza fra l'origine O e l'estremo A (fig. 2). L'origine O

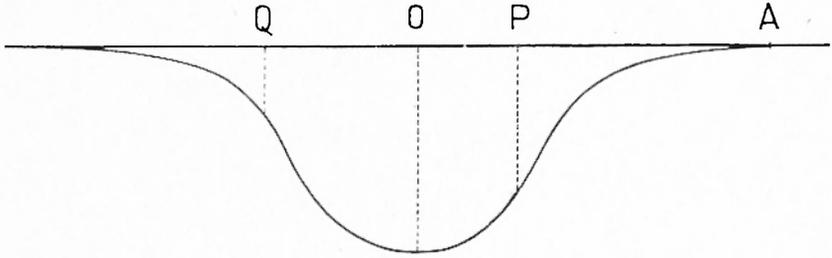


Fig. 2.

è scelta sulla verticale del punto più profondo, dove essa incontra la superficie del lago. Sia il lago quartico (concavo) tronco e sia $PQ=l$; in P e Q si ha $x=p$, $x=q$. Sia d la profondità in O , e r , s rispettivamente le profondità in P , Q . Allora dall'espressione (*) per le profondità si deduce

$$p = a\sqrt{1 - \sqrt{r/d}}, \quad q = \mp a\sqrt{1 - \sqrt{s/d}}; \quad l = a\left\{\sqrt{1 - \sqrt{r/d}} \pm \sqrt{1 - \sqrt{s/d}}\right\} = a\gamma, \text{ essendo}$$

$$\gamma = \sqrt{1 - \sqrt{r/d}} \pm \sqrt{1 - \sqrt{s/d}}, \quad [29]$$

dove il segno superiore corrisponde al caso della figura, in cui P e Q sono da bande opposte rispetto ad O . In questo caso l'equazione differenziale [7] si muta nella

$$\frac{d^2 P}{dx^2} + \frac{4\pi^2}{T^2} \frac{1}{(a^2-x^2)^2} \frac{P}{gh} = 0,$$

essendo

$$h(x)z = u = P\sin nt, \quad \text{con } n = \frac{2\pi}{T},$$

e

$$h(x) = h(a^2-x^2)^2$$

esprimendo la profondità ad una distanza x dall'origine.

Chrystal, seguendo un metodo di Stokes, perviene alla soluzione

$$\xi h(a^2 - x^2)^2 = u = l(a^2 - x^2)^{1/2} \sin \left\{ \frac{v\pi}{k} \left(\lg \frac{a+x}{a-x} - \lg \frac{a+p}{a-p} \right) \right.$$

$$\left. \sin n_v(t \tau) \right\}, \quad \eta = - \frac{\partial u}{\partial x};$$

in cui è -- γ avendo il valore espresso dalla [29] --

$$T_v = 2\pi l/\gamma \cdot \sqrt{gd (4v^2x^2/k^2 + 1)} \quad [30]$$

e

$$k = \lg \left\{ \frac{1 + \sqrt{1 - \sqrt{r/d}}}{1 - \sqrt{1 - \sqrt{r/d}}} \left| \frac{1 + \sqrt{1 - \sqrt{s/d}}}{1 + \sqrt{1 - \sqrt{s/d}}} \right. \right\}$$

Si nota subito che quando i punti P e Q tendono di più in più alle infinitamente poco profonde estremità teoriche A e A', i periodi di tutte le sesse tendono di più in più ad uguagliarsi nel comune valore $\pi l / \sqrt{gd}$ come risulta dalla [30], dove k tende all'infinito e γ a 2. Tale periodo è definito da Chrystal periodo della *sesse anomala*.

Quello che a noi qui interessa di mettere in risalto, ai fini dello scopo prefissoci, è che i rapporti dei periodi dipendono solo da una costante, propria del lago. Posto infatti

$$\varrho = k l/\gamma \sqrt{gd} \quad [31]$$

$$\varepsilon = k^2/4\pi^2 \quad [32]$$

la [30] diviene

$$T_v = \varrho / \sqrt{v^2 + \varepsilon} \quad [33]$$

e perciò

$$T_v/T_1 = \sqrt{(1 + \varepsilon)/(v^2 + \varepsilon)} \quad [34]$$

In generale, i periodi più lunghi delle sesse di un lago sono noti con sufficiente approssimazione. Se essi si suppongono dati, le equazioni

$$\varepsilon = (v^2 \frac{T_v^2}{T_1^2} - 1) / \left(1 - \frac{T_v^2}{T_1^2} \right), \quad \varrho = T_v \sqrt{v^2 + \varepsilon} \quad [35]$$

consentono di ottenere ε , ϱ , note le quali la [33] permette il calcolo dei periodi delle sesse di nodalità più elevata. Per grandissimi valori di v (grandi rispetto ad ε), la [33] può scriversi

$$T_v = q/v;$$

da cui consegue che i periodi delle sesse di più alta nodalità si approssimano ad una serie armonica.

Fatto p. es. $v=2$, poichè (caso $m=3$), $T_1=42^m,97$, $T_2=23^m,66$, dalle [35] si ha

$$\varepsilon=305265, \quad \varrho=49,09245,$$

e quindi dalla (33),

$$\begin{aligned} T_3 &= 16^m,09; & T_4 &= 12^m,16; & T_5 &= 9^m,76; \\ T_6 &= 8^m,15; & T_7 &= 6^m,99; & T_8 &= 6^m,12, \dots \end{aligned}$$

dove i valori di T_3 e T_4 pressochè coincidono con quelli ottenuti con il metodo di Hidaka (caso $m=3$).

Nodi. — Per la determinazione delle linee nodali delle oscillazioni libere vale la [27]. Occorre quindi determinare prima l'espressione di u . Limitiamoci ai casi $m=2$ e $m=3$. Per $m=2$, i valori dei rapporti $\frac{A_1}{A_0}$, $\frac{A_2}{A_0}$ conseguono da una coppia delle tre equazioni

$$\begin{aligned} \left(\frac{1}{3} - I_0\lambda\right)A_0 + \left(\frac{1}{6} - I_1\lambda\right)A_1 + \left(\frac{1}{10} - I_2\lambda\right)A_2 &= 0 \\ \left(\frac{1}{6} - I_1\lambda\right)A_0 + \left(\frac{2}{15} - I_2\lambda\right)A_1 + \left(\frac{1}{10} - I_3\lambda\right)A_2 &= 0 \\ \left(\frac{1}{10} - I_2\lambda\right)A_0 + \left(\frac{1}{10} - I_3\lambda\right)A_1 + \left(\frac{3}{35} - I_4\lambda\right)A_2 &= 0 \end{aligned}$$

Serviamoci, p. es., delle equazioni

$$\begin{cases} \frac{1}{3} - I_0\lambda + \left(\frac{1}{6} - I_1\lambda\right)\frac{A_1}{A_0} + \left(\frac{1}{10} - I_2\lambda\right)\frac{A_2}{A_0} = 0 \\ \frac{1}{10} - I_2\lambda + \left(\frac{1}{10} - I_3\lambda\right)\frac{A_1}{A_0} + \left(\frac{3}{35} - I_4\lambda\right)\frac{A_2}{A_0} = 0 \end{cases} \quad [36]$$

Poichè per la sessa unimodale $\lambda = 0,08355$, con i valori di L , L_1 , L_2 , L_3 , L_4 che figurano fra le [23] risolvendo si ha

$$\frac{A_1}{A_0} = -0,43148, \quad \frac{A_2}{A_0} = +0,00625.$$

Nel caso $m=2$ è

$$u = A_0 z(1-z) \left(1 + \frac{A_1}{A_0} z + \frac{A_2}{A_0} z^2 \right),$$

da cui, derivando rispetto a z e ricordando che nei nodi $du/dz=0$, si ottiene

$$4 \frac{A_2}{A_0} z^3 + 3 \left(\frac{A_1}{A_0} - \frac{A_2}{A_0} \right) z^2 + 2 \left(1 - \frac{A_1}{A_0} \right) z - 1 = 0 \quad [37]$$

Avremo pertanto, con i valori già calcolati per A_1/A_0 e A_2/A_0 ,

$$0,2500z^3 - 1,31319z^2 + 2,86296z - 1 = 0.$$

Delle tre radici di questa equazione, una sola è compresa fra 0 e 1 — valori entro i quali può variare z —; essa è

$${}_1z_1 = 0,43560.$$

L'*uminodo* corrisponde quindi, come risulta dalla tabella I, alla sezione trasversale 38,265, e trovasi ad una distanza da Riva pari a 70,13 unità della carta, cioè sul terreno, pari a km 35,661.

Il valore di λ corrispondente alla sessa binodale è (per $m=2$)

$\lambda = 0,2752$. La [36] dà $\frac{A_1}{A_0} = -3,2926$ e $\frac{A_2}{A_0} = +1,7321$, per cui la [37] diviene

$$6,9284z^3 - 15,0741z^2 + 8,5852z - 1 = 0.$$

Delle tre radici di questa equazione, una è maggiore dell'unità; le altre due sono

$${}_2z_1 = 1,56285 \quad , \quad {}_2z_2 = 0,69991.$$

Le linee nodali della sessa binodale corrispondono perciò alle sezioni trasversali 20,895 per il binodo Nord e 49,48 per il binodo Sud; e distano da Riva km 17,792 e km 44,84 rispettivamente.

E passiamo alla sessa trinodale corrispondente a $\lambda = 0,5877$ (sempre nel caso $m=2$). Dalla [36] si ottiene $\frac{A_1}{A_0} = -5,8968$, $\frac{A_2}{A_0} = 6,7136$, che sostituiti nella [37] danno

$$26,8544z^3 - 37,8312z^2 + 13,7936z - 1 = 0,$$

la quale ammette le radici

$${}_3z_1 = 0,9607 \quad , \quad {}_3z_2 = 0,44833 \quad , \quad {}_3z_3 = 0,86432.$$

Il nodi della sessa trinodale corrispondono quindi alle sezioni trasversali 14,65 per il trinodo Nord, 32,7 per il trinodo medio e 57,59 per il trinodo Sud, mentre le distanze rispettive da Riva sono di km 11,408; 36,104 e 48,913.

Caso $m=3$.

In questo caso è

$$u = A_0 z(1-z) \left(1 + \frac{A_1}{A_0} z + \frac{A_2}{A_0} z^2 + \frac{A_3}{A_0} z^3 \right),$$

e poichè nei nodi è $du/dz=0$, si deduce

$$5 \frac{A_3}{A_0} z^4 + 4 \left(\frac{A_2}{A_0} - \frac{A_1}{A_0} \right) z^3 + 3 \left(\frac{A_1}{A_0} - \frac{A_2}{A_0} \right) z^2 + 2 \left(1 - \frac{A_1}{A_0} \right) z - 1 = 0, \quad [38]$$

D'altronde, per $m=3$ vale il sistema

$$\begin{aligned} \left(\frac{1}{3} - I_0 \lambda \right) A_0 + \left(\frac{1}{6} - I_1 \lambda \right) A_1 + \left(\frac{1}{10} - I_2 \lambda \right) A_2 + \left(\frac{1}{15} - I_3 \lambda \right) A_3 &= 0 \\ \left(\frac{1}{6} - I_1 \lambda \right) A_0 + \left(\frac{2}{15} - I_2 \lambda \right) A_1 + \left(\frac{1}{10} - I_3 \lambda \right) A_2 + \left(\frac{8}{105} - I_4 \lambda \right) A_3 &= 0 \\ \left(\frac{1}{10} - I_2 \lambda \right) A_0 + \left(\frac{1}{10} - I_3 \lambda \right) A_1 + \left(\frac{3}{35} - I_4 \lambda \right) A_2 + \left(\frac{1}{14} - I_5 \lambda \right) A_3 &= 0 \\ \left(\frac{1}{15} - I_3 \lambda \right) A_0 + \left(\frac{8}{105} - I_4 \lambda \right) A_1 + \left(\frac{1}{14} - I_5 \lambda \right) A_2 + \left(\frac{4}{63} - I_6 \lambda \right) A_3 &= 0. \end{aligned}$$

I rapporti $\frac{A_1}{A_0}$, $\frac{A_2}{A_0}$, $\frac{A_3}{A_0}$ possono essere determinati con le seguenti tre equazioni:

$$\left\{ \begin{aligned} \frac{1}{3} - I_0 \lambda + \left(\frac{1}{6} - I_1 \lambda \right) \frac{A_1}{A_0} + \left(\frac{1}{10} - I_2 \lambda \right) \frac{A_2}{A_0} + \left(\frac{1}{15} - I_3 \lambda \right) \frac{A_3}{A_0} &= 0 \\ \frac{1}{10} - I_1 \lambda + \left(\frac{1}{10} - I_3 \lambda \right) \frac{A_1}{A_0} + \left(\frac{3}{35} - I_4 \lambda \right) \frac{A_2}{A_0} + \left(\frac{1}{14} - I_5 \lambda \right) \frac{A_3}{A_0} &= 0 \\ \frac{1}{15} - I_2 \lambda + \left(\frac{8}{105} - I_4 \lambda \right) \frac{A_1}{A_0} + \left(\frac{1}{14} - I_5 \lambda \right) \frac{A_2}{A_0} + \left(\frac{4}{63} - I_6 \lambda \right) \frac{A_3}{A_0} &= 0. \end{aligned} \right. \quad [39]$$

Per la sessa uninodale è $\lambda = 0.08354$. Dalla [39], ricordando le [28], consegue

$$\frac{A_1}{A_0} = -0.19506, \quad \frac{A_2}{A_0} = -0.54971, \quad \frac{A_3}{A_0} = +0.36062,$$

perciò la (38) diviene

$$1,80310z^4 - 3,61132z^3 + 1,06395z^2 + 2,39012z - 1 = 0,$$

L'unica radice compresa fra 0 e 1 (le sole che valgono per il nostro problema) è

$${}_1z_1 = 43183.$$

La sezione trasversale corrispondente all'uminodo è 38,14: la distanza da Riva dello stesso, km 35,534.

Per la sessa binodale è $\lambda = 0,2755$. Dalla [39] consegue

$$\frac{A_1}{A_0} = -3,4605, \quad \frac{A_2}{A_0} = +2,3085, \quad \frac{A_3}{A_0} = -4,217,$$

e la (38) diventa

$$2,1235z^4 - 10,9328z^3 + 17,3070z^2 - 8,9210z + 1 = 0,$$

che ammette le due soluzioni comprese fra 0 e 1

$${}_2z_1 = 15351, \quad {}_2z_2 = 70203.$$

Le sezioni trasversali corrispondenti ai due nodi sono 20,615 per il binodo Nord e 49,58 per il binodo Sud, le distanze da Riva essendo di km 17,503 per il primo e di km 44,890 per il secondo.

La sessa trinodale corrisponde a $\lambda = 0,5760$. Dalle [39] si ha

$$\frac{A_1}{A_0} = -6,73805, \quad \frac{A_2}{A_0} = +10,5504, \quad \frac{A_3}{A_0} = -3,7162,$$

e la (38) diviene

$$18,5810z^4 - 57,0664z^3 + 51,8655z^2 - 15,4764z + 1 = 0,$$

che ha le seguenti tre radici comprese fra 0 e 1:

$${}_3z_1 = 08826, \quad {}_3z_2 = 42019, \quad {}_3z_3 = 84463.$$

Abbiamo pertanto: trinodo Nord coincidente con la sezione trasversale 13,75 e distante da Riva km 10,526; trinodo medio coincidente con la sezione trasversale 37,71 e distante da Riva km 35,086; trinodo Sud coincidente con la sezione trasversale 56,61 e distante da Riva km 48,400.

Per la sessa quadrinodale si è trovato $\lambda = 0,9935$. La [39] dà allora

$$\frac{A_1}{A_0} = -9,555; \quad \frac{A_2}{A_0} = +23,534; \quad \frac{A_3}{A_0} = -16,390,$$

mentre la [35] si scrive

$$81,950z^4 - 159,696z^3 + 99,267z^2 - 21,110z + 1 = 0,$$

le cui radici sono

$${}_4z_1 = 0,6548, \quad {}_4z_2 = 3,1126, \quad {}_4z_3 = 6,1798, \quad {}_4z_4 = 9,2398.$$

Consegue: quadrinodo Nord coincidente con la sezione trasversale H.36 e distante da Riva km 3,165; quadrinodo medio Nord coincidente con la sezione trasversale 32.1 e distante da Riva km 29,310; quadrinodo medio Sud coincidente con la sezione trasversale 46.73 e distante da Riva km 43,411; quadrinodo Sud coincidente con la sezione trasversale 60.42 e distante da Riva km 50,423.

Riassumiamo nella tabella che segue i risultati delle ricerche compiute fino ad oggi sulle sesse del Garda.

TABELLA II

	T_1 m	T_2 m	T_3 m	T_4 m	T_5 m	T_6 m	T_7 m	T_8 m
Valori osservati (Valentin-Teglio)	42.5-43	22.5-23						
» » (Vercelli)	42.3	22.6	15.7	12.2	10.1	9	7.3	6.3
» » (Defant)	43.0	21.30	15.0	12.1	9.9	3.8	7.3	—
» calcolati (Vercelli)	41.3	22.97	16.13	12.51	10.2	3.63	7.17	5.59
» » »			15.51	11.71	9.39	7.34	6.72	5.38
» » (Defant)	39.8	22.65						
» » (Caloi)	42.97	23.66	16.36	12.16				
» » »			16.09	12.16	9.76	3.15	6.99	6.12

Il nuovo valore per il periodo della sessa uninodeale — che è la fondamentale fra le sesse di un lago — risulta coincidente con la media dei valori osservati. Il valore calcolato per la sessa binodale appare lievemente superiore a quello osservato. In realtà però, come già si è detto, i valori osservati per la sessa binodale abbracciano una gamma assai estesa, che va da 20^m ca. a 24^m ca.: gamma troppo vasta per ritenerla campo di variazione di un solo tipo di oscillazione libera. Proveremo infatti in un prossimo lavoro l'esistenza di un secondo tipo di sessa binodale, che interessa soltanto il bacino occidentale del Garda (Desenzano-Riva), avente un periodo di 21^m ca. Ciò spiega come la media dei valori osservati possa apparire, per la sessa binodale interessante l'intero lago, un po' inferiore al valore calcolato. Di fatto negli esempi di registrazione riportati nel citato

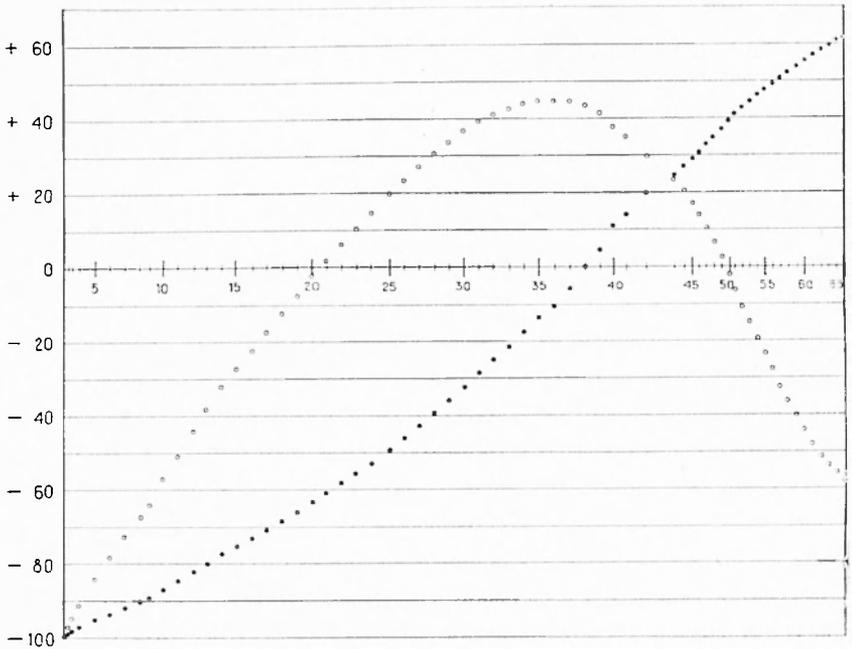


Fig. 3.

lavoro di Vercelli, sono numerosi ed ampi i gruppi d'onde con periodo di 24^{re}. Osservazione analoga per la sessa trinodale.

A dire il vero, uno studio sistematico delle osservazioni relative alle sesse del Garda non è stato ancora compiuto, quelli precedenti essendo relativi ad una sola stazione d'osservazione (Riva o Desenzano, con qualche registrazione di Salò o Toscolano) e ad epoche diverse. Un simile lavoro risulterà di grande interesse, anche per il controllo delle linee nodali e delle ampiezze degli spostamenti relativi.

Ecco le distanze da Riva dei nodi di alcune sesse, secondo i calcoli di Vercelli, di Defant e miei.

ascisse	Uninodo		Binodo		Trinodo			Quadrinodo			
	$1^a x_1$	$2^a x_1$	$2^a x_2$	$3^a x_1$	$3^a x_2$	$3^a x_3$	$4^a x_1$	$4^a x_2$	$4^a x_3$	$4^a x_4$	
Vercelli	km 35.85	17.80	44.95	9.66	33.56	47.80					
Defant	32.5	16.5	42.2								
Caloi	m = 3	35.53	17.51	44.89	10.53	35.09	48.40	8.165	29.31	43.44	50.42
	m = 2	35.66	17.79	44.84	11.44	36.10	48.91				

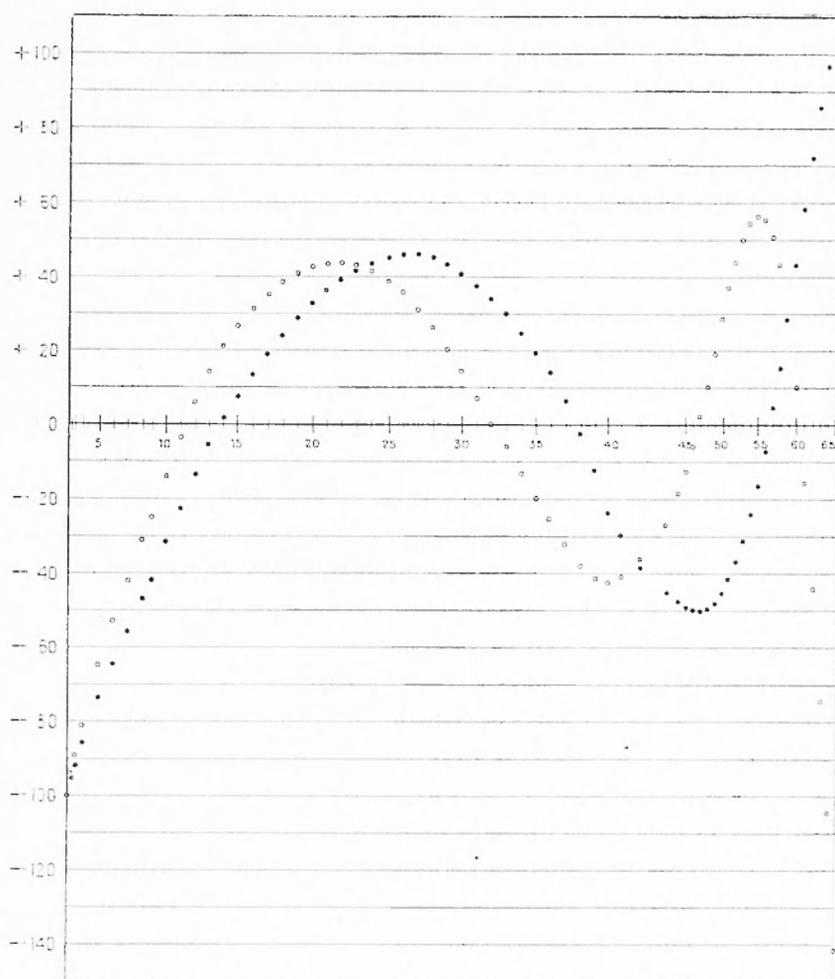


Fig. 4.

Si noterà come i nodi non risultino simmetricamente disposti nei confronti della lunghezza del lago: essi appaiono più o meno spostati verso Sud, a causa delle basse, allargate sezioni meridionali del lago.

Distribuzione delle ampiezze. — Le ampiezze sono date dalla [26]. Ci limiteremo al caso $m=3$. Si ha allora senz'altro

$$\eta = a A_0 \left\{ 5 \frac{A_3}{A_0} z^4 + 4 \left(\frac{A_2}{A_0} - \frac{A_3}{A_0} \right) z^3 + 3 \left(\frac{A_1}{A_0} - \frac{A_2}{A_0} \right) z^2 + 2 \left(1 - \frac{A_1}{A_0} \right) z - 1 \right\}$$

Per la sessa uninodale del Garda avremo

Sezioni	Z. 1					Z. 2				
	km	sesta unimodale	sesta binodale	sesta trinodale	sesta quadrinodale	km	sesta unimodale	sesta binodale	sesta trinodale	sesta quadrinodale
1	0,000	1,000	1,000	1,000	1,000	34	0,1740	0,436	0,438	0,438
2	3,305	2928	973	954	938	35	1375	411	494	498
3	5,539	2672	853	919	890	36	1037	416	411	430
4	1,068	9769	916	876	896	37	6385	414	465	439
5	2,136	5563	815	838	852	38	6975	431	456	478
6	3,153	3395	731	644	631	39	6159	413	424	417
7	4,170	9223	731	555	420	40	1081	375	238	435
8	5,187	9047	676	469	315	41	4109	319	295	409
9	5,848	3938	642	448	254	42	1977	293	336	344
10	6,763	3709	574	317	137	43	2142	236	447	271
11	7,789	3187	511	227	936	44	2688	292	472	181
12	8,848	3243	445	136	901	45	2681	172	436	134
13	9,763	3010	385	956	111	46	3073	141	495	958
14	10,789	2771	325	918	212	47	3382	104	499	652
15	11,746	2564	276	877	264	48	3678	866	494	494
16	12,811	2348	227	833	310	49	3927	629	489	489
17	13,831	2106	175	790	353	50	4191	461	453	285
18	14,848	1869	126	740	385	51	4370	309	415	370
19	15,865	1649	976	689	410	52	46019	196	369	349
20	16,882	1433	627	633	428	53	4433	149	311	500
21	17,899	1217	406	616	436	54	47036	193	240	513
22	18,916	1000	260	592	437	55	47515	231	163	562
23	19,933	836	101	566	439	56	48053	276	971	556
24	20,950	679	143	536	416	57	48613	323	617	508
25	22,171	4927	193	452	386	58	49121	372	452	433
26	23,188	3419	231	358	351	59	49680	401	297	359
27	24,205	263	268	312	312	60	50189	440	439	401
28	25,222	1956	302	261	261	61	50748	478	382	457
29	26,239	1383	335	210	210	62	51308	508	323	440
30	27,255	838	363	141	141	63	51816	534	264	375
31	28,222	331	389	111	111	64	52325	555	269	269
32	29,188	247	408	970	970	65	52834	577	269	194
33	30,307	2147	423	905	905	65	53344	577	196	144

Tabella III

$$\eta = aA_0 \{ 1,80310z^4 - 3,64132z^3 + 1,06395z^2 + 2,39012z - 1 \},$$

per la binodale

$$\eta = -aA_0 \{ 2,1235z^4 - 10,9328z^3 + 17,3070z^2 - 8,9210z + 1 \},$$

per la trinodale

$$\eta = -aA_0 \{ 18,5810z^4 - 57,0664z^3 + 51,8655z^2 - 15,4763z + 1 \},$$

e, infine, per la quadrinodale

$$\eta = -aA_0 \{ 81,950z^4 - 159,696z^3 + 99,267z^2 - 21,110z + 1 \}.$$

Facendo variare z nelle quattro precedenti equazioni, si ha l'andamento dell'ampiezza per le quattro sesse considerate. I risultati del calcolo sono contenuti nella tabella III, in cui è $\zeta = \eta/aA_0$.

Le figg. 3 e 4 danno una rappresentazione grafica dell'andamento dell'ampiezza delle prime quattro sesse.

Si noterà che nella parte Sud del lago le sesse uninodale e binodale presentano un'ampiezza che è circa i $6/10$ di quella che si verifica nella parte Nord, dove il lago, anche se più profondo, è però in compenso molto stretto. La sessa trinodale si presenta agli estremi pressochè con la stessa ampiezza, mentre la quadrinodale ha a Sud un'ampiezza che è circa una volta e mezza quella che si verifica a Nord; e ciò si spiega con il notevole spostamento verso Sud dei nodi di questa sessa, superiore a quello delle altre sesse, già molto accentuato.

Roma - Istituto Nazionale di Geofisica - marzo 1946.

RIASSUNTO

In questa prima parte del lavoro dedicato alle sesse del Garda vengono determinati i periodi delle sesse interessanti l'intero lago, mediante l'estensione di un metodo di Hidaka, che consente di prescindere dalla forma della "curva normale" del lago. I periodi così ottenuti (42^m, 96; 23^m, 66; 16^m, 36; ...), specie quello della sessa fondamentale, si mostrano più conformi alle osservazioni di quelli dati da precedenti ricerche.

Si determinano poi i nodi e l'andamento delle ampiezze in corrispondenza delle prime quattro sesse, mettendo in evidenza la notevole disimmetria distributiva di dette grandezze, dovuta alla particolare

configurazione del lago, che nella parte meridionale presenta la massima estensione e la minima profondità.

BIBLIOGRAFIA

- (¹) CHRYSTAL G.: *On the hydrodynamical Theory of Seiches*, Transactions of the Royal Society of Edinburgh, XLI (1905), XLV (1906), XLVI (1907-8).
- (²) PROUDMAN J.: *Free and forced longitudinal Tidal Motion in a Lake*, Proceedings of the London Mathematical Society — Second Series — XIV (1915).
- (³) MALTUZZI L.: *Sulla determinazione delle « seiches » forzate e delle sesse libere mediante un'equazione integrale di Volterra di seconda specie*, Rend. Acc. Naz. dei Lincei, cl. sc. fis., mat. e nat., XXXIII, s. 5, (1921).
- (⁴) DOODSON A. T. e collaboratori: *Theoretical Determination of the Longitudinal Seiches of Lake Geneva*, Transactions of the Royal Society of Edinburgh, LII, (1917-1921).
- (⁵) HIDAKA K.: *Application of Ritz's Variation Method to the Determination of Seiches in a Lake*, The Memoirs of the Imperial Marine Observatory, VI, 2, (1936).
- (⁶) NEUMANN G.: *Eigenschwingungen der Ostsee*, Ans der Archiv der Deutschen Seewarte und des Marineobservatoriums, 61, (1911).
- (⁷) MAGRINI G. P.: *Limnologia*, Manuali Hoepli (1907).
- (⁸) VERCELLI F.: *Le teorie idrodinamiche delle sesse...*, Mem. Ist. Lombardo Sc. e Lett., XXI, (1909).
- (⁹) DEFANT A.: *Ueber die stehenden Seespiegelschwankungen (Seiches) in Riva am Gardasee*, Sitzungsberichte der K. Akademie der Wissenschaften — Wien Mathematisch-Naturwiss., — Kl., CXVII, Abt. II, (1908).
- (¹⁰) DEFANT A.: *Le sesse del lago di Garda*, Nuovo Cim., XX, 35, (1910).
- (¹¹) VERCELLI F.: *Risposta alla Nota del Dott. Defant e Sulle sesse del lago di Garda*, Nuovo Cim., XX, 357, (1910).
- (¹²) DEFANT A.: *Neue Methode zur Ermittlung der Eigenschwingungen (Seiches) von abgeschlossenen Wassermassen (Seen, Buchten usw.)*, Ann. der Hydrogr., usw., XLVI, II, (1918).
- (¹³) MAGRINI G. P.: *I recenti studi sulle sesse e le sesse dei laghi italiani*, Riv. geogr. ital., XII, 291, (1905).
- (¹⁴) TEGGIO A.: *Le sesse del lago di Garda*, Rend. Acc. naz. Lincei, XIV, cl. sc. fis., mat. e nat., (1905).
- (¹⁵) CHRYSTAL G.: *Proceedings of the Royal Society of Edinburgh*, V, 2, 627, (1903-1905); Transactions della stessa Società, XLI, 613.