BEITRÄGE ZUR THEORIE DER SEICHES IN ZUSAMMENGESETZTEN SEEBECKENSYSTEMEN (*)

GERHARD NEUMANN

In der Natur kommen oft Seen und Meeresbuchten vor, die an einer oder an mehreren Stellen verzweigt sind oder durch enge Kanäle mit anderen Wasserbecken in Zusammenhang stehen. Solche *aus einzelnen Teilbecken zusammengesetzten Seen und Meeresbuchten* haben, wie die Beobachtungen an Modellen und natürlichen Seen gezeigt haben, ihre ganz besonderen und oft recht komplizierten Schwingungsformen (Seiches). In ihnen bilden sich nicht nur *Teilschwingungen* der abgeschnürten Seeteile aus, sondern es lassen sich auch *Schwingungen des Gesamtsystems* nachweisen, die ihrerseits wieder von den Perioden und Dimensionen der abgetrennten Seeteile und der Art und Grösse der Verbindung dieser Teile abhangen.

Der Versuch, die bisher bekannten theoretischen Methoden zur Ermittlung der Eigenperioden auf solche zusammengesetzten Seebeckensysteme anzuwenden, führt oft zu Schwieringkeiten. Das liegt daran, dass die genannten Theorien von der Voraussetzung ausgehen, dass der Schwingungsvorgang im ganzen Schwingungsbereich durch ein und dieselbe stetige Funktion der Zeit und des Ortes beschrieben werden kann. Im Falle starker Querschnittsverengungen oder bei engen Ka-

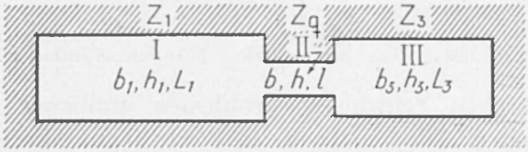

Abb. 1 - Aus zwei Teilbecken zusammengesetztes Seebeckensystem

nälen, die grössere Seebecken miteinander verbinden, ist diese Voraussetzung aber nicht erfüllt. Man wird vielmehr die einzelnen Teile des Seebeckensystems als getrennte Schwingungsgebiete auffassen

(*) La traduzione in lingua italiana della presente nota è riportata a pag. 111.

müssen, die sich gegenseitig beeinflussen und durch deren Zusammenwirken (Kopplung) auch freie Schwingungen des *Gesamtsystems* vorkommen können. Ist z. B. ein beliebig gestalteter See I an einem Ende durch einen engen Verbindungskanal II mit einem zweiten Wasserbecken III verbunden, wie Abb. 1 schematisch darstellt, dann sind zunächst in jedem Seebecken für sich freie Schwingungen möglich. Nun wird aber bei jedem Anstieg des Seespiegels am unvollständig geschlossenen Ende durch den Verbindungskanal eine gewisse Wassermenge in den benachbarten Seeteil abströmen und beim Fallen des Seespiegels wieder zurückfliessen. Dadurch wird nicht nur die Eigenperiode der einzelnen Teilbecken in bestimmter Weise verändert, sondern es tritt auch eine *zusammengesetzte Schwingung des Gesamtsystems* auf. Durch die im Verbindungskanal hin und herströmende Wassermenge sind beide Teilbecken miteinander « gekoppelt ». Es handelt sich nun darum, neben den Teilschwingungen der einzelnen Seen, auch die Perioden des gekoppelten Gesamtsystems zu bestimmen. Zu diesem Problem gehören eine ganze Reihe anderer, in der Theorie der Seiches wichtiger Fälle komplizierter Beckenkombinationen. Eine besondere Rolle spielt die Frage, wie z. B. die Eigenperioden eines Sees verändert werden, wenn der See durch seitliche Öffnungen bzw. Kanäle mit dem freien Meer in Verbindung steht. In Abb. 2 ist ein solches seitlich geöffnetes Seebeckensystem schematisch dargestellt, um die Problemstellung zu erläutern.

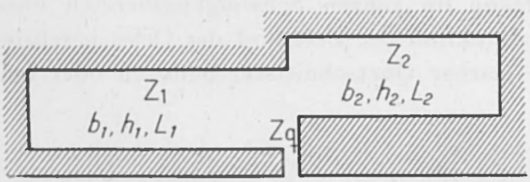

Abb. 2 - Seebeckensystem mit seitlicher Mündungsoffnung zum Meer

Bei akustischen Schwingungsproblemen ähnlicher Art und in zusammengesetzten elektromagnetischen Schwingungskreisen hat man zur Ermittlung der Eigenperioden solcher Systeme mit Erfolg den Begriff der *Impedanz* eingeführt. Diesen Impedanzbegriff hat Verf ([1]), vom Beispiel eines schwingenden Massenpunktes ausgehend, auf kontinuierliche Systeme übertragen und sinngemäss auf die Theorie der *Seiches* angewandt. Dabei wurde als hydrodynamische Impedanz bei den Schwingungen von Wassermassen das Verhältnis

$$Z = \frac{p_0}{S(\partial\xi/\partial t)_{\max}} = \frac{\text{Druckamplitude}}{\text{Fläche} \times \text{Geschwindigkeitsamplitude}} \qquad [1]$$

definiert. Diese Grösse ist für einzelne charakteristische Schwingungsgebilde aus den hydrodynamischen Bewegungsgleichungen zu bestimmen. In zusammengesetzten Seebeckensystemen sind die Impedanzen Z_1, Z_2, Z_3,... der Teilglieder des Systems in derselben Weise zu addieren, wie z. B. die Widerstände in elektromagnetischen Schwingungskreisen. Ist die Impedanz eines Schwingungssystems bekannt, dann lassen sich die Eigenfrequenzen $\omega_\nu = \frac{2\pi}{T_\nu}$ des Systems aus der Bedingung $Z = O$ bei Vernachlässigung der Reibung gewinnen (sonst $Z = \text{Min.}$).

Für die Impedanz einfacher Schwingungssysteme und ihrer Glieder wurden Formeln abgeleitet ([1]), die gestatten, die Eigenperiode der Seiches in beliebig gestalteten Seebeckenkombinationen unter Berücksichtigung der unregelmässigen Beckengestalt mit ausreichender Genauigkeit zu berechnen. Sie bilden eine Ergänzung zu den bekannten Seichestheorien, weil sie dort angewandt werden können, wo die letzteren versagen, also bei unvollständig begrenzten Wassermassen u.s.w.

Für die wichtigsten Glieder eines Schwingungssystems sind die Grössen Z im folgenden angegeben. Bezüglich der Ableitung sei auf die Originalabhandlung ([1]) verwiesen:

1) Bei einseitig geschlossenen Becken von der mittleren Querschnittsfläche $S = bh$ (b = Breite, h = Tiefe) gilt

$$Z = -\frac{i\varrho c}{S}\cot\!g\,\frac{\omega L}{c}\ , \quad L = \lambda/_4\ , \qquad [2]$$

worin $i = \sqrt{-1}$, $c = \sqrt{gh}$, $\omega = \frac{2\pi}{T}$, L = Länge des Beckens, λ = Wellenlänge und ϱ die Dichte des Wassers bedeuten. Dieselbe Formel gilt auch für ein beiderseits geschlossenes Becken, nur ist in diesem Falle $L = \lambda/_2$ zu setzen.

2) Die Impedanz eines an *beiden* Enden offenen langgestreckten Wasserbeckens ist

$$Z = \frac{i\varrho c}{S}\,\mathrm{tg}\,\frac{\omega L}{c}\ , \quad L = \lambda/_2 \qquad [3]$$

3) Für eine enge Abflussöffnung oder einen engen Kanal vom Querschnitt $q = hb$ und der Länge L gilt

$$Z_n = \frac{i\varrho\omega L}{q}\,. \qquad [4]$$

Für die geometrische Länge L des Abflusskanals muss gegebenenfalls eine « effektive » Länge $L' = L + \alpha$ eingeführt werden. Durch die Zusatzstrecke α wird die in der Nähe der Öffnung mitschwingende Wassermasse berücksichtigt. Es handelt sich hier um die Anbringung einer Art « Mündungskorrektion », über die Verf. (5) spezielle Untersuchungen angestellt hat und in einer besonderen Notiz darüber berichten wird.

4) Ein Wasserbecken, das durch eine enge Öffnung mit dem freien Meer oder einem anderen grösseren Becken verbunden ist, hat, wenn die Dimensionen dieses Beckens nach allen Richtungen ungefähr gleich sind (kreisförmige Gestalt) eine besonders bevorzugte Schwingungsform. Es kann zu Schwingungen kommen, bei denen das ganze Wasserniveau im See gleichmässig steigt und fällt. Das akustische Analogon zu diesem Schwingungsgebilde ist der HELMHOLTZ-Resonator. Die Rechnung ergibt für die Impedanz eines solches Systems

$$Z = \frac{i\varrho\omega L}{q} - \frac{i\varrho c^2}{Q\omega}, \qquad [5]$$

worin Q das Volumen des Wasserbeckens bedeutet. Z setzt sich hier aus zwei Teilen zusammen, aus der Impedanz der Abflussöffnung Z (Formel 4) und einem zweiten Gliede $Z = i\varrho c^2/Q\omega$, der Impedanz des abgeschlossenen Wasservolumens. Mit $Z = O$ folgt aus [5]

$$-\frac{g}{F.\omega} + \frac{\omega L}{q} = 0 \quad \text{und} \quad T = 2\pi\sqrt{\frac{F.L}{g \cdot q}}$$

(F = Areal der Seeoberfläche). Das ist eine in der Theorie der Seiches bekannte und von den Japanern speziell abgeleitete Periodengleichung, die hier als Nebenergebnis aus der allgemeineren « Impedanztheorie » unmittelbar folgt.

Ganz spezielle Fälle hat auch N. ZEILON (6) behandelt, indem er aus den hydrodynamischen Bewegungsgleichungen unter Berücksichtigung der Grenzbedingungen die Periode der Seiches in *verzweigten* Seebeckensystemen berechnet. Diese älteren Untersuchungen seien hier nur erwähnt, *weil sie alle in der vorgeschlagenen Methode* unter einheitlichem Gesichtspunkt *enthalten* sind. Die von ZEILON abgeleiteten Formeln lassen sich mühelos mit Hilfe der Impedanztheorie sofort als Spezialfälle hinschreiben:

a) *Verzweigter geschlossener See (vergl. Abb. 3)*

An diesem Beispiel lässt sich gleich die Methode erläutern. Der

See I gabele sich in die Abzweigungen II und III. Bei den Schwingungen kann das Wasser aus Becken I sowohl in das Becken II als auch in das Becken III strömen. Es liegen also die Becken II und III mit den Impedanzen Z_2 und Z_3 « parallel geschaltet » hinter dem

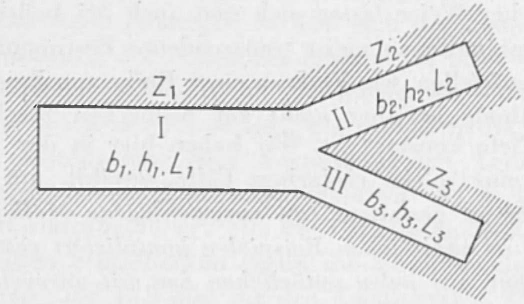

Abb. 3 - Verzweigtes Seebeckensystem

Becken I mit der Impedanz Z_1. Bezeichnen wir mit P die Gesamtimpedanz von II und III, dann ist

$$\frac{1}{P}=\frac{1}{Z_2}+\frac{1}{Z_3} \quad \text{und} \quad P=\frac{Z_2 Z_3}{Z_2+Z_3}.$$

I und (II + III) sind aber « in Serie geschaltet », d.h.

$$Z_1+P=Z_1+\frac{Z_2 Z_3}{Z_2+Z_3}.$$

Die Bedingung für die Eigenfrequenz wird dann

$$\frac{1}{Z_1}+\frac{1}{Z_2}+\frac{1}{Z_3}=0$$

und mit [2]

$$\frac{b_1 h_1}{\varrho c_1}\operatorname{tg}\frac{\omega L_1}{c_1}+\frac{b_2 h_2}{\varrho c_2}\operatorname{tg}\frac{\omega L_2}{c_2}+\frac{b_3 h_3}{\varrho c_3}\operatorname{tg}\frac{\omega L_3}{c_3}=0.$$

Nach Multiplikation mit g (Schwerebeschleunigung) erhalten wir

$$b_1 c_1 \operatorname{tg}\frac{\omega L_1}{c_1}+b_2 c_2 \operatorname{tg}\frac{\omega L_2}{c_2}+b_3 c_3 \operatorname{tg}\frac{\omega L_3}{c_3}=0,$$

also die Gleichung von N. Zeilon (6).

Ähnliche transzendente Gleichungen lassen sich auch für den Fall ableiten, dass einer der Seen, zwei oder alle drei am Ende geöffnet sind. Sind z.B. die Seen I und II am Ende geöffnet, See III aber geschlossen, dann folgt

$$-b_1 c_1 \operatorname{cotg}\frac{\omega L_1}{c_1} - b_2 c_2 \operatorname{cotg}\frac{\omega L_2}{c_2} + b_3 c_3 \operatorname{tg}\frac{\omega L_3}{c_3} = 0.$$

In ähnlicher Weise lassen sich nun auch bei beliebigen anderen Seebeckenkombinationen meist transzendente Bestimmungsleichungen für ω bzw. T aufstellen, wie Verf. an einer Reibe von Beispielen gezeigt hat. Die Methode ist aber *nicht* auf Seebecken beschränkt, deren Breite und Tiefe konstant ist. Wir haben hier in den schematischen Abbildungen nur solche einfachen Fälle gewählt, um das Problem übersichtlicher zu gestalten. *Die vorgeschlagene Methode lässt sich, wie Verfasser an zahlreichen Beispielen kompliziert gestalteter Alpenseen gezeigt hat, auf jeden natürlichen See mit unregelmässiger Konfiguration anwenden.* Einige Beispiele mögen zur Erläuterung angefügt sein.

1) Der *Königssee* in Oberbayern wird durch die Einengung des Beckens bei St. Batholomä in zwei ungleich grosse Teilbecken zerlegt. Auf ihn lässt sich die schematische Abb. 1 anwenden. Das gekoppelte Gesamtsystem besteht hier aus zwei Teilseen I und III, die durch einen « Verbindungskanal » II in Zusammenhang stehen. Bezeichnen wir die Impedanzen der Teilglieder der Reihe nach mit Z_1, Z_q und Z_3 (Abb. 1), dann ist mit den Formeln [2] und [4] die Bedingung für die Eigenfrequenz

$$Z_1 + Z_q + Z_3 = -\frac{c_1}{S_1}\operatorname{cotg}\frac{\omega L_1}{c_1} + \frac{\omega L}{q} - \frac{c_3}{S_3}\operatorname{cotg}\frac{\omega L_3}{c_3} = 0$$

und

$$\omega = \frac{2\pi}{T} = \frac{q}{L}\left(\frac{c_1}{S_1}\operatorname{cotg}\frac{\omega L_1}{c_1} + \frac{c_3}{S_3}\operatorname{cotg}\frac{\omega L_3}{c_3}\right).$$

Dafür können wir auch schreiben

$$\frac{2\pi}{T} = \frac{q}{L}\left(\frac{c_1}{S_1}\operatorname{cotg}\pi\frac{T_I}{T} + \frac{c_3}{S_3}\operatorname{cotg}\pi\frac{T_{III}}{T}\right). \qquad [6]$$

In der Gleichung stehen jetzt für $2L_1/c_1$ und $2L_3/c_3$ die Perioden T_I und T_{III} der *Teilschwingungen* der einzelnen Seen, wie sie bei vollständig gedachtem Abschluss am Verbindungskanal auftreten würden. Sie können unter weitgehender Berücksichtigung der Beckenkonfiguration nach der DEFANTschen Restmethode ([7]) bestimmt werden. Die in Gleichung [6] auftretende Periode T ist die *Eigenperiode des* *gekoppelten Gesamtsystems.* Mit T_I und T_{III} sind auch die effektiven Werte c_1 und c_3 bestimmt, sodass sich T aus der transzendenten Gleichung [6] gerechnen lässt. Für die Hauptperiode des ganzen Königssees ergibt sich $T = 11{,}0$ *Min.* Aus Pegelaufzeichnungen hat A. ENDRÖS ([8]) die Hauptperiode zu 11,6 Min. bestimmt. Die Schwingungen waren aber stark gedämpft, so dass sich die berechnete Periode mit Berücksichtigung der Dämpfung noch etwas erhöhen wird.

2) Besonders auffallend sind die Seiches im *Waginger- Tachingersee* der, wie schon der Name sagt, ein Doppelsee ist. Zwischen beiden Teilseen besteht eine enge Verbindung bei Tettenhausen. Die Länge des verbindenden Kanals beträgt etwa 140 m bei einem Kanalquerschnitt von nur 90 m². Für die Grundperiode der Teilschwingungen in beiden Einzelbecken ergibt die Restmethode 18,0 Min für den Wagingersee und 13,8 Min für den Tachingersee. Die Lösung der Gleichung [6] gibt aber für das *zusammengesetzte System* Waginger-Tachingersee eine weitaus grössere Hauptperiode der Seiches nämlich $T = 64$ *Min.* Solche langsamen Schwingungen des Gesamtsystems sind von A. ENDRÖS ([9]) neben den kürzeren Teilschwingungen der einzelnen Becken tatsächlich beobachtet worden, obwohl es ihm nicht möglich war, diese auffallend lange Periode theoretisch zu deuten. In den Pegelaufzeichnungen tritt diese Schwingung deutlich mit einer mittleren Periode $T = 62$ *Min* in Erscheinung. *Diese Seiche erklärt sich also als Hauptschwingung des gekoppelten Systems Waginger-Tachingersee.* Das vorliegende Rechenergebnis und seine Übereinstimmung mit den Beobachtungen erweisen die Brauchbarkeit der hier angewandten Methode. Verf. ([3]) hat zur Prüfung der Methode noch eine ganze Reihe anderer kompliziert gestalteter Seebeckenkombinationen herangezogen, auf die hier im einzelnen aber nicht eingegangen werden kann. Interessant ist noch das Beispiel des

3) *Plan-Heiterwangersees.* Die Verbindung zwischen dem grösseren Plansee und dem kleineren Heiterwangersee ist extrem eng, wobei der kleine Heiterwangersee mehr als ein « Abflussbecken » für den grösseren Plansee aufzufassen ist. Die Periodengleichung für das *zusammengesetzte Seesystem lautet in disem Falle.*

$$\operatorname{cotg} \pi \frac{T_I}{T} = \frac{2\pi S_1 L}{c_1 \cdot q} \frac{1}{T} \left(1 - \frac{T^2}{T_{II}^2}\right), \qquad [7]$$

wobei sich die Indizes 1 auf den Plansee beziehen. T_I ist die Teilperiode des Plansees und T_{II} die des Heiterwangersees. L und q sind die Länge und die mittlere Querschnittsfläche des verbindenden Kanals. Die Grundperiode T der Seiches im zusammengesetzten System wird nach Gleichung [7] für die Grundschwingung

$$T = 124 \text{ Minuten},$$

also *auffallend gross.* Auch diese lange Seichesperiode ist von A. Endrös ([10]) beobachtet worden, konnte aber bisher theoretisch schwer erklärt werden, da die Hauptschwingungsdauer des *Plansees allein* nur rund *10 Min* betragen würde. Endrös vermutete schon eine « Ausgleichsschwingung » zwischen beiden Seen. Dass diese Vermutung richtig ist, bestätigt das vorliegende Ergebnis der Impedanztheorie.

Es ist wohl kaum nötig zu bemerken, dass sich aus den Lösungen der transzendenten Periodengleichungen, die für jede Seebeckenkombination mit Hilfe des Impedanzbegriffes leicht aufgestellt werden können, auch die Perioden der Oberschwingungen berechnen lassen. Hierauf braucht aber in diesem kurzen Referat nicht näher eingegangen zu werden.

Eine besondere Rolle kommt den *Öffnungen* an einem Ende oder an der Seite langgestreckter Seen zu, die in ein freies Meeresgebiet überleiten (Abb. 2). Durch periodisches Abfliessen und Zuströmen von Wasser durch die Öffnung werden die Eigenperioden der Seiches im See in bestimmter Weise verändert. Die Impedanztheorie zeigt, dass je nach der Lage der Abflussöffnung zu den Schwingungsbäuchen und Knoten der betrachteten Seiche im See eine mehr oder weniger grosse *Erniedrigung der Periode* eintritt. Am Beispiel des *Frischen Haffes* an der ostpreussischen Küste, das durch das enge « Pillauer Tief » mit der Ostsee verbunden ist, konnte gezeigt werden wie stark der Einfluss solcher Öffnungen an der Seite schwingender Wassermassen ist. Ohne Berücksichtigung der seitlichen Verbindung zur Ostsee würde die Hauptseiches-Periode des Frischen Haffes 9,7 Stunden betragen. Die vorliegende Theorie ergibt aber bei Mitberücksichtigung des « Pillauer Tiefs » eine Hauptperiode von nur $T =$ *8,05 Stunden,* was mit der beobachteten Seichesperiode von rund 8 Stunden gut übereinstimmt.

Diese seitlich oder am Ende geöffneten Seebecken bilden ein Mitteldinq zwischen « See » und « Meeresbucht ». Sie haben ihre ganz besonderen Seiches. Die mit solchen Becken zusammenhängenden Fragen, insbesondere auch die Frage nach der « Mündungskorrektur » werden in einem speziellen Bericht in dieser Zeitschrift behandelt.

Hamburg — Geophysikalisches Institut der Universität.

ZUSAMMENFASSUNG

Die Anwendung des Impedanzbegriffes auf die Theorie der Seiches führt zu einer einfachen und allgemeinen Methode, die Eigenperioden solcher Seebeckensysteme zu berechnen, die aus mehreren schwingungsfähigen Einzelgebilden zusammengesetzt sind. An Beispielen wird gezeigt, wie die für bestimmte Beckenkombinationen nach anderen Methoden abgeleiteten Periodengleichungen leicht aus der « Impedanztheorie der Seiches » als Spezialfälle herzuleiten sind. Andere, in der Literatur noch nicht behandelte Fälle kompliziert gestalteter Seebeckenkombinationen werden untersucht. Der vorliegende Bericht fasst einige hierher gehörende Arbeiten einheitlich zusammen und zeigt, wie z. B. die Eigenperiode eines Sees, der durch enge Kanäle mit anderen Wasserbecken verbunden ist, durch die Abzweigungen beeinflusst wird. Die Methode ist nicht auf Seebecken konstanter Breite und Tiefe beschränkt, sondern lässt sich auf jeden unregelmässig gestalteten See anwenden, wie an Beispielen der Alpenseen gezeigt wird.

BIBLIOGRAFIA

(1) NEUMANN G.: *Über die Periode freier Schwingungen in zwei durch einen engen Kanal miteinander verbundenen Seen.* Ann. Hydr. u. mar. Metor., 1943, Seite 409.

(2) — *Die Impedanz mechanischer Schwingungssysteme und ihre Anwendung auf die Theorie der Seiches.* Ann. Hydr. u. mar. Meteor., 1944, S. 65.

(3) — *Eine Methode zur Berechnung der Eigenperioden zusammengesetzter (gekoppelter) Seebeckensysteme.* Ann. Hydr. u. mar. Meteor., 1944, S. 193.

(4) — *Freie Schwingungen (Seiches) der Putziger Wiek.* Ann. Hydr. u. mar. Meteor., 1944, S. 225.

(5) — *Über Resonanzschwingungen von Meeresbuchten und die Mündungskorrektur bei Seiches.* Deutsche Hydr. Zeitschr., Bd. 1, Heft 2/3, 1948.

(6) ZEILON N.: *On the seiches of the Gullmar Fjord.* Ur Svenska Hydr.-Biol. Komm. Skrifter, V, 1913.

(7) DEFANT A.: *Neue Methode zur Ermittlung der Eigenschwingungen (Seiches) von abgeschlossenen Wassermassen.* Ann. Hydr. u. mar. Meteor., 1918, S. 78.

(8) ENDROS A.: *Eine merkwürdige Seiche des Königssees und die eigentümliche Temperaturschichtung seines Tiefenwassers.* Pet. Geogr. Mitt., 1927, S. 73.

(9) — *Die Seiches des Waginger-Tachingersees.* Sitz. ber. Math.-Phys. Kl. d. Bayr. Akademie d. Wiss., Bd. 35, Heft 3, 1905.

(10) — *Beobachtungen über die Dämpfung der Seiches in Seen.* Gerl. Beitr. z. Geophysik, Bd. 41, 1934.