MATHEMATISCHE PROBLEME DER GEOPHYSIK (*)

ERWIN HARDTWIG

Die Geophysik ist ein Teilgebiet der Physik, jenes Teilgebiet, das sich mit den physikalischen Vorgängen befasst, die unmittelbar mit der Erde zusammenhängen. Die Folge davon ist, dass sich die Struktur, der Aufbau der physikalischen Wissenschaft in der Geophysik wiederholt und zwar nicht nur hinsichtlich der Einteilung in Einzelgebiete wie Mechanik, Hydromechanik, Elektromagnetismus, Optik usw. sondern auch hinsichtlich der Gliederung in einen mehr praktischen, angewandten und einen theoretischen Teil. Während aber in der Physik sich die Absonderung des theoretischen Teils, eben der theoretischen Physik, als zweckmässig und fruchtbar erwiesen hat, stellte sich bisher das Bedürfnis nach einer mehr oder weniger autonomen « theoretischen Geophysik » noch nicht ein und dürfte wohl für die nächste Zeit auch nicht zu erwarten sein. Dies ändert aber an der Tatsache nichts, dass es in der Geophysik weite Gebiete gibt, die, in sich mehr oder weniger abgeschlossen, zu ihrer Behandlung rein theoretische und das heisst: rein mathematische Methoden erfordern. Im Folgenden sollen geophysikalische Probleme aufgezeigt und kurz besprochen werden, die sich bei näherem Zusehen als rein mathematische Fragestellungen erweisen. Es liegt in der Natur der Sache, dass bei der Darstellung in erster Linie, solche Probleme angeführt werden, mit denen sich Verf. selbst näher beschäftigt oder zu deren Lösung er durch eigene Arbeiten beigetragen hat.

Hydrodynamische Probleme. — Die Beantwortung einer ganzen Reihe von geophysikalischen Fragen hängt davon ab, ob man imstande ist, bestimmte hydromechanische Probleme zu lösen. Ich erinnere in diesem Zusammenhang an die Theorie der Gezeiten, an die theoretische Behandlung der Meeresströmungen, an die Eigenschwingungen von mehr oder weniger abgeschlossenen Meeresteilen und Binnenseen, an die Fragen, die mit der Erzeugung, der Ausbreitung und dem Abklingen von Wasserwellen (Meereswellen) verknüpft sind. Dazu

(*) La traduzione in lingua italiana della presente nota è riportata a pag. 411.

kommt der ungeheuer grosse Komplex von aerodynamischen Problemen, die von der dynamischen Meteorologie gestellt werden. Kein einziges dieser Probleme ist vollständig gelöst, die Mehrzahl von ihnen ist noch gar nicht oder doch nur in bescheidenem Umfang in Angriff genommen.

Erinnern wir uns daran, um was es sich hier handelt. Bedeuten u, v, w, die Komponenten der an einer bestimmeten Raumstelle x, y, z zur Zeit t herrschenden Strömungsgeschwindigkeit, ρ die Dichte der Flüssigkeit (der Luft) und p den Druck an dieser Stelle, sind ferner X, Y, Z die Komponenten der von aussen wirkenden Massenkraft (z. B. der Schwerkraft oder der Flutkräfte), so müssen die folgenden *vier* Differentialgleichungen simultan bestehen:

$$\left.\begin{array}{l} \dfrac{\partial u}{\partial t} + u\dfrac{\partial u}{\partial x} + v\dfrac{\partial u}{\partial y} + w\dfrac{\partial u}{\partial z} = X - \dfrac{1}{\rho}\dfrac{\partial p}{\partial x} \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \dfrac{\partial \rho}{\partial t} + \dfrac{\partial(\rho u)}{\partial x} + \dfrac{\partial(\rho v)}{\partial y} + \dfrac{\partial(\rho w)}{\partial z} = 0 \end{array}\right\} \quad [1]$$

Es sind dies die drei Impulsgleichungen und die Kontinuitätsgleichung in Euler'schen Koordinaten, bezogen auf ein rechtwinkliges, kartesisches Achsenkreuz. Diesen wier Gleichungen stehen *fünf* unbekannte Funktionen u, v, w, ρ, p von x, y, z, t gegenüber. Die Strömung ist daher unterbestimmt, solange nicht eine fünfte Gleichung hinzugefügt wird.

Sehen wir zunächst von der noch fehlenden fünften Gleichung ab. Das Strömungsfeld bedarf zu seiner Bestimmung auch noch der Angabe von *Anfangs* = und *Randbedingungen*. Was die ersteren Anlangt, so sollen sie die Anfangsströmung und = dichte sowie den Anfangsdruck festlegen: $u(x, y, z, o) = u_0, \ldots p(x, y, z, o) = p_0$ also den Zustand zur Zeit $t = o$. Die Lösung des Proglems 1) wird dann zwar von dem so definierten Anfangszustand abhängen, aber sein Einfluss auf die Form der Lösung wird mit zunehmender Zeit immer kleiner und kann schliesslich ganz vernachlässigt werden. Die Anfangsbedingungen sind, geophysikalisch gesprochen jene, die am ehesten zu vernachlässigen sind. Eine viel grössere Bedeutung kommt den Randbedingungen zu. Die irdischen Wassermassen, mit denen wir es in der Geophysik zu tun haben, sind allseitig begrenzt, sei es *a*) durch die freie Oberfläche, *b*) durch den Boden (Meeresboden, Seeboden), *c*) durch die Berandung (Ufer).

Solange es sich um hydrodynamische Fragen handelt, kann ρ

als konstant angenommen werden und die Kontinuitätsgleichung drückt dann die Inkompressibilität der Flüssigkeit aus. Das viergliedrige System I) reicht dann zusammen mit den Nebenoedingungen vollkommen zur Bestimmung des Strömungs = und Druckfeldes aus. Trotzdem dies der einfachste Fall ist, der sich denken lässt, ergeben sich bei der tatsächlichen Durchrechnung von Beispielen erhebliche Schwierigkeiten. Die Hauptschwierigkeit liegt darin, dass es bisher noch nicht gelungen ist, Systeme nichtlinearer, partieller Differentialgleichungen zu integrieren. Die Integration *einer* nichtlinearen, partiellen Differentialgleichung mit *einer* unbekannten Funktion wird bekanntlich durch die *Hamilton-Jakobi'sche Theorie* geleistet. Eine sinngemässe Übertragung auf Systeme ist bisher von der Mathematik nicht geleistet worden, obwohl man annehmen könnte, dass die Lieschen Gedanken zur Behandlung Pfaff'scher Gleichngen eine solche Übertragung möglich machen oder aber die Unmöglichkeit der Übertragung erkennen lassen müsste. Eine weitere Schwierigkeit liegt darin, dass die hydrodynamischen Gleichungen der Erdfigur angepasst, d. h. auf globale Polarkoordinaten umgerechnet werden müssen. In den krummlinigen Koordinaten tritt dann die Nichtlinearität in besonders unangenehmer Form auf, weil Glieder zweiter Ordnung in den u, v, w... vorkommen, die sich grössenordnungsmässig schwer gegeneinander und gegen die zu erwartende Lösung abschätzen lassen, und daher das zweckmässige Vernachlässigen erschweren. Die umgerechneten Gleichungen werden vor allem auch deshalb kompliziert, weil die neuen Koordinaten auf die rotierende Erde bezogen werden müssem.

Die hier zu erwähnende *Laplace'sche Theorie der Gezeiten* beweist zweierlei: erstens, dass man mit Hilfe gewisser, vereinfachender Annahmen (überall gleich tiefer, die Erde ganz umhüllender Ozean, Wegfall der Eigenschwingungen) bereits zu wesentlichen Aussagen über den Ablauf der Gezeiten kommen kann, zweitens aber, dass diese Aussagen mit der Erfahrung nur mangelhaft übereinstimmen. Der Grund liegt in der Nichtberücksichtigung der Randbedingungen. Nicht nur ist die Meerestiefe eine sehr variable Ortsfunktion, auch die Berandung des Ozeans ist mit ihren zahllosen Krümmungen, Buchten, Meerengen, abgesonderten Meeresteilen und Inseln von so unendlicher Mannigfaltigkeit, dass es praktisch unmöglich ist, den Verlauf der Berandung in eine empirische Formel zu fassen, geschweige denn, mit dieser « Randbedingung » dann die hydrodynamischen Gleichungen zu integrieren. Das Problem der Beschreibung der

Gezeitenphänomene ebenso wie jenes der Meeresströmungen ist also, abgesehen von der grundsätzlichen Schwierigkeit der Integration nichtlinearer Systeme schon aus Gründen der praktischen Mathematik kaum je befriedigend zu lösen. Was wir hier tun können und was in der *Airy'schen Kanaltheorie der Gezeiten* sowie in den Arbeiten von R. v. Sterlineck d. J. schon versucht ist, kann nur das Lösen von Teilproblemen sein, die von mathematisch einfach zu behandelnden Berandungen ausgehen und so wenigstens für Teile der Erdoberfläche die Beschreibung der Gezeitenphänomene zulassen.

So schmerzlich der Verzicht auf eine globale Beschreibung der hydrographischen Vorgänge auch sein mag, so erfolgreich ist die Bearbeitung von Teilproblemen. In diesem Zusammenhang verweise ich auf die Theorie der Beckenschwingungen von isolierten Meerteilen und Bissenseen (Seiches), wie sie, ausgehend von den noch einfachen Versuchen P. du Boys und Chrystall's ([1]), von A. Defant ([2]), und Hidaka ([3]) entwickelt worden ist. Die Untersuchungen von P. Caloi ([4]) und seiner Schule über die Eigenschwingungen des Golfs von Neapel und einer Reihe italienischer Seen haben gezeigt, wie weitgehend Theorie und Erfahrung schon zur Deckung gebracht werden konnten. Es wäre zu wünschen, dass nach diesem Vorbild die Eigenschwingungen der deutschen Seen, speziell der oberbayerischen, nochmals gerechnet würden. Die vierzig Jahre zurückliegenden Untersuchungen von Endrös stützen sich noch auf die Chrystal'schen Arbeiten und können als veraltet gelten.

Auch was die Theorie der Wasserwellen anlangt, ist die Hauptarbeit noch zu tun. Die Darstellungen von Thorade ([5]), Graf v. Larisch-Moenich ([6]) und O. Krümmel ([7]) tragen zwar einen umfangreichen Wissensstoff, vor allem empirischer Natur zusammen, treten aber in die einzelnen Probleme nicht ein. Diese sind: die Erzeugung der Meereswellen durch Wind, ihre Ausbreitung und die damit verbundene Periodenverlängerung einerseits, Extinktion andrerseits. Was die Genetik der Meereswellen anlangt, so sind durch die Arbeiten von Jeffreyes ([8]), Bondi ([9]) und G. Neumann ([10]) allerdings bereits beachtliche Ansätze zur Lösung gemacht worden. Die hier vorliegenden Probleme können unter der vereinfachenden Voraussetzung eines unendlich ausgedehnten, den Halbraum erfüllenden flüssigen Mediums durchgerechnet werden dessen freie (und rauhe!) Oberfläche an das bewegte Medium Luft grenzt. Die Reibung, als wesentlich an der Erzeugung und Formänderung beteiligt, darf nicht vernachlässigt werden, d. h. es müssen die *Navier-Stokes'schen Gleichungen* visköser

Flüssigkeiten die Grundlage der Untersuchung bilden. Da es sich hier in erster Linie um Oberflächenwellen handelt, ergibt sich von selbst eine gewisse Analogie zur Seismik. Besonders das Problem der Periodenverlängerung und Extinktion kürzerperiodischer Wellen bedarf einer genauen Untersuchung. Wenn gerade diese beiden Fragenkomplexe bisher nicht befriedigend beantwortet werden konnten, so hat dies einen mathematischen Grund. Gewiss spielt die Viskosität des Wassers, bei Erdbebenwellen, des festen Körpers, dabei eine Rolle. Sie verursacht Dämpfung und damit selektive Extinktion sowie- in der Randwertaufgabe- Periodenverlägerung. Aber sie ist nicht der einzige Grund dafür. Der Hauptgrund dürfte ein rein mathematischer sein. Beides- Periodenverlängerung und Extinktion- muss sich auch ergeben, wenn man von der « idealen », also reibungsfreien Flüssigkeit ausgeht, soferne man nur die Bewegungsgleichungen *streng* zu integrieren versucht. Streng, das soll hier heissen: mit Berücksichtigung der Glieder zweiter Ordnung. Man ersetzt ülicherweise, um das Integrationsgeschäft zu erleichtern, die substantiellen Ableitung nach der Zeit du/dt ... durch die lokalen $\partial u/\partial t$ und linearisiert dadurch das Problem. Gerade dadurch aber schleppt man, ohne es zu wissen, die Voraussetzung ein, die Wellen seien *formbeständig*. Diese Voraussetzung darf gemacht werden, solange es sich um Wellenvorgänge in kleinen Bereichen und über kurze Zeit handelt. Die Unterschiede zwischen Theorie und Erfahrung sind da so klein, dass sie nicht zur Geltung kommen. Meereswellen überstreichen aber ungeheure Gebiete und dauern stünden-, ja tagelang. In *diesem* Falle müssen die Unstimmigkeiten offenbar werden, die ihren Grund in den unberechtigten, vereinfachenden Annahmen haben. Wir stehen also auch hier wieder vor dem Problem, die nichtlinearen Bewegungsgleichungen der Hydrodynamik zu integrieren.

Aerodynamische Probleme. — Wie schon erwähnt, liegen die Verhältnisse besonders einfach, wenn, wie in der Hydrodynamik, $\rho = \text{const}$ angenommen werden darf. Zur Beschreibung der atmosphärischen Vorgänge darf diese Annahme nicht mehr gemacht werden, und dies bedeutet, dass das viergliedrige System I) von Differentialgleichungen das Strömungsfeld (u, v, w, ρ, p) nicht mehr eindeutig bestimmt. Es muss eine zusätzliche Gleichung herangezogen werden. Also solche kann ohne Weiteres die Zustandsgleichung des Gases (der Luft) $\rho = \rho\,(p, T)$ Verwendung finden- es macht nichts aus, wenn wir die ideale Zustandsgleichung $p = R\,\rho\,T$ (R = Gaskonstante, T = absolute Temperatur) als hinreichend genau erfüllt ansehen.

Würde für jedes Volumelement der Atmosphäre die Temperatur als Funktion der Zeit bekannt sein, wäre damit das System I) so vervollständigt, dass die Gesamtströmung, die aus einer bestimmten Anfangsströmung heraus startet und dauernd mit den Randbedingungen im Einklang ist, vollkommen bestimmt wäre. Aber dies ist nun nicht der Fall. Der zeitliche Temperaturverlauf für jeden Punkt der Atmosphäre ist *nicht* bekannt sondern ist umgekehrt nicht nur eine Folge des Ablaufs des Strömungsvorganges sondern- und das ist das Entscheidende- eine Folge der ständigen Absorption und Ausstrahlung von Wärmeenergie. Jedes einzelne Volumelement des Luftozeans steht in dauerndem Strahlungsverkehr mit der Sonne, dem Weltraum und den benachbarten Volumelementen. Dazu kommt, dass am Rande des Bereichs, also an der Erdoberfläche, dauernd Energieabsorption und Ausstrahlung stattfindet, was mit einer Temperaturänderung jedes Flächenelements verbunden ist. Wir dürfen also $T(x, y, z, t)$ in der Zustandsgleichung nicht unabhängig variieren lassen, sondern müssen es als eine ebenfalls unbekannte Funktion ansehen, sodass wir jetzt sechs Funktionen u, v, w, ϱ, p, T zu bestimmen haben. Die noch fehlende sechste Gleichung muss eine Aussage über den Energieverkehr jedes Volumelements bringen. Es kann dies nur der Erste Hauptsatz der Wärmelehre in seiner differentiellen Form sein. Da er die Form einer *nichtintegrablen Pfaff-schen Gleichung* besitzt, bedeutet dies, rein mathematisch gesehen, also ohne Rücksicht darauf, ob die erforderlichen empirischen Angaben auch beigebracht werden können, eine derartige Erschwerung des Problems, dass an seine Lösung nicht gedacht werden kann. Selbst wenn man annimmt, dass die Vorgänge in der Atmosphäre rein adiabatisch oder rein isotherm verlaufen, also selbst wenn man den Ersten Hauptsatz künstlich integrabel macht, wird diese Schwierigkeit nur wenig vermindert.

Das Problem, die globale atmosphärische Zirkulation zu bestimmen, die sich auf der rotierenden Erde unter dem Einfluss der periodisch schankenden Temperatur der (übrigens völlig inhomogenen) Unterlage einstellt, kann daher in dieser Allgemeinheit nicht mit Aussicht auf Erfolg in Angriff genommen werden. Dies ist insoferne bedauerlich, weil von seiner Lösung viel abhängt. Zunächst ergibt sich nämlich, bei allgemeinen und stark idealisierenden Annahmen, ein Bild von der grossräumigen Zirkulation der Luft, die sich aus Passat und Antipassat, Westdrift und Zirkulation der Polarkappen äussert. Das Bild würde verfeinert durch eine genauere Berücksichtigung der Randbedingungen (Erdoberfläche mit thermodynamisch sehr verschiedenen Eigenschaften, wie Land, Meer, nackter Boden, Wald, Schnee...) und würde- zumindest theoretisch- fast vollkommen durch Berücksichtigung der orographischen Verhältnisse in den Randbedingungen.

Das Grundproblem der Meteorologie: aus einer vogegebenen Anfangsverteilung der Luftströmung auf der rotierenden Erdo ihren weiteren Verlauf zu bestimmen, ist also *grundsätzlich* nicht unlösbar Die Aufgabe ist nur praktisch nicht zu bewältigen. Dass es sich hier aber tatsächlich um das Grundproblem handelt, erkennt man, wenn man überlegt, dass dann, wenn der Strömungsablauf aus einer Anfangssituation heraus vorhergesagt werden kann, auch die Verlagerung der Luftmassen, der Fronten und der Druckgebilde vorherbestimmt ist. Diese aber bilden in ihrer Gesamtheit den Witterungsablauf- und auf diesen kommt es an, nicht auf die Vorherbestimmung der einzelnen Wetterelemente.

Auf *einen* Umstand muss in diesem Zusammenhang mit aller Deutlichkeit hingewiesen werden: dass irdische Wettergeschehen birdet, wenn man von ausserterrestrischen Einflüssen (natürlich ausser der Sonne), die zur Not auch denkbar sind, absieht, eine *globale Einheit*. Es ist nicht möglich, ein Teilgebiet der Erdoberfläche herauszugreifen und für dieses das hydro-thermodynamische Strömungsproblem lösen zu wollen. Das geht deshalb nicht, weil zwar unter den dann anzunehmenden Anfangs- und Randbedingungen das Strömungs-, Druck- und Temperaturfeld für den betrachteten Bereich bestimmbar wird, aber sofort über seinen Rand hinauswirkt und diesen selbst wieder beeinflusst, sodass die so modifizierten Randbedingungen auf die Strömung zurückwirken. Es liegt dann eben kein abgeschlossenes, hydro-thermodynamisches System vor. Das Äusserste, was an Unterteilung vorgenommen werden darf, ist die Betrachtung der Nord- und Süd-hemisphäre für sich. Das Äquatorgebit bildet dann für beide den gemeinsamen Rand. Nördliches und südliches Strömungsfeld wären unabhängig von einander. Es ist bekannt, dass auch diese Idealisierung streng genommen nicht stattbaft ist, da die Strömungen über die Äquatorzone hinübergreifen und auch sonst über den Äquator hinweg Energieverkehr besteht. Trotzdem wird das Herausgreifen passender Teilgebiete und Lösen des Strömungsproblems für diese zunächst die einzige Möglichkeit sein, um in der langfristigen Wettervorhersage einige Schritte weiterzukommen. Es ist schon viel gewonnen wenn, ausgehend von einer Anfangssituation, der Strömungsverlauf für die nächsten Tage bestimmt werden kann- immer an Hand verflossener, gut belegter Wetterlagen. Man wird nur nicht erwarten dürfen, dass Theorie und Erfahrung länger als einige Tage konform gehen. Da das Problem nämlich nicht « sachgemäss », d. h. mit der nötigen Vollständigkeit gestellt ist, werden sich Abweichungen zwischen Bild und Wirklichkeit einstellen, die immer grösser werden und schliesslich beide divergieren lassen.

Geht man von solch allgemeinen, sehr schwierigen Problemstellungen über zu spezielleren, bescheideneren, so bleibt immer noch eine Fülle von Möglichkeiten zu fruchtbaren Untersuchungen. Beispielsweise werden Fragen des Gradientwindes immer noch in kleinräumigen(tangentialen Koordinatensystemen behandelt, für die die geographische Breite als konstant angenommen werden darf. Sämtliche Aussagen über den Gradientwind wurden immer unter dieser, sehr einschränkenden Bedingung gewonnen, obwohl sich die in der Natur vorkommenden Hoch- und Tiefdruckgebiete über weitaus grössere Bereiche erstrecken. Die Übereinstimmung mit der Erfahrung reicht für praktische Zwecke aus, eine Beurteilung wird aber erst dann möglich sein wenn die den Gradientwind betreffenden Aussagen in einem globalen, mit dem Erdmittelpulkt fest verbundenen Koordinatensystem untersucht sind. Dass aber selbst in den sogenannten « kleinräumigen » Systemen noch nicht alle Möglichkeiten für den Gradientwind ausgeschöpft worden sind, konnte Verf. vor zwei Jahren in einer kleinen Note zeigen([11]): neben dem normalen Grandientwind ist immer auch, sowohl bei Zyklonen also auch bei Antizyklonen, ein « anormaler » möglich, der stets antizyklonal weht und zwar auch dann, wenn kein Druckgradient vorhanden ist.

Zu den aerodynamischen Problemen der Geophysik zählen auch alle Fragestellumgen, die sich auf Turbulenz- und Austauschvorgänge beziehen - sowohl jene in Gasen (Luft) als auch in Flüssigkeiten (Wasser, Meer). Es ist bekannt, dass über die Entstehung der Turbulenz noch keine befriedigende Theorie aufgestellt werden konnte. Die hydrodynamischen Gleichungen, die stets den Ausgangspunkt für Strömungsuntersuchungen bilden, enthalten in ihrer, für die rechnerische Praxis vereinfachten Form nichts, was auf den Übergang von laminarer zu turbulenter Strömung führen müsste. In der Elastizitätstheorie erlaubt das Mitberücksichtigen der nichtlinearen Glieder die Deutung von bisher nicht deutbaren Erscheinungen, wie etwa der Periodenverlängerung und der Glättung von Wellen. Es erhebt sich der Verdacht, es könnte in der Hydrodynamik ähnlich sein: es besteht die Möglichkeit, dass durch das Linearisieren, das man um der mathematischen Vereinfachung willen vornimmt, in den Bewegungsgleichungen wesentliche Züge ausgemerzt werden, Züge, die in den Folgerungen, die man aus den Gleichungen dann ziehen kann, vielleicht auf jene Beziehungen führen, von denen das Einsetzen der Turbulenz abhängt. Hier bedarf es noch genauerer Untersuchungen auf dem Gebiete der « nichtlinearen Hydromechanik », wie wir kurz sagen wollen- in Analogie mit der Ausdrucksweise der Elastizitätstheorie.

Aber selbst wenn es gelänge, den Übergang von laminarer zu turbulenter Strömung *rein aus den Bewegungsgleichungen heraus* zu beschreiben, wäre es ein hoffnungsloses und wohl auch unnützes Beginnen, wollte man der Verlauf der Strömung vollständig kennen lernen. Wesentlich ist nicht die Kenntnis der Bewegung jedes einzelnen Massenteilchens, sondern vielmehr die Bewegung « im Grossen », die makroskopische Strömung. Es handelt sich also darum, Gleichungen für die makroskopische Strömung aufzustellen. Wir gehen dabei von der Überzeugung aus, dass der Ablauf der makroskopischen Strömung beschreibbar ist durch Gleichungen von der *Navier-Stokes'* schen Form, wenn wir nur für die darin auftretenden Konstanten (Zähigkeit, Reibung) Werte von entsprechend anderer Grössenordnung einsetzen (Turbulenzreibung). Dass dieser Gedanke nicht abwegig ist, zeigen seine Erfolge bei der Behandlung des Windproblems. Schwierig ist nur die Begründung, d. h. die Herleitung der entsprechenden Gleichungen. Der Grund für diese Schwierigkeit liegt in erster Linie darin, dass der Begriff « Turbulenzelement » mathematisch schwer fassbar ist, dass diese Elemente in ebenso schwer zu fassender Wechselwirkung sich befinden und dass sie überdies nicht persistent sind- ganz im Gegensatz zu den Molekülen eines Gases, zu denen sie oft in Parallele gesetzt werden. Verf. hat ([12]) einen Weg zur Herleitung der « makroskopischen Bewegungsgleichungen » zu gehen versucht, indem er von einer Reihe von Postulaten ausging, deren wichtigstes die Annahme ist, das Turbulenzelement sei identifizierbar mit einem mechanischen System sehr hohen Freiheitsgrades. Es steht, wohl ausser Zweifel, dass das Endergebnis, eben die *Navier-Stokes'* schen Gleichungen, richtig ist. Auch dass der *Prandtl'* sche Mischungsweganstatz durch einen allgemeineren, physikalisch plausibleren zu ersetzen sei wird kaum einem Einwand begegnen. Die Identifizierung der Turbulenzelemente aber mit einem System N-ten Freiheitsgrades wird Manchem als Härte erscheinen, und es wäre zu wünschen, dass eine Herleitung derselben Ergebnisse auf einem anderen Wege versucht würde.

Mit dem Turbulenzproblem im Zusammenhang steht das Austauschproblem. Jede Turbulenz bewirkt den Austausch irgendwelcher, an einer bestimmten Raum-Zeit-Stelle des Mediums lokalisierten Eigenschaften (Funktionen), indem sie diese weitertransportiert. Üblicherweise wird dieser Austausch beschrieben durch eine einzige, der Wärmeleitungsgleichung äusserlich ähnliche Differentialgleichung, die Austauschgleichung. Verf. konnte zeigen ([13]), dass die Dinge wesentlich komplizierter liegen. Zur Beschreibung des Austauschvorganges reicht eine einzige Gleichung nicht aus, ebensowenig wie zur Beschreibung einer Strömung eine einzige Gleichung — etwa die Kontinuitätsgleichung — ausreicht. Der Austausch hängt vielmehr von einem System von nichtlinearen, partiellen Differentialgleichungen ab, die den Impulsgleichungen der Hydromechanik analog sind. Die Kontinuitätsgleichung für die Masse muss dabei ihrerseits erfüllt sein und liefert zusätzlich die Austauschgleichung im engeren Sinn. Die Herleitung des Systems vollzieht sich dabei ebenso wie jene der makroskopischen Bewegungsgleichungen turbulent strömender Flüssigkeiten und Gase mit Hilfe einer Reihe plausibler Postulate. Insbesondee wird auf den *Maxwell'* schen Gedanken zurückgegriffen, eine « Transportgleichung » sehr allgemeiner Form heranzuziehen. Aber es gilt hier dasselbe wie oben: während das Endergebnis als solches kaum angezweifelt werden kann ist der Weg, der zu ihm hinführt zwar nicht bedenklich aber gewagt und müsste durch einen einfacheren ersetzt werden. Das Wesentliche dieser Überlegungen dürfte aber sein, dass mit ihnen die Quelle mancher Unstimmigkeiten zwischen Theorie und Erfahrung aufgezeigt wird: die Vorgänge sind eben nicht durch eine einzige Gleichung beschreibbar, in der die makroskopische Strömung als fest vorgelegte Gegebenheit auftritt, durch die die « Eigenschaft » weiter getragen wird. Vielmehr sind Fälle denkbar, dass durch den Eigenschaftstransport das Strömungsfeld geändert wird, dass der Austausch mit anderen Worten auf die Strömung zurückwirkt und diese modifiziert. Gibt man dies zu, so muss man auch zugeben, dass nur ein *System* von Differentialgleichungen die Vorgänge abzubilden vermag, nicht eine Einzelgleichung. Dass diese Überlegungen richtig sind beweist vor allem die bekannte Tatsache, dass die alte Austauschtheorie in Fragen des Wärmeaustausches versagt. Sie muss versagen, denn gerade die Wärme wirkt deformierend auf das ursprüngliche Dichte- und Strömungsfeld zurück.

Probleme zur Physik der festen Erde. — Die Mechanik der festen Erde stellt eine Reihe von bisher noch nicht oder nicht endgiltig beantworteten Fragen mathematischer Natur. Eine der wichtigsten dürfte wohl die sein: welche Arten von Erdbebenwellen sind möglich? Die Seismiker machen sich die Arbeit allzuleicht, wenn sie von der Annahme ausgehen, es gäbe — immer im homogen-isotropen Medium vorausgesetzt- zwei Arten von Raumwellen, die transversalen und longitudinalen mit den bezüglichen Phasengeschwindigkeiten

$$V_s = \sqrt{\frac{\mu}{\varrho}}, \quad V_p = \sqrt{\frac{\lambda + 2\mu}{\varrho}} \qquad (\lambda, \mu = \text{Lamé 'sche Konstenten}, \; \varrho = \text{Dichte}) \qquad [2]$$

Dazu sollten die *Rayleigh'* schen Oberflächenwellen kommen und eventuell, bei geschichtetem Medium, die *Lovewellen.* Es muss gesagt werden: *Reine Transversalwellen sind ebenso wie reine Longitudinalwellen (bis auf einen singulären Ausnahmefall) im Erdinnern unmöglich.* Gewiss führen die Differentialgleichungen der Elastizitätstheorie auf die bekannten zwei Arten von Wellengleichungen für Scherungs- und Verdichtungswellen mit den Ausdrücken 2) für die Phasengeschwindigkeiten, aber dies gilt nur im allseits unbergrenzten, also überall sich ins Unendliche erstreckenden Raum. Sobald eine Grenzfläche im Endlichen auftritt — und dass dies bei der Erde der Fall ist, wird billigerweise niemand abstreiten wollen — hat man bei Integration der Wellengleichungen die Oberflächenbedingungen zu berücksichtigen, ganz unabhängig davon, ob man sich für Oberflächenwellen oder Raumwellen interessiert. Dabei ist es gleichgiltig, ob man eine freie Oberfläche voraussetzt oder irgendwelche andere Vorschriften festsetzt: wesentlich ist nur, dass grundsätzlich und unter allen Umständen das Vorhandensein der Oberfläche mathematisch zur Kenntnis genommen werden muss. Das Verdienst, auf diesen Umstand zuerst- allerdings mit wenig Erfolg- hingewiesen zu haben, gebürt C. Somigliana ([14]). Möge, wie üblich, das Medium den unter der x-y-Ebene liegenden Halbraum erfüllen, also zur Oberfläche die Ebene $z = O$ haben. Bei *freier Oberfläche* müssen dann die Spannungskomponenten p_{xz}, p_{yz}, p_{zz} für $z = O$ verschwinden. Dies sind die üblichen Oberflächenbedingungen. Die Komponenten p werden wie üblich als Linearfunktionen der Deformationskomponenten vorausgesetzt (ohne Berücksichtigung der Glieder zweiter Ordnung). Weder die zu den Transversalwellen noch die zu den Longitudinalwellen gehörigen Verschiebungskomponenten u, v, w sind i. A. mit diesen Oberflächenbedigungen verträglich. Erst wenn man aus beiden ein Wellenpaar bildet, ist man imstande, den Oberflächenbedingungen zu genügen. Dass man bei Oberflächenwellen so vorgehen muss, ist seit Lord Rayleigh's Arbeit schon lange bekannt. Dass die Forderung nach Erfülltsein der Oberflächenbedingungen aber auch bei Raumwellen berücksichtigt werden muss, scheint nicht selbstverständlich zu sein. Dies ist umso merkwürdiger, als es in der Elastizitätstheorie (und auch in der Hydromechanik) allgemein gebräuchlich ist, die Oberflächenbedingungen zu beachten, auch ist es längst üblich, die allgemeine Lösung als zusammengesetzt aus einem rotationsfreien und einem divergenzfreien Anteil vorauszusetzen.

Verf. beabsichtigt, in einer in Vorbereitung befindlichen Arbeit auf diese Dinge näher einzugehen. Gewiss wird die Theorie der Erdbebenwellen dadurch viel komplizierter und- unbequemer, wie z. B. schon aus der ausgezeichneten Arbeit von E. R. Lapwood ([15]) ersichtlich ist. Auf der andern Seite finden aber gewisse, bisher als paradox empfundene Tatsachen ihre Erklärung. Die Rayleighwellen z. B. sollen sich nur entlang der Oberfläche fortbewegen (hier also horizontal). Sie werden aber auch in der Tiefe beobachtet, z. B. bei Explosionen an der Erdoberfläche. Wie kommen die Impulse dorthin? Welches ist ihr Ausbreitungsgesetz nach der Tiefe hin? Diese und ähnliche Fragen finden ihre Aufklärung, wenn man von der Theorie der Wellenpaare ausgeht, die den Oberflächenbedingungen genügen. Eine Hauptrolle dabei spielt die sogenannte *Rayleigh'* sche Gleichung dritten Grades, eine Gleichung, deren eine Wurzel stets reell und im Wert fast unveränderlich bleibt, wie immer die Poisson'schen Konstante gewählt wird, während die beiden anderen, paarigen Wurzeln, reell, zusammenfallend oder conjugiert complex sein können. Es ist naheliegend, die der isolierten Wurzel zugeordnete Lösung als S-Welle zu deuten, schwieriger, aber unausweichlich ist die Deutung der dem Wurzelpaar zugeordneten Lösungen als P-Welle. Ich behalte mir vor, in anderem Zusammenhang und bei anderer Gelegenheit auf diese Verhältnisse näher einzugehen.

Es verdient hervorgehoben zu werden, dass die Gedanken von C. Somigliana in anderer Richtung weiterverfolgt worden sind: P. Caloi ([16]) hat versucht, gewisse Wellengruppen in der Hauptphase des Bebens mit Wellen zu identifizieren, die von der Theorie von Somigliana gefordert werden.

Bei der Durchführung der Theorie zeigt sich übrigens die merkwürdige Tatsache, dass die Ausdrücke für die Geschwindigkeiten nur mehr von μ allein, nicht aber auch von λ abhängen, es zeigt sich aber auch, dass der Energietransport senkrecht zur Oberfläche völlig auslässt und, wenn schon nicht entlang der Oberfläche, so doch beeinflusst durch sie erfolgt.

Die hier vorgebrachten Gedankengänge würden sicherlich schon öfter in der Literatur aufgetaucht sein, wenn nicht K. Uller, der sich als erster mit allgemeinen Wellen bei gestgelegten Oberflächenbedingungen befasst hat, sein Theorien in eine naherzu unleserliche Form gekleidet hätte. Durch seine übertriebene mathematische Eleganz hat er nur die Verbreitung seiner, wenigstens auf diesem Gebiet, beachtenswerten Gedanken erschwert.

Auch aus einem andern Grunde besteht Anlass, gegen die Formeln 2) misstrauisch zu sein. Sie sind abgeleitet nicht nur unter der Voraussetzung eines unendlich ausgedehnten Mediums, sondern auch unter der Voraussetzung, das Medium sei ursprünglich im « natürlichen » d. h. spannungs- und deformationsfreien Zustand gewesen. Nun besitzt die Erde aber nicht nur eine ganz im Endlichen gelegene Oberfläche, sondern in ihrem Innern herrscht auch ein gewaltiger hydrostatischer Druck infolge der gravitierenden Massen. Wie wirkt sich dieser auf die Wellengeschwindingkeit aus? Zunächst ändert der Druck naturgemäss die Konstanten μ und λ und zwar im Sinne einer Erhöhung, wenn auch nur einer verhältnismässig kleinen. Aber davon abgesehen scheinen sich gegenwärtig zwei Auffassungen zu widersprechen. H. Poincaré hat in seinen Vorlesungen über Elastizitätstheorie ([17]) gezeigt, dass die Annahme einer Anfangsspannung für die zu erwartenden Formelbilder von Einfluss ist. L. Brillouin hat diese Frage von einem ganz allgemeinen Gesichtspunkt aus neu behandelt ([18]) und kommt ebenfalls zu dem Ergebnis, dass sich z. B. der hydrostatische Druck p in den Geschwindigkeitswerten, die jetzt durch

$$V_s = \sqrt{\frac{\mu - p}{\rho}}\,; \quad V_p = \sqrt{\frac{\lambda + 2\mu - p}{\rho}} \qquad [3]$$

gegeben sein sollten, sehr stark bemerkbar macht. Im Gegensatz zu dieser Auffassung kommen M. A. Boit und F. Birch zu dem Ergebnis, dass der hydrostatische Druck innerhalb der Erde ohne wesentlichen Einfluss auf die Wellengschwindigkeit ist. Sollte es sich herausstellen, dass die Formeln [3] aufrecht erhalten werden können, so würde damit eine Deutung für das Wegbleiben der S-Wellen im Erdkern möglich sein. In der Tat werden gegen das Erdinnere zu die Righeit (berechnet auf Grund von 2) und der Druck (berechnet aus der

Dichteverteilung) ungefähr von gleicher Grössenordnung und es ist denkbar, dass in der kritischen Tiefe von 2900 km die Werte von p und μ einander gleich werden, sodass V_s verschwindet. Für noch grösseres p würde V_s imaginär- es gibt dann keine S-Wellen mehr. Zugleich würde sich V_p entsprechend vermindern. Eine Schwierigkeit für diese Auffassung besteht in dem *plötzlichen* Wegbleiben an der Kerngrenze (die letzthin von P. Caloi ([19]) wieder zu 2920 km Tiefe gefunden wurde).

Dass die hier berührten Fragen noch offen stehen und einer mathematischen Untersuchung bedürfen, geht auch aus Folgendem hervor: Das Wegbleiben des S-Einsatzes wird erklärt durch das plötzliche Absinken des μ-Wertes auf nahe Null, sei es, dass man den Kern für flüssig hält (*Wiechert's* Einsenkernhypothese), sei es, dass man mit W. H. Ramsey ([20]) einen Übergang von der molekularen zur metallischen Phase annimmt. Die Polschwankungen mit ihrer Periode von $\sim$ 430 Tagen einerseits (Chandler'sche Periode) und die periodischen Deformationen der festen Erdrinde, die durch die Gezeitenkräfte hervorgerufen werden andrerseits fordern eine bestimmte gesetzmässige Verteilung von μ im Erdinnern. W. Schweydar hat ([21]), indem er eine Dichtezunahme im Erdinnern nach dem Roche'schen Gesetz voraussetzte gefunden, dass μ sich in folgender Weise mit dem Zentralabstand r ändere:

$$\mu = 16.10^{11}\left[1-0.83\left(\frac{r}{R}\right)^2\right]. \qquad (R = \text{Erdradius})$$

Zu einem grundsätzlich ähnlichen Ergebnis muss man natürlich auch kommen, wenn man das Roche'sche Gesetz durch ein anderes ersetzt, etwa durch die Bullen'sche oder Ramsey'sche Dichteverteilung. Auf jeden Fall müsste auch im Erdkern ein μ-Wert herrschen, der nicht nur nicht verschwindend klein ist, sondern sogar grösser als im Mantel anzunehmen wäre. Zu untersuchen ist also folgende Frage: Ist ein sehr kleiner μ-Wert im Erdkern bei vorgegebener Dichteverteilung und Kenntnis der Wellengeschwindigkeiten verträglich mit den Werten der Chandler'schen Periode und den gemessenen Gezeitenamplituden der festen Erdrinde? Wenn nein: wie müssen dann die Formeln für die Wellengeschwindigkeiten modifiziert werden, um das Verschwinden des V_s und das Absinken des V_p an der Kerngrenze zu erklären? Spielt nicht doch der hydrostatische Druck eine Rolle? Die Begründer von Hypothesen über den Aufbau des Erdinnern haben diese Fragestellungen nicht behandelt- weder Wiechert, noch Kuhn-Rittmann noch Ramsey. Umgekehrt hat Schweydar seinerseits die Forderung, μ möge im Erdkern verschwindend klein werden, unberücksichtigt gelassen, wohl deswegen, weil zu seiner Zeit die Tatsache des Wegbleibens von S noch nicht so bekannt oder gesichert war wie heute.

Ein ebenfalls wesentlich mathematisches Problem der Seismologie ist Folgendes: Was im Seismogramm registriert wird, ist das Überlagerungsgebilde von dreierlei Bewegungen, nämlich der Eigenschwingungen des Seismometers, der freien Schwingungen des Bodens und der durch den Herdvorgang erzwungenen Bodenbewegung. Angenommen, es wäre praktisch möglich, diese drei Partialbewegungen zu trennen. Dann bleibt die Frage: kann man aus der ermittelten, erzwungenen Bodenbewegung rückschliessen auf die Bewegung am Herd, also auf den Herdvorgang? Die Umkehrung dieser Frage müsste so lauten: Gegeben ist eine Randbedingung, z. B. der zeitliche Ablauf von Teilchenbewegungen am Rand (am Herd). Wie sieht in einer bestimmten Herdentfernung die entsprechende Bodenbewegung aus. Die Art und Weise, wie eine Bodenerschütterung erzeugt wird, also die Randbedingung, ist massgebend dafür, wie die Bodenbewegung an der Station abläuft. Hier handelt es sich also um die Lösung des Randwertproblems. Fragestellungen dieser Art sind kaum in Angriff genommen. Etwas leichter zu lösen ist die Anfangswertaufgabe, wenngleich ihr ein geringerer praktischer Wert zukommt. Aber man erkennt, in welcher Weise die Vorgänge an der Störungsquelle die Bewegungen zu modifizieren vermögen. Verf. hat ([22]) für Rayleighwellen diese Aufgabe behandelt, aber sie muss natürlich grundsätzlich für alle Arten von seismichen Wellen gelöst werden. Dies auch aus dem Grund, weil man auf diese Weise auch in die Lage kommt, eine andere Erscheinung zu deuten, die bisher nicht erklärt werden konnte, ich meine die Periodenverlängerung seismischer Wellen sowie die Glättung von Unebenheiten während des Ausbreitungsvorganges.

Verf. hat in einer kurzen Note ([23]) auf die Möglichkeiten hingewiesen, welche zur Behandlung dieses Problems bestehen. Die Erde als Ganzes ist voll-elastisch für kurzperiodische Beanspruchungen wie es die seismischen Wellen sind. Man wird also gut daran tun, von den Bewegungsgleichungen rein elastischer Körper auszugehen. Diese liefern aber nur rein-periodische Vorgänge. Periodenverlängerungen treten nicht auf, auch nicht beim Lösen von Randwertaufgaben, da jede Dämpfung fehlt. Die genaue Untersuchung zeigt nun, dass die Formbeständigkeit elastischer Wellen gar nicht mit der Vollelastizität verknüft ist, dass, mit andern Worten, die Bewegungsgleichungen der Elastizitätstheorie gar keine formbeständigen, also reinperiodischen Wellen liefern, *wenn man sie nicht künstlich vereinfacht*. Ersetzt man die substantiellen Ableitungen nach der Zeit *nicht* durch die lokalen, bricht man ferner die Entwicklung des elastischen Potentials *nicht* nach den Gliedern zweiter Ordnung ab, verwendet man schliesslich den *vollen* Deformationstensor statt des verkürzten, dann verlieren die Gleichung zwar ihren einfachen, linearen Charakter und die Superpositionsfähigkeit ihrer Lösungen, aber das Bild der möglichen Bewegungen wird reichhaltiger, die Wellen verformen sie während des Ausbreitungsvorganges. Es wird eine der Hauptaufgaben der nichtlinearen Elastizitätstheorie sein, die Art und Weise zu untersuchen, in der sich Störungsprofile während des Ausbreitungsvorganges deformieren. Dabei wird naturgemäss auch das Verlängern der Perioden und das Ausglätten von Unregelmässigkeiten seine Erklärung finden. Die Behandlung nichtlinearer Probleme ist schwierig. Es ist daher zweckmässig, sich von den Vorgängen ein Modell zu verschaffen, das eine lineare Behandlung zulässt und doch zugleich ein Bild von den elastischen Vorgängen im Erdinnern zu geben verspricht. Wir können sagen: die Vorgänge verlaufen so, *als ob* das Medium Erde nicht vollsonder visko-elastisch wäre. Dabei müssen wir die Möglichkeit offen lassen, dass der Erde tatsächlich ein gewisser Grad von Viskosität zukommt. Die Frage ist nur, in welcher Form man die Bewegungsgleichungen jetzt ansetzt. An sich ist es auf unendlich vielfache Weise möglich, Medien zu erfinden, die sowohl elastische als auch visköse Eigenschaften haben- die Bedürfnisse der Technik haben immer wieder Versuche in dieser Hinsicht angeregt. Es handelte sich dabei immer um die Aufgabe, die mechanischen Eigenschaften der in der Technik üblichen Werkstoffe möglichst gut mathematisch abzubilden. Der in gewisser Hinsicht einfachste Ansatz geht auf W. Voigt ([24]) zurück. Er stellt den Spannungstensor als Linearfunktion des Deformationsgeschwindigkeit dar, gibt also eine erste Annäherung für sehr kleine und sehr langsame Veränderungen. Die elastischen Grundgleichungen lauten dann in der übliche Schreibweise

$$\varrho \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = (\lambda + \mu) \frac{\partial \Theta}{\partial x} + \mu \Delta u + (\lambda' + \mu') \frac{\partial \Theta}{\partial x} + \mu' \Delta u ; \ldots \qquad [4]$$

Die Konstanten λ', μ' beschreiben die viskösen Eigenschaften des Medium.

Verf. hat die Wellenausbreitung in einem solchen Medium näher untersucht ([25]). Eingehende Untersuchungen über Oberflächenwellen u.s.w. stammen von P. Caloi ([26]). Auf Grund der eigenen Überlegungen stellt sich folgender, sehr merwürdiger Sachverhalt heraus. Solange das Medium als unendlich ausgedehnt betrachtet wird, bleiben λ', μ' ebenso wie λ, μ willkurlich wählbare Grössen. Die Wellen zeigen eine von λ', μ' abhängende Dispersion. Führt man aber eine Oberfläche und damit Oberflächenbedingungen ein, so hört die Willkür in der Wahl der λ', μ' auf und es bestehen die Beziehungen

$$\lambda\mu' - \lambda'\mu = 0 \quad \text{d.h} \quad \mu' = \mu\tau, \qquad \lambda' = \lambda\tau,$$

wo τ ein Proportionalitätsfaktor von der Dimension einer Zeit ist. Dies bedeutet: die bereits von Maxwell postulierte Proportionalität zwischen der Viskosität (Zähigkeit) μ' und der Righeit μ ergibt sich hier von selbst-zugleich mit einer entsprechenden Beziehung für λ'. Das τ hat die Funktion der *Relaxationszeit*. Die Formel für die Phasengeschwindigkeit der S-Welle wird jetzt

$$V_s = \sqrt{\frac{\mu}{2\varrho}\left[1 + \sqrt{1 - \left(2\pi\frac{\tau}{T}\right)^2}\right]}$$

T = Wellenperiode

und eine entsprechende Beziehung gilt für die P-Welle. Man erkennt, dass im rein elastischen Genzfall (also für $\tau = O$ und daher auch $\mu' = \lambda' = O$) die übliche Formel für V_s resultiert, dass aber im Falle von Visko-Elastizität ($\tau \neq O$) die Dispersion vom Verhältnis $2\pi\tau/T$ abhängt. Wird dieses $= I$, so erreicht V_s seinen kleinsten Wert, für Relaxationszeiten grösser als die Periode wird V_s imaginär, eine Wellenausbreitung findet nicht mehr statt, auch nicht mehr für longitudinale Wellen. Diese Überlegungen sind den auch sonst verfehlten und auf einem Missverstehen des Begriffs der Relaxationszeit gegründeten Erörterungen von Kuhn-Rittmann ([27]) entgegenzuhalten, die glauben, den Wegfall der S-Wellen im Erdkern auf die Formeln [2] zurückführen zu sollen.

Neben der Dispersion tritt im visko-elastischen Medium noch eine wichtige Erscheinung auf, die Dämpfung, und zwar eine solche nach Raum und Zeit. Betrachten wir nur die zeitliche Dämfung, so ergibt sich, dass der Dämfungsfaktor $exp(-at)$ periodenabhängig ist- das a enthält die Periode im Nenner und quadratisch. Von den im Medium möglichen freien Schwingungen werden also während des Ausbreitungsvorganges die kurzperiodischen stärker gedämpft als die langperiodischen. Wir befinden uns damit in Übereinstimmung mit andern Gebieten der Physik, in denen ebenfalls die kurzperiodischen Erscheinungen gegenüber den langperiodischen in den Hintergrund gedrängt werden. Praktisch bedeutet dies, dass die längeren Wellen auch weiter laufen.

Damit wird auch die Erscheinung der Periodenverlängerung und der Wellenglättung erklärbar. Möge eine Herdstörung als Funktion der Zeit vorgelegt sein. Diese Funktion kann man sich formal entstanden denken durch Überlagerung von Partialwellen verschiedener Periode (Entwicklung in eine Fourier'sche Reihe oder ein Fourier'sches Integral). Wir lösen also die Randwertaufgabe durch Reihenentwicklung. Während die Störung von der Quelle zur Station wandert, denken wir uns diese Entwicklung mitwandernd. Dabei werden die kurzperiodischen Partialwellen mehr und mehr ausgetilgt, die langperiodischen bestimmen immer stärker das Bild der Welle. Die Ecken und Spitzen im Profil der Störung, an denen die kurzperiodischen Glieder besonders beteiligt sind, werden geglättet. Zugleich findet eine Dehnung des ganzen Profils in die Länge statt, angefangen vom Kopf der Welle. Es kommt zu Periodenverlängerung. Damit wird auch klar, warum z. B. die Bodenunruhe (Mikroseismik) an Binnenstationen mit viel grösseren Perioden ankommt als an küstennahen Stationen, warum die Wellen dort glätter sind als näher am Entstehungsherd.

Wir dürfen dabei aber nicht aus dem Auge verlieren, dass wird es nur mit einem Modell zu tun haben. Die Wahrheit wird anderswo liegen. *Beide* Effekte werden zusammentreffen: die Deformation des Anfangsprofils bei strenger Behandlung der Gleichungen *und* die Deformation infolge der Viskosität. Es ist aber klar, dass mit dieser Erkenntnis das Problem sehr kompliziert wird.

Im Vorstehenden konnte nur eine beschränkte Auswahl von mathematischen Fragestellungen gegeben werden, die den Seismologen interessieren. Massgebend für die Auswahl war, wie schon erähnt, das eigene Interesse des Verfassers dieses Aufsatzes. Eine Reihe weiterer Fragen hat C. F. Richter ([28]) angeführt.

Probleme des Erdmagnetismus. — Seit den Arbeiten von Bartels und Chapman kann man die wesentlichsten Fragen, was die Variationen und Störungen des erdmagnetischen Feldes anlangt, als gelöst ansehen. Inzwischen ist aber die grosse und alte Frage nach der Natur des Erdmagnetismus, allgemeiner des Stellarmagnetismus neu aufgeroll und ins helle Licht der Forschung gerückt worden. Blackett hat den Verdacht ausgesprochen, es könnte der Besitz eines magnetischen Moments zu den allgemeinen Eigenschaften jeglicher Materie gehören, nicht nur zu rotierenden Himmelskörpern. Es ist klar, dass es sich bei der Erforschung des hier angedeuteten Sachverhaltes nicht um ein Einzelproblem handeln kann sonder um einen Zug in einer viel allgemeineren Fragestellung. Es ist ganz einfach das Problem der Materie überhaupt, das hier angerührt wird, das Problem der Elementarteilchen und ihrer Eigenschaften. Es braucht nicht gesagt zu werden, dass es dabei wesentlich auch um mathematische, vielleicht sogar vorwiegend mathematische Fragen geht, mit denen sich der Geophysiker auseinadersetzen muss, wenn er sich entschliessen will, seinen engeren Bereich zu verlassen um in den Gebieten der Atomphysik mit Ergebnissen vertraut zu werden, die er auf sein eigentliches Gebiet übertragen will.

München — Februar 1950.

ZUSAMMENFASSUNG

Es wird eine Reihe von Fragestellungen aus dem Gesamtgebiet der Geophysik angeführt, deren Beantwortung im Wesentlichen davon abhängt, ob es gelingt, ein entsprechendes mathematisches Problem zu lösen. Dabei stellt sich heraus, dass die Lösung einer ganzen Reihe von geophysikalischen Aufgaben verknüpft ist mit dem Problem, ein System von nichtlinearen, partiellen Differentialgleichungen zweiter Ordnung zu lösen. Jeder Fortschritt auf diesem Gebiete bedeutet einen entsprechenden Fortschritt auf geophysikalischem Gebiet. Im Übrigen liess sich Verf. bei der Auswahl der Fragestellungen von seinen eigenen Interessen leiten. Es stehen also Probleme im Vordergrund, an deren Lösung er selbst mitgearbeitet hat.

SCHRIFTENVERZEICHNIS

(1) CHRYSTAL, G.: *On the hydrodynamic Theory of Seiches.* Trans. Roy. Soc. Edinburgh, *41*, (1905); *45*, (1906); *46*, (07/8).

(2) DEFANT, A.: *Neue Methode zur Ermittlung von Eigenschwingungen (Seiches) von abgeschlossenen Wassermassen (Seen, Buchten usw.).* Annal. Hydrograph. etc. *46*, (1918): 2.

(3) HIDAKA, K.: *Application of Ritz's Variation Method to the Determination of Seiches in an Lake.* The Memoirs of the Imp. Marine Obs. VI, 2 (1936).

(4) CALOI, P.: *Le sesse di Lago di Garda, Parte I e II.* Ann. di Geof. *1*, (1948), Nr. 1, 2; S. 24 und 175.

Sui periodi di oscillazione libera del Verbano. Ann. di Geof. *1*, (1948), S. 376-383.

CALOI P., MARCELLI L.: *Oscillazioni libere del Golfo di Napoli.* Ann. di Geof. *2*, (1949); Nr. 2, S. 222-242.

CALOI P., DE PANFILIS M., GIORGI M., PERONACI F.: *Le sesse di Lago Maggiore.* Ann. di Geof. *1*. (1948).

PANNOCCHIA G., *Le sesse del Lago d'Orta.* Ann. di Geof., I. 3 (1948).

PERONACI F.: *Le sesse di Lago di Iseo.* Ann. di Geof. *2*, (1949), 2.

(5) THORADE: *Probleme der Wasserwellen.*

(6) GRAF v. LARISCH-MOENICH: *Stürme und Brandung.* Berlin 1925.

(7) KRÜMMEL, O.: *Handbuch der Ozeanographie.* Stuttgart 1911.

(8) JEFFREYS, H.: *On the formation of water waves by wind.* Proc. Roy. Soc. London (A), 1912.

(9) BONDI, H.: *On the generation of waves on shallow water by wind.* Proc. Roy. Soc. London (A), 1942.

(10) NEUMANN, G.: *Die Entstehung der Wasserwellen durch Wind.* Deutsche Hydrogr. Zeitschr. *2*, (1949), S. 187.

(11) HARDTWIG, E.: *Zur formalen Theorie des Gradientwindes.* Ztschr. f. Meteorologie, *2*, (1948), P. 308-313.

(12) HARDTWIG, E.: *Die hydrodynamishcen Gleichungen der ausgeglichenen Bewegung in turbulenten Strömungen.* Ztschr. angew. Mathem. und Mechanik, *28*, (1948), S. 291.

(13) HARDTWIG, E.: *Über den Aufbau der allgemeinen Turbulenz - und Austauschtheorie und die Formulierung des Austausch - problems.* Ztschr. f. Meteorol. *3*, (1948), S. 26-32 und S. 72-77.

(14) SOMIGLIANA, C.: *Sulla propagazione delle onde sismiche.* Rend. Reale Acc. dei Lincei, Cl. di Sci. fis., mat. e nat. (5), vol. 26, (1917), S. 369-381; S. 472-480; vol. 27, (1918), S. 13-20.

(15) LAPWOOD, E. R.: *The disturbance due to a line Source in an semi-infinite elastic Medium.* Phil. Trans. Roy. Soc. London (A), Nr. 841, S. 63-100 (1949).

(16) CALOI, P.: *Due nuovi tipi di onde sismiche alla luce di una teoria del Somigliana.* Rend. Reale Acc. dei Lincei (6), vol. 23, (1936), S. 507-511.

CALOI, P.: *Nuova onda a lungo periodo oscillante nel piano principale, sue caratteristiche e confronto con l'onda G.* Boll. d. Comitato per la Geodesia e la Geofisica del Consiglio Naz. delle Ricerche (2), vol. 6, (1936).

CALOI, P.: *Sopra alcuni nuovi sistemi di onde sismiche a carattere superficiale oscillanti nel piano principale.* Rend. Reale Acc. dei Lincei (VII), vol. II (1940).

(17) POINCARÉ, H.: *Leçons sur la theorie de l'élasticité.* Paris.

(18) BRILLOUIN, L.: *Les Tenseurs en Mécanique et en Élasticité.* Paris 1938.

(19) CALOI P., PERONACI F.: *Il batisismo del 28 agosto e la profondità del nucleo terrestre.* Ann. di Geof. 2, (1949), S. 493-501.

(20) RAMSEY, W. M.: *On the Nature of the Earth's core.* Monthly Not. Roy. Astron. Soc. Geophys. Suppl. *5*, (1949), S. 409-426.

(21) SCHWEYDAR, W.: *Lotschwankung und Deformation der Erde durch Flut-*

kräfte. Zentralbüro d. Intern. Erdmessung Nr. 38 (1921) sowie Veröff. Geodät. Inst. Potsdam Nr. 54 (1912) bis 79 (1918).

([22]) HARDTWIG, E.: *Über die Anfangswertaufgabe in der Theorie der Rayleighwellen*. Ztschr. angew. Math. u. Mech. 25/27 1947.

([23]) HARDTWIG, E.: *Über die Verlängerung der Perioden seismischer Wellen*. Geofis. pura e appl. *13*, (1948), Fasc. 4.

([24]) VOIGT, W.: *Über die innere Reibung der festen Körper*. Abh. königl. Gesellsch. d. Wiss. Göttingen *36*, (1889).

([25]) HARDTWIG, E.: *Über die Wellenausbreitung in einem visko-elastischen Medium*. Ztschr. f. Geophysik, *18* (1943), 1/2.

([26]) CALOI, P.: *Comportamento delle onde di Rayleigh in un mezzo firmo-elastico indefinito*. Ann. di Geof. *1*, (1948), S. 550.

CALOI, P.: *Sulla propagazione delle onde di Rayleigh in un mezzo elastico firmo-viscoso stratificato*. Rend. Acc. Naz. dei Lincei, Cl. Sci. fis., mat., e nat. ser. VIII, *1*, fasc. 6.

([27]) KUHN-RITTMANN. *Geologische Rundschau*. *32*, (1941), 215.

([28]) RICHTER, C. F.: *Mathematical Questions in Seismology*. Bull. Amer. Mathem. Soc. *49*, (1943), Nr. 7, S. 477-193.