

IL PENDOLO ORIZZONTALE COME CLINOMETRO

PIETRO CALOI

1. — Nella registrazione ottica, si sa che per piccoli angoli di rotazione Φ , si ha

$$\Phi = \frac{\Delta}{2D} ,$$

dove Δ è l'ampiezza registrata e D la distanza specchio-registratore.

Se si può valutare con sicurezza $\frac{1}{10}$ di mm di Δ , ciò vuol dire che per $D = 1000$ mm, il limite di certezza dell'angolo Φ è

$$\Phi'' = \text{ca. } 10''$$

Nella teoria elementare dei pendoli orizzontali, se i è l'inclinazione dell'asse di rotazione dello strumento sulla verticale, T il periodo dello strumento ed l_r la lunghezza del pendolo ridotto, si ha

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{l_r}{g \sin i}} ,$$

e, per piccoli valori di i ,

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{l_r}{g i}} . \quad [1]$$

Se $l_r = \text{cm } 12$, $T = 25^s$ (comune pendolo Galitzini), si ha

$$\begin{aligned} i &= \frac{1}{300} \text{ circa, in valore assoluto} \\ &= 159'' \text{ in arco.} \end{aligned}$$

Sia OP l'asse del pendolo (fig. 1). Se si provoca una rotazione intorno ad un asse orizzontale per O di un piccolo angolo ψ , una sfera con centro O sarà intercettata in Z dalla verticale, in P dall'asse del pendolo e in P' dal nuovo asse.

Dal piccolo triangolo sferico ZPP' si ha

$$\text{tang } \psi = \sin i \text{ tang } \Phi ;$$

e, per piccoli angoli,

$$\Phi = \frac{\Psi}{i} . \quad [2]$$

Dalla [2] consegue allora

$$\Phi = 1300 \psi .$$

Per il limite di certezza di $10''$ circa, nella determinazione dell'angolo di spostamento di un pendolo orizzontale dalla sua posizione di equilibrio, usando registrazione ottica diretta, il limite per la determinazione delle ondulazioni (angolo d'inclinazione del suolo) ψ - variazione della direzione della verticale apparente — diviene, per $T = 25^s$ ed $l_r = 120$ mm.

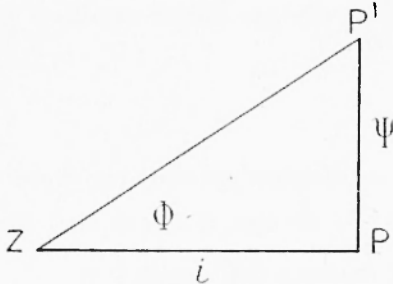


Fig. 1

$$10''/1300 = 0''.008 \text{ circa.}$$

Avremo, in generale,

$$\Phi = \frac{g}{4\pi^2} \frac{1}{l_r} T^2 \psi, \quad [3]$$

e poiché, col tendere di i a zero, T tende all'infinito, per angoli di inclinazione del pendolo sulla verticale tendenti a zero, si avrebbe $\Phi \rightarrow \infty$.

La [1] e la [2] valgono però soltanto in prima approssimazione. In esse infatti si prescinde dall'azione della rigidità del filo. Vedremo che, a motivo della rigidità, il periodo del pendolo ha un limite finito al tendere di i allo zero.

2. — Riferiamoci alla fig. 2, rappresentante un pendolo a sospensione bifilare, tipo Zöllner. Siano f_1, f_2 le tensioni relative ai fili PC, QB .

Dovrà essere ⁽¹⁾

$$f_1 \cos \vartheta_1 = f_2 \cos \vartheta_2, \quad f_1 \sin \vartheta_1 = f_2 \sin \vartheta_2 + mg \\ = 2 mg.$$

Queste relazioni valgono naturalmente nell'ipotesi che i punti P, Q , si trovino sulla stessa verticale. In pratica, tale ipotesi è generalmente soddisfatta con buona approssimazione.

Poiché $mg = f_2 \sin \vartheta_2$, consegue

$$2 \operatorname{tang} \vartheta_2 = \operatorname{tang} \vartheta_1. \quad [4]$$

Si ha sempre

$$f_1 > f_2.$$

Se C è il centro della sbarretta $AB = l$, si ha

$$OC = OP \operatorname{cotg} \vartheta_1, \quad OB = OQ \operatorname{cotg} \vartheta_2;$$

e per $OP = OQ$,

$$OC \operatorname{tang} \vartheta_1 = OB \operatorname{tang} \vartheta_2,$$

per cui, per la [4],

$$OC = \frac{1}{2} OB.$$

Perciò il punto O dista da A di $\frac{2}{3} l$.

Supposta la massa m concentrata in A , il suo momento d'inerzia rispetto ad O (da cui dista

di $\frac{2}{3} l$) è

$$I = \frac{4}{9} m l^2.$$

Proponiamoci ora di determinare l'analogia della [3], seguendo l'indirizzo di Ishimoto (2).

Supponiamo i fili di sospensione sufficientemente lunghi, affinché essi non diano che due coppie parallele di torsione; se la rigidità del filo non è notevole, la forza restitutiva principale, una volta che il pendolo sia spostato dalla sua posizione di equilibrio, è la forza di gravità. Nella prima ipotesi, le coppie di torsione del pendolo, per unità d'angolo, saranno

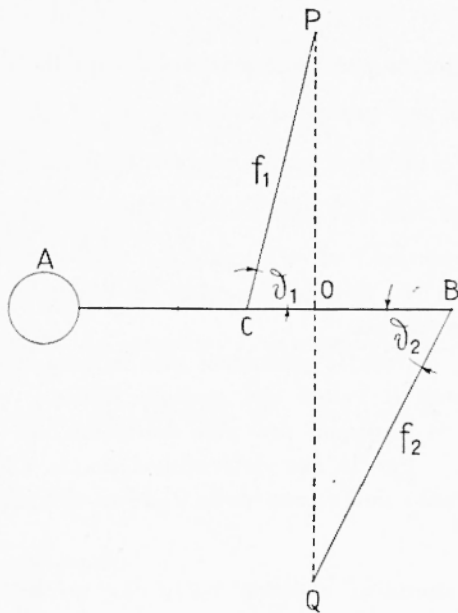


Fig. 2

Nella prima ipotesi, le coppie di torsione del pendolo, per unità d'angolo, saranno

$$\frac{\pi r^4 \mu}{\lambda}.$$

dove r è il raggio del filo, μ la sua rigidità, λ la lunghezza media dei due fili.

Per piccoli spostamenti i dalla verticale, per cui l'azione della gravità diviene $g \sin i \cong g \cdot i$, l'equazione del movimento diviene

$$I \frac{d^2 \phi}{dt^2} + \left(\frac{2}{3} m g l i + \frac{\pi r^4 \mu}{\lambda} \right) \phi = 0.$$

Il periodo del sistema diviene allora

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{\frac{4}{9} m l^2}{\frac{2}{3} m g l i + \frac{\pi r^4 \mu}{\lambda}}} \quad [5]$$

Per $\lambda \rightarrow \infty$, e quindi per coppie di torsione tendenti a zero, la [5] diviene

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{2}{3} \frac{l}{g i}} \quad [5']$$

Questo periodo corrisponde a quello di un pendolo orizzontale, avente il suo punto di rotazione in O ($l_r = \frac{2}{3} l$, conformemente alla [1]).

D'altra parte, per $i = 0$, dalla [5] si ha

$$T_{i=0} = \frac{4}{3} \pi \frac{l}{r^2} \sqrt{\frac{m \lambda}{\pi \mu}} \quad [6]$$

La [6] ci dice che esiste un limite al periodo e, di conseguenza, alla sensibilità.

Note le grandezze che in essa figurano, la [6] consente di ottenere il valore del periodo limite.

Passiamo ora alla sensibilità del pendolo.

Per la sua determinazione, la [2] va modificata, così da tener conto dell'azione della rigidità del filo. Potremo pertanto scrivere

$$\phi = \frac{\psi}{i + a} \quad [2']$$

Sostituendo $i + a$ a i in [5], si ha

$$\begin{aligned} \frac{1}{T^2} &= \frac{1}{4 \pi^2} \frac{\frac{2}{3} m g l (i + a) + \pi r^4 \mu / \lambda}{4 m l^2 \cdot 9} \\ &= K (i + a). \end{aligned} \quad [7]$$

Si osservi che per $\alpha=0$ (rigidità nulla) la [5'], che corrisponde appunto al caso di rigidità nulla, dà — per la [7] —

$$\frac{1}{T^2} = \frac{1}{4} \frac{3g}{\pi^2 l},$$

per cui

$$K = \frac{3\bar{g}}{8\pi^2 l}.$$

Dalla [6] invece — per $i=0$ — è

$$\frac{1}{T^2} = \frac{1}{4\pi^2} \frac{9\pi r^4 \mu}{4ml^2 \lambda} = \bar{K} \cdot \alpha,$$

cioè

$$\alpha = \frac{1}{K} \frac{1}{4\pi^2} \frac{9\pi r^4 \mu}{4ml^2 \lambda} = \frac{5}{2} \frac{\pi r^4 \mu}{mgl\lambda}.$$

La [2'] diviene pertanto — per la [7] —

$$\Phi = K \psi T^2 = \frac{3}{8} \frac{g}{\pi^2 i} \psi T^2. \quad [8]$$

Osserviamo che la [8] è formalmente identica alla [3], nel caso $l_r = \frac{2}{3} l$. Nella [8] però T non tende all' ∞ per $i \rightarrow 0$. Comunque, praticamente, l'una equivale all'altra.

Assegnati l e ψ , la sensibilità del pendolo è determinata unicamente in funzione del periodo T .

Se δ rappresenta la deviazione dell'immagine alla distanza di un metro, avremo

$$\delta = 75 \frac{g}{\pi^2 l} \psi T^2.$$

3. — Mishio Ishimoto fece costruire il suo pendolo orizzontale, per l'osservazione delle variazioni dell'inclinazione della superficie terrestre, completamente in quarzo, allo scopo di evitare l'effetto delle variazioni di temperatura. L'estrema sottigliezza dei fili (aventi il diametro di 14 micron), rende però questi apparecchi molto fragili e richiede eccessive cautele per l'uso.

Ho ritenuto utile far costruire un pendolo orizzontale che, pur

rendendo assai piccolo (generalmente trascurabile) l'effetto della temperatura, consentisse minori preoccupazioni di maneggio ed una maggior sicurezza di funzionamento.

I fili di sospensione sono di costantana, opportunamente rivestiti di seta, con un diametro di 75 micron. Il carico di rottura della costantana è di 32.10^8 dine/cm². Poiché la sezione del filo è di circa $4418 \mu^2$, il carico di rottura del filo prescelto è pertanto di circa 141370 dine.

D'altra parte, il valore di J^1 è all'incirca 2 mg; per $m = \text{gr } 14.425$, avremo quindi un fattore di sicurezza dell'ordine di 10.

Ecco le caratteristiche medie degli apparecchi, che già funzionano in parecchie parti d'Italia:

$$\begin{aligned} \mu &= 6.1 \times 10^{11} \text{ dine/cm}^2 \text{ (modulo di rigidità della costantana)} \\ \lambda &= \text{cm } 9 \\ m &= \text{gr. } 16,5 \\ l &= \text{cm } 7 \\ 2r &= 75 \text{ micron.} \end{aligned}$$

Per $i \rightarrow 0$, il periodo del pendolo tende quindi a 575^s , come si ricava dalla [6].

Questo tipo di pendolo orizzontale ha già dato buona prova.

Mi limito qui a riportare un tratto di registrazione, ottenuta in un concio della diga di sbarramento di un bacino idroelettrico (fig. 3).

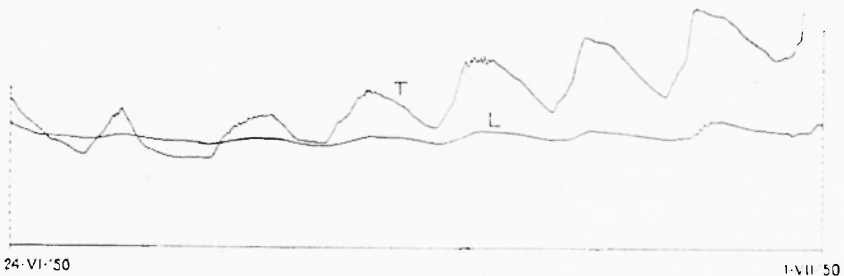


Fig. 3 - Esempio di registrazione clinografica. T, spinta di un bacino idroelettrico verso l'esterno durante l'invaso; L, componente normale (riduzione circa 1/3).

Da essa appare, oltre all'azione lenta dell'invaso in atto (che si manifesta sotto forma di spinta verso valle) anche l'onda diurna, dovuta all'azione del Sole sulla parete esposta ai suoi raggi.

Lo strumento è stato costruito presso le officine dell'Istituto Naz. di Geofisica, sotto la guida dell'addetto di laboratorio di prima classe geom. Ugo Vacanti, che ha dato realizzazione tecnica al mio progetto.

Questo tipo di apparecchio verrà sempre più diffuso fra gli Osservatori della rete geofisica italiana, allestita dall'I.N.G., allo scopo di seguire i lenti movimenti della crosta terrestre.

Roma — Istituto Nazionale di Geofisica — Ottobre 1950.

RIASSUNTO

Si richiamano alcune considerazioni analitiche sull'uso del pendolo orizzontale come clinometro. Si descrivono le caratteristiche fondamentali di un clinometro bifilare, di piccole dimensioni, che ha già dato ottime prove di funzionamento.

BIBLIOGRAFIA

- (1) BOCASSE H.: *Séismes et sismographes* - Paris (1927), pag. 137.
- (2) ISHIMOTO M.: *Observation de l'inclinaison de la surface terrestre* - The Earthquake Research Institute, Tokyo Imperial University, II (1927).