

# SUI PERIODI DI OSCILLAZIONE LIBERA DEL VERBANO

PIETRO CALOI

1. — In un lavoro precedente, dedicato alle sesse del lago Maggiore (<sup>1</sup>), osservavamo che la forma della curva normale relativa al lago era così complicata da rendere « ardua se non impossibile » l'applicazione di uno dei metodi proposti da Chrystal. Ho voluto egualmente cimentarmi in questo senso, anche perché, la complessità del lago fa sì che i valori calcolati per i periodi delle sesse relative siano sensibilmente diversi a seconda del metodo usato, specie per quanto si riferisce alle oscillazioni di minor nodalità.

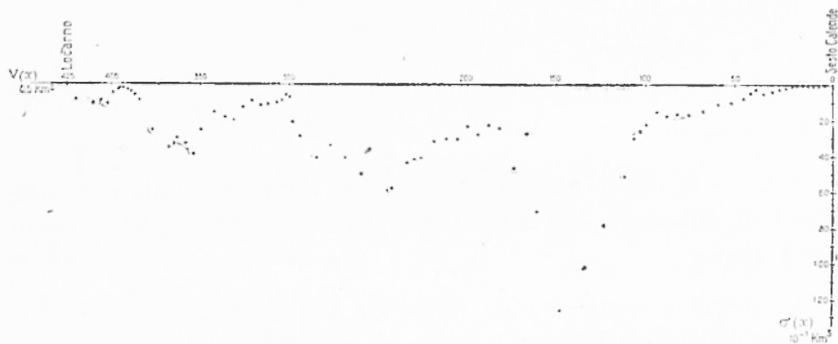


Fig. 1

Fra quelli proposti da Chrystal, ho ritenuto che il solo metodo che schematizza la curva normale in tratti rettilinei raccordati fosse applicabile, con qualche speranza di successo.

Nella seconda parte di un mio lavoro sulle sesse del Garda (<sup>2</sup>) ho riassunto la relativa teoria, rettificando una sua inesattezza. Pertanto, mi limito qui a riportare le equazioni che danno gli spostamenti orizzontale e verticale

$$\left. \begin{aligned} \xi w &= \left\{ A J_1(w) + B Y_1(w) \right\} \sin n(t - \tau) \\ \zeta &= \frac{h}{2a} \left\{ A J_0(w) + B Y_0(w) \right\} \sin n(t - \tau), \end{aligned} \right\} [1]$$

dove  $a, h$  sono costanti legate dalla relazione  $h(x) = h(1 - \frac{x}{a})$ , relativa al fondo del lago (supposto a tratti rettilinei),  $A$  e  $B$  costanti che risultano dall'integrazione dell'equazione di Chrystal,  $J_i(w), Y_i(w) - i=0,1$  — funzioni di Bessel e Neumann dell'argomento

$$w = 2na \sqrt{1 - x/a} \sqrt{gh}, \quad [2]$$

essendo  $n = \frac{2\pi}{T}$  ( $T$  = periodo).

La curva normale del Verbano, quale fu da noi determinata con una fitta rete di 77 sezioni su una carta batimetrica al 50000, è riprodotta nella fig. 1.

La schematizzazione che ne ho fatto è del tipo rappresentato nella fig. 2. Poniamo

$$\begin{aligned} O_3 A_1 &= a_1 & O_2 A_2 &= a_2 & O_1 M &= h_1 & O_1 Q &= q & M A_2 &= 2 \\ O_1 A_2 &= a_2 & O_1 O_3 &= r_2 & O_1 O_2 &= r_1 & O_3 N_2 &= h_3 & N_1 A_0 &= 3 \\ O_2 A_0 &= a_2 & O_2 N_1 &= h_2 & O_2 P &= p & A_1 M &= 1 & N_2 A_3 &= 4. \end{aligned}$$

Riferiamo la curva normale così schematizzata a tre sistemi di assi cartesiani ortogonali. L'origine del primo sistema sia in  $O_1$ ; l'asse  $x_1$  diretto positivamente verso  $A_1$ , l'asse  $y_1$  positivamente verso  $M$ . Questo primo sistema rappresenta la parte di curva normale fra  $N_2$  e  $N_1$ . Sia  $O_2$  l'origine del secondo sistema cartesiano. Le coordinate di  $O_2$  rispetto al primo sistema sono  $(-r_1, 0)$ ;  $x_2$  è inteso positivo da  $O_2$

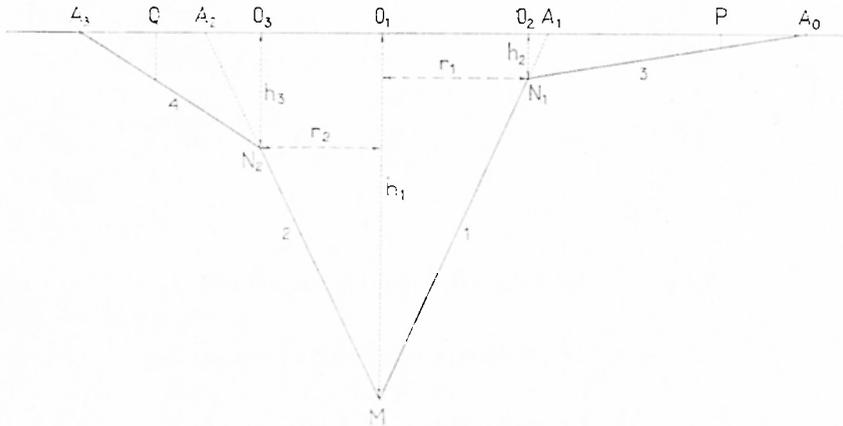


Fig. 2

verso  $O_2$ ,  $y_2$  positivo da  $O_3$  verso  $N_1$ . Il terzo sistema ha origine in  $O_3$ ,  $x_3$  essendo positivo contato verso  $O_1$ ,  $y_3$  positivo da  $O_3$  verso  $N_2$ .

Le coordinate di  $O_3$  rispetto al primo sistema sono  $(-r_3, 0)$ . Ecco le equazioni delle rette 1 e 2, riferite al primo sistema:

$$h_1(x) = h_1 \left( 1 - \frac{x}{a_1} \right), \quad h_2(x) = h_1 \left( 1 + \frac{x}{a_3} \right). \quad [3]$$

L'analoga della 3 riferita al secondo sistema

$$h_3(x) = h_2 \left( 1 - \frac{x}{a_2} \right) \quad [4]$$

e quella della 4 riferita al terzo sistema

$$h_4(x) = h_3 \left( 1 + \frac{x}{a_4} \right) \quad [5]$$

Vengono inoltre le relazioni

$$a_1 = r_1 \frac{h_1}{h_1 - h_2}; \quad a_3 = r_2 \frac{h_1}{h_1 - h_3}.$$

Poniamo, ricordando la [2],

$$\left\{ \begin{array}{l} w_1 = \frac{2na_1}{\sqrt{gh_1}} \sqrt{1 - \frac{x}{a_1}}; \quad a_1 = \frac{2a_1}{\sqrt{gh_1}}; \quad \beta_1 = \frac{2a_1}{\sqrt{gh_1}} \sqrt{1 - \frac{r_1}{a_1}} \\ w_2 = \frac{2na_2}{\sqrt{gh_2}} \sqrt{1 - \frac{x}{a_2}}; \quad a_2 = \frac{2a_2}{\sqrt{gh_2}}; \quad \beta_2 = \frac{2a_2}{\sqrt{gh_2}} \sqrt{1 - \frac{p}{a_2}} \\ w_3 = \frac{2na_3}{\sqrt{gh_1}} \sqrt{1 + \frac{x}{a_3}}; \quad a_3 = \frac{2a_3}{\sqrt{gh_1}}; \quad \beta_3 = \frac{2a_3}{\sqrt{gh_1}} \sqrt{1 - \frac{r_2}{a_3}} \\ w_4 = \frac{2na_4}{\sqrt{gh_3}} \sqrt{1 + \frac{x}{a_4}}; \quad a_4 = \frac{2a_4}{\sqrt{gh_3}}; \quad \beta_4 = \frac{2a_4}{\sqrt{gh_3}} \sqrt{1 - \frac{q}{a_4}} \end{array} \right. \quad [6]$$

Per le [1] avremo

$$\begin{aligned} \xi_1 w_1 &= \left\{ A_1 J_1(w_1) + B_1 Y_1(w_1) \right\} \sin n(t - \tau) \\ \xi_1 &= \frac{h_1}{2a_1} \left\{ A_1 J_0(w_1) + B_1 Y_0(w_1) \right\} \sin n(t - \tau) \quad [7] \\ \xi_2 w_2 &= \left\{ A_2 J_1(w_2) + B_2 Y_1(w_2) \right\} \sin n(t - \tau) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \xi_2 &= \frac{h_2}{2a_2} \left\{ A_2 J_0(w_2) + B_2 Y_0(w_2) \right\} \left\{ \sin n(t-\tau) \right. \\ \xi_3 w_3 &= \left. \left\{ A_3 J_1(w_3) + B_3 Y_1(w_3) \right\} \left\{ \sin n(t-\tau) \right. \right. \\ \xi_3 &= -\frac{h_3}{2a_3} \left\{ A_3 J_0(w_3) + B_3 Y_0(w_3) \right\} \left\{ \sin n(t-\tau) \right. \quad [7] \\ \xi_4 w_4 &= \left. \left\{ A_4 J_1(w_4) + B_4 Y_1(w_4) \right\} \left\{ \sin n(t-\tau) \right. \right. \\ \xi_4 &= -\frac{h_4}{2a_4} \left\{ A_4 J_0(w_4) + B_4 Y_0(w_4) \right\} \left\{ \sin n(t-\tau) \right. \end{aligned}$$

dove le prime due, la 5<sup>a</sup> e la 6<sup>a</sup> sono riferite al primo sistema, mentre la 3<sup>a</sup> e la 4<sup>a</sup> sono riferite al secondo sistema e le ultime due al terzo sistema.

Nelle [7] sono da determinare le nove costanti  $A_1, B_1, A_2, B_2, \dots, B_4, n$ , valendoci delle condizioni ai limiti. Consideriamo delle prime otto il rapporto  $A_i/B_i$ . Le condizioni ai limiti sono: agli estremi  $P$  e  $Q$  del lago dev'essere  $\xi=0$ :

$$x_2 = p, \quad \xi_2 = 0; \quad x_3 = -q, \quad \xi_4 = 0. \quad [8]$$

Inoltre, per

$$x_1 = 0; \quad \xi_1 = \xi_3, \quad \xi_4 = \xi_2. \quad [9]$$

Per il punto  $0_1$ ,

$$x_1 = +r_1, \quad x_2 = 0; \quad \xi_1 = \xi_2, \quad \xi_3 = \xi_4. \quad [10]$$

Per il punto  $0_2$ ,

$$x_1 = -r_2, \quad x_3 = 0; \quad \xi_3 = \xi_4, \quad \xi_2 = \xi_1. \quad [11]$$

Dalle [7], ricordando le [6] e per le [8], si ha

$$A_2 J_1(n\beta_2) + B_2 Y_1(n\beta_2) = 0, \quad B_3/A_3 = -\frac{J_1(n\beta_2)}{Y_1(n\beta_2)}, \quad [12]$$

oppure

$$B_1/A_4 = -\frac{J_1(n\beta_4)}{Y_1(n\beta_4)} \quad [13]$$

Per  $x_1 = 0$  è  $\frac{w_1}{w_2} = \frac{a_1}{a_2}$ ; per  $x_1 = +r_1, x_2 = 0$  si ha  $w_1/w_2 = \beta_1/a_2$ ;

per  $x_1 = -r_2, x_3 = 0$  è ancora  $w_3/w_4 = \beta_3/\beta_4$ . Per cui, ricordando le [9], [10] e [11] e posto

$$\begin{aligned} P_1(\beta_2, a_2) &= Y_1(n\beta_2) J_1(na_2) - J_1(n\beta_2) Y_1(na_2) \\ P_0(\beta_2, a_2) &= Y_1(n\beta_2) J_0(na_2) - J_1(n\beta_2) Y_0(na_2) \\ P_1(\beta_4, a_4) &= Y_1(n\beta_4) J_1(na_4) - J_1(n\beta_4) Y_1(na_4) \\ P_0(\beta_4, a_4) &= Y_1(n\beta_4) J_0(na_4) - J_1(n\beta_4) Y_0(na_4), \end{aligned} \quad [14]$$

si ha

$$\left\{ \begin{aligned} A_1 J_1(na_1) + B_1 Y_1(na_1) &= \frac{a_1}{a_3} \left[ A_3 J_1(na_3) + B_3 Y_1(na_3) \right] \\ A_1 J_0(na_1) + B_1 Y_0(na_1) &= -\frac{a_1}{a_3} \left[ A_3 J_0(na_3) + B_3 Y_0(na_3) \right] \\ A_1 J_1(n\beta_1) + B_1 Y_1(n\beta_1) &= \frac{\beta_1}{a_2} \frac{A_2}{Y_1(n\beta_2)} P_1(\beta_2, a_2) \\ A_1 J_0(n\beta_1) + B_1 Y_0(n\beta_1) &= \frac{a_1}{a_2} \frac{h_2}{h_1} \frac{A_2}{Y_1(n\beta_2)} P_0(\beta_2, a_2) \\ A_3 J_1(n\beta_3) + B_3 Y_1(n\beta_3) &= \frac{\beta_3}{a_4} \frac{A_4}{Y_1(n\beta_4)} P_1(\beta_4, a_4) \\ A_3 J_0(n\beta_3) + B_3 Y_0(n\beta_3) &= \frac{a_3}{a_4} \frac{h_4}{h_1} \frac{A_4}{Y_1(n\beta_4)} P_0(\beta_4, a_4). \end{aligned} \right. \quad [15]$$

Il determinante dei coefficienti delle incognite  $A_1, B_1, A_2, A_3, B_3, A_4$ , uguagliato a zero, dà l'equazione dei periodi:

$$\left| \begin{array}{cccc} J_1(na_1) & Y_1(na_1) & 0 & -\frac{a_1}{a_3} J_1(na_3) \\ J_0(na_1) & Y_0(na_1) & 0 & \frac{a_1}{a_3} J_0(na_3) \\ J_1(n\beta_1) & Y_1(n\beta_1) & -\frac{\beta_1}{a_2} \frac{P_1(\beta_2, a_2)}{Y_1(n\beta_2)} & 0 \\ J_0(n\beta_1) & Y_0(n\beta_1) & \frac{a_1}{a_2} \frac{h_2}{h_1} \frac{P_0(\beta_2, a_2)}{Y_1(n\beta_2)} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & J_1(n\beta_3) \\ 0 & 0 & 0 & J_0(n\beta_3) \\ -\frac{a_1}{a_3} Y_1(na_3) & 0 & & \\ \frac{a_1}{a_3} Y_0(na_3) & 0 & & \\ 0 & 0 & & \\ 0 & 0 & & \\ Y_1(n\beta_3) & -\frac{\beta_3}{a_4} \frac{P_1(\beta_4, a_4)}{Y_1(n\beta_4)} & & \\ Y_0(n\beta_3) & \frac{a_3}{a_4} \frac{h_4}{h_1} \frac{P_0(\beta_4, a_4)}{Y_1(n\beta_4)} & & \end{array} \right| = 0 \quad [16]$$

La [16] vale nell'ipotesi che gli estremi del lago siano smussati. In realtà, in  $A_0, A_3$  il lago termina ad angolo acuto. Considerando questo come un caso limite della precedente rappresentazione, possiamo porre  $p=a_2, q=a_1$ . Nelle [4], [5] avremo pertanto

$$\beta_2=0 \quad , \quad \beta_4=0.$$

E' inoltre

$$\lim_{\beta_2=0} \frac{J_1(n\beta_2)}{Y_1(n\beta_2)}=0 \quad ; \quad \lim_{\beta_4=0} \frac{J_1(n\beta_4)}{Y_1(n\beta_4)}=0 \quad ;$$

per cui dalle [14]

$$\lim_{\beta_2=0} \frac{P_1(\beta_2, a_2)}{Y_1(n\beta_2)}=J_1(na_2) \quad ; \quad \lim_{\beta_2=0} \frac{P_0(\beta_2, a_2)}{Y_1(n\beta_2)}=J_0(na_2) \quad ,$$

$$\lim_{\beta_4=0} \frac{P_1(\beta_4, a_1)}{Y_1(n\beta_4)}=J_1(na_1) \quad ; \quad \lim_{\beta_4=0} \frac{P_0(\beta_4, a_1)}{Y_1(n\beta_4)}=J_0(na_1) \quad .$$

La [16], osservando che

$$\frac{\beta_4}{a_2} = \frac{a_1}{a_2} \frac{h_2}{h_1} \quad ; \quad \frac{\beta_2}{a_4} = \frac{a_2}{a_4} \frac{h_2}{h_1} \quad ,$$

diviene allora, moltiplicando la 5<sup>a</sup> e la 6<sup>a</sup> riga per  $\frac{a_1}{a_2}$ ,

$$\frac{a_1 \beta_1 \beta_3}{a_2 a_2 a_4} \begin{vmatrix} J_1(na_1) & Y_1(na_1) & 0 & -J_1(na_2) & -Y_1(na_2) & 0 \\ J_0(na_1) & Y_0(na_1) & 0 & J_0(na_2) & Y_0(na_2) & 0 \\ J_1(n\beta_1) & Y_1(n\beta_1) & J_1(na_2) & 0 & 0 & 0 \\ J_0(n\beta_1) & Y_0(n\beta_1) & J_0(na_2) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & J_1(n\beta_2) & Y_1(n\beta_2) & J_1(na_1) \\ 0 & 0 & 0 & J_0(n\beta_2) & Y_0(n\beta_2) & J_0(na_1) \end{vmatrix} = 0 \quad [17]$$

2. — Passiamo alla soluzione della [17].

Dai dati relativi alla curva normale, per i quali rimando al lavoro citato (1), si ottiene, nel caso della schematizzazione prescelta.

$$\begin{aligned} h_2 &= 16.0 \times 10^5 \text{ m}^2 & a_1 &= 1.3025 \times 10^5 \text{ m}^2 & h_3 &= 44.8 \times 10^5 \text{ m}^2 & a_3 &= 71^{\circ} . 175 \\ a_1 &= 2920 \times 10^7 \text{ m}^2 & r_1 &= 256 \times 10^5 \text{ m}^2 & a_1 &= 164^{\circ} . 2935 & \beta_3 &= 41^{\circ} . 977 \\ a_2 &= 431 \times 10^7 \text{ m}^2 & r_2 &= 0825 \times 10^5 \text{ m}^2 & \beta_1 &= 57^{\circ} . 688 & a_1 &= 1242^{\circ} . 6 \\ a_1 &= 1265 \times 10^5 \text{ m}^2 & h_1 &= 128.8 \times 10^5 \text{ m}^2 & a_3 &= 772^{\circ} . 645 \end{aligned}$$

$$\frac{\beta_1}{a_2} = .07466$$

$$\frac{a_1}{a_3} = 2.3083$$

$$\frac{\beta_3}{a_4} = .03378$$

L'equazione dei periodi diviene pertanto  $D(n) \equiv$

$$\begin{array}{ccccccc}
 J_1(164.29n) Y_1(164.29n) & 0 & -J_1(71.175n) Y_1(71.175n) & 0 & & & \\
 J_0(164.29n) Y_0(164.29n) & 0 & J_0(71.175n) Y_0(71.175n) & 0 & & & \\
 J_1(57.688n) Y_1(57.688n) J_0(772.615n) & 0 & 0 & 0 & & & \\
 J_0(57.688n) Y_0(57.688n) J_1(772.615n) & 0 & 0 & 0 & & & \\
 0 & 0 & 0 & J_1(41.977n) Y_1(41.977n) J_1(1242.6n) & & & \\
 0 & 0 & 0 & J_0(41.977n) Y_0(41.977n) J_0(1242.6n) & & & \\
 & & & & & & = 0
 \end{array} \quad [18]$$

La risoluzione della [18] è stata proposta all'Istituto per le Applicazioni del Calcolo, tanto benemerito per l'ausilio validissimo che fornisce alla ricerca scientifica.

Furono desunti per le prime sei radici positive di  $D(n)$  i seguenti valori

$$\begin{array}{ll}
 n_1 = 0.00231, & n_4 = 0.00682 \\
 n_2 = 0.00352 & n_5 = 0.00776 \\
 n_3 = 0.00505 & n_6 = 0.00963.
 \end{array}$$

cui corrispondono, a meno di 5%, i periodi

$$\begin{array}{lll}
 T_1 = 45^m, 35 & T_3 = 20^m, 75 & T_5 = 13^m, 5 \\
 T_2 = 29^m, 75 & T_4 = 15^m, 35 & T_6 = 10^m, 85
 \end{array}$$

per le prime sei sesse del Verbano.

3. — Nel lavoro precedente sulle sesse del lago Maggiore si sono ottenuti i seguenti valori per le sesse uni-bi- e trinodali:

	$T_1$	$T_2$	$T_3$
col metodo Defant	48 <sup>m</sup> ,7	37 <sup>m</sup> ,4	23 <sup>m</sup> ,4
» » Hidaka	47 <sup>m</sup> ,4	33 <sup>m</sup> ,7	21 <sup>m</sup> ,0

L'accordo tra i valori ottenuti con i tre metodi, soddisfacente per la sessa uninodale, cessa di esserlo per la binodale, mentre è buonissimo per la trinodale. Queste diversità, particolarmente sensibili per la binodale, vanno attribuite alle notevoli variazioni che il bacino del lago presenta in larghezza e nell'andamento della linea di valle; variazioni che lo discostano sensibilmente dalle ipotesi su cui poggiano le varie teorie. Comunque, è interessante osservare che, prescindendo dalla binodale, i periodi delle sesse uninodale e trinodale calcolati con tre metodi differiscono molto poco e la differenza è particolarmente piccola per la trinodale, per la quale i valori ottenuti con i metodi di Hidaka e di Chrystal praticamente coincidono.

È noto che, qualunque sia il metodo usato, i valori calcolati per i periodi delle sesse di maggiore nodalità differiscono sempre meno col crescere della nodalità. Pertanto i valori dei periodi delle sesse a quattro, cinque e sei nodi calcolati in questo lavoro, possono ritenersi molto prossimi a quelli reali.

Ancora non è stato possibile ottenere buone registrazioni delle sesse del Verbano. Comunque dai valori finora osservati, sembra che i periodi forniti dal metodo di Hilaka siano i più attendibili.

*Roma — Istituto Nazionale di Geofisica — aprile 1948.*

### RIASSUNTO

*Partendo dalle basi della teoria di Chrystal, si sviluppa un metodo analitico per la determinazione dei periodi di oscillazione libera delle acque del Lago Maggiore. Risolta l'equazione dei periodi — costituita da un determinante di sesto ordine —, si sono calcolati i valori dei periodi corrispondenti alle oscillazioni libere di uno, due, tre, ... sei nodi.*

### BIBLIOGRAFIA

- (1) CALOI P., DE PANFILIS M., GIORGI M., PERONACI F., *Le sesse del Lago Maggiore*, « Annali di Geofisica », I, 2 (1948).  
(2) CALOI P., *Le sesse del Lago di Garda*, Parte II « Ann. di Geof. » I, 2 (1948).