

# COMPORTAMENTO DELLE ONDE DI RAYLEIGH IN UN MEZZO FIRMO-ELASTICO INDEFINITO

PIETRO CAI OI

Supponiamo che il piano  $xy$  di una terna di assi cartesiani costituisca la superficie libera del mezzo; l'asse  $z$  sia rivolto verso l'interno del mezzo stesso.

Le equazioni generali dei piccoli moti in un corpo firmo-elastico isotropo e omogeneo sono le seguenti:

$$\left\{ \begin{aligned} \varrho \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} &= \left\{ (\lambda + \mu) + (\lambda' + \mu') \frac{\partial}{\partial t} \right\} \cdot \frac{\partial \vartheta}{\partial x} + \left( \mu + \mu' \frac{\partial}{\partial t} \right) \Delta_2 u \\ \varrho \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} &= \left\{ (\lambda + \mu) + (\lambda' + \mu') \frac{\partial}{\partial t} \right\} \cdot \frac{\partial \vartheta}{\partial y} + \left( \mu + \mu' \frac{\partial}{\partial t} \right) \Delta_2 v \\ \varrho \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} &= \left\{ (\lambda + \mu) + (\lambda' + \mu') \frac{\partial}{\partial t} \right\} \cdot \frac{\partial \vartheta}{\partial z} + \left( \mu + \mu' \frac{\partial}{\partial t} \right) \Delta_2 w, \end{aligned} \right. \quad [1]$$

dove,  $\lambda$ ,  $\mu$  sono le costanti di Lamé,  $\lambda'$ ,  $\mu'$  i coefficienti dell'attrito interno di volume ed equivoluminale e  $\vartheta$  esprime la dilatazione:

$$\vartheta = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z}. \quad [2]$$

$u$ ,  $v$ ,  $w$  dipendono dal tempo attraverso  $e^{ipt}$ , essendo  $p$  la pulsazione. Pertanto

$$\left\{ \begin{aligned} \left[ \lambda + \mu + ip(\lambda' + \mu') \right] \frac{\partial \vartheta}{\partial x} + (\mu + ip\mu') \Delta_2 u + \varrho p^2 u &= 0 \\ \left[ \lambda + \mu + ip(\lambda' + \mu') \right] \frac{\partial \vartheta}{\partial y} + (\mu + ip\mu') \Delta_2 v + \varrho p^2 v &= 0 \\ \left[ \lambda + \mu + ip(\lambda' + \mu') \right] \frac{\partial \vartheta}{\partial z} + (\mu + ip\mu') \Delta_2 w + \varrho p^2 w &= 0. \end{aligned} \right. \quad [3]$$

Derivando rispetto ad  $x$ ,  $y$ ,  $z$  rispettivamente la 1<sup>a</sup>, 2<sup>a</sup>, e 3<sup>a</sup> delle [3], e sommando membro a membro, si ha

$$\left( \Delta_2 + h^2 \right) \vartheta = 0, \quad [4]$$

essendo

$$h^2 = \frac{\rho p^2}{\lambda + 2\mu + ip(\lambda' + 2\mu')} \quad [5]$$

Dividendo le [3] per  $\mu + ip\mu'$  si ha

$$\frac{\lambda + \mu + ip(\lambda' + \mu')}{\mu + ip\mu'} \cdot \frac{\partial \vartheta}{\partial z} + \Delta_2 u + \frac{\rho p^2}{\mu + ip\mu'} u = 0$$

Poniamo

$$k^2 = \frac{\rho p^2}{\mu + ip\mu'} \quad [6]$$

Allora

$$\frac{\lambda + \mu + ip(\lambda' + \mu')}{\mu + ip\mu'} = \frac{k^2}{h^2} - 1$$

e le [3] divengono

$$\left( \Delta_2 + k^2 \right) u = \left( 1 - \frac{k^2}{h^2} \right) \frac{\partial \vartheta}{\partial x} \quad [7]$$

Un integrale particolare delle [7] è costituito dalla soluzione

$$u = -\frac{1}{h^2} \frac{\partial \vartheta}{\partial x} \quad ; \quad v = -\frac{1}{h^2} \frac{\partial \vartheta}{\partial y} \quad ; \quad w = -\frac{1}{h^2} \frac{\partial \vartheta}{\partial z} \quad [8]$$

Se  $\alpha, \beta, \gamma$  sono le componenti dello spostamento delle onde trasversali, sarà

$$\frac{\partial \alpha}{\partial x} + \frac{\partial \beta}{\partial y} + \frac{\partial \gamma}{\partial z} = 0 \quad [9]$$

e dalle [7] consegue

$$(\Delta_2 + k^2)\alpha = 0 \quad ; \quad (\Delta_2 + k^2)\beta = 0 \quad ; \quad (\Delta_2 + k^2)\gamma = 0. \quad [10]$$

Le componenti dello spostamento dipendono da  $x, y$  mediante la funzione  $e^{i(x+iy)}$ , con  $f, g$  numeri complessi. Si ha

$$\frac{\partial^2 \vartheta}{\partial x^2} = -f^2 \vartheta \quad ; \quad \frac{\partial^2 \vartheta}{\partial y^2} = -g^2 \vartheta \quad .$$

La [4] diviene

$$\left( \frac{\partial}{\partial z^2} + h^2 - f^2 - g^2 \right) \vartheta = 0$$

Posto

$$r^2 = f^2 + g^2 - h^2 \quad , \quad [11]$$

si ha

$$\vartheta = P e^{-rz} + Q e^{rz} \quad , \quad [12]$$

Ma  $r$  è generalmente numero complesso,  $r=r'+ir''$ ; conseguente

$$\vartheta = Pe^{-rz} e^{-ir''z} + Qe^{r'z} e^{ir''z}.$$

Vale solo il 1° termine del 2° membro, con esponente negativo. Pertanto  $Q=0$ . prescindendo dal valore di  $P$ , espresso da  $e^{i(\mu+\nu x+gy)}$ , potremo scrivere

$$\vartheta = e^{-rz}. \quad [13]$$

La soluzione particolare espressa dalle [8] diviene allora

$$u = -\frac{if}{h^2} e^{-rz}; \quad v = -\frac{ig}{h^2} e^{-rz}; \quad w = \frac{r}{h^2} e^{-rz}. \quad [14]$$

Per i termini complementari, che pure devono contenere  $e^{i(\nu x+gy)}$  come fattori, le [10] divengono

$$\left( \frac{\partial^2}{\partial x^2} + k^2 - f^2 - g^2 \right) \alpha = 0, \text{ ecc.}, \quad [15]$$

per cui, come per la  $\vartheta$ , supposta la perturbazione limitata ad uno strato superficiale,

$$\alpha = Ae^{-sz}; \quad \beta = Be^{-sz}; \quad \gamma = Ce^{-sz}, \quad [16]$$

dove

$$s^2 = f^2 + g^2 - k^2. \quad [17]$$

Poiché i coefficienti nelle [16] contengono, quali funzioni di  $x$ ,  $y$  i fattori  $e^{i\nu x}$ ,  $e^{igy}$ , per la [9] i coefficienti delle [16] dovranno soddisfare alla relazione

$$ifA + igB - sC = 0. \quad [18]$$

I valori completi di  $u$ ,  $v$ ,  $w$  possono ora scriversi

$$u = -\frac{if}{h^2} e^{-rz} + Ae^{-sz}, \quad v = -\frac{ig}{h^2} e^{-rz} + Be^{-sz}, \quad w = \frac{r}{h^2} e^{-rz} + Ce^{-sz}, \quad [19]$$

in cui  $A$ ,  $B$ ,  $C$  sono soggette alla [18].

Passiamo alle condizioni da soddisfare alla superficie libera.

Per  $z=0$  devono annullarsi le due tensioni tangenziali

$$T_2 = (\mu + ip\nu) \left( \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z} \right)$$

$$T_1 = (\mu + ip\nu) \left( \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \right).$$

Ricordando che  $u, v, w$  sono funzioni di  $x, y$  attraverso gli esponenziali  $e^{ix}$ ,  $e^{igy}$  si ha

$$\frac{\partial v}{\partial x} = ig \frac{r}{h^2} e^{-rz} - Bse^{-sz} \quad ; \quad \frac{\partial w}{\partial y} = ig \frac{r}{h^2} e^{-rz} + igCe^{-sz},$$

e analogamente per  $\frac{\partial w}{\partial x}$  e  $\frac{\partial u}{\partial z}$ ,

Per  $z=0$ ,  $T_1=T_2=0$   $\left[ \mu + ip\mu' \neq 0, \text{ cosa avvia, dovendo essere altrimenti } \mu = \mu' = 0 \right]$  è

$$sB = \frac{2igr}{h^2} + igC \quad , \quad sA = \frac{2ifr}{h^2} + ifC. \quad [20]$$

Sostituendo le [20] nelle [18] si ha

$$if \left( \frac{2ifr}{h^2 s} + if \frac{C}{s} \right) + ig \left( \frac{2igr}{h^2 s} + \frac{igC}{s} \right) - sC = 0,$$

cioè

$$C(s^2 + f^2 + g^2)h^2 + 2r(f^2 + g^2) = 0. \quad [21]$$

Sul piano  $z=0$ , si annulla pure la tensione normale

$$N_3 = (\lambda + ip\lambda') \vartheta + 2(\mu + ip\mu') \frac{\partial w}{\partial z}.$$

Per la [5], e quindi per la [6],

$$\lambda + 2\mu + ip(\lambda' + 2\mu') = \frac{\rho v^2}{h^2} \quad ; \quad \lambda + ip\lambda' = (\mu + ip\mu') \left( \frac{h^2}{h^2} - 2 \right)$$

Perciò

$$N_3 = (\mu + ip\mu') \left\{ \left( \frac{h^2}{h^2} - 2 \right) \vartheta + 2 \frac{\partial w}{\partial z} \right\}$$

È

$$\frac{\partial w}{\partial z} = - \frac{r^2}{h^2} e^{-rz} - sC e^{-sz}.$$

La condizione  $N_3=0$ , corrispondente a  $z=0$ , tenendo conto della [13], dà

$$k^2 - 2h^2 - 2(r^2 + h^2 sC) = 0,$$

oppure, essendo per la [11]

$$\begin{aligned} r^2 + h^2 &= f^2 + g^2, \\ k^2 - 2(f^2 + g^2) - 2h^2 sC &= 0. \end{aligned} \quad [22]$$

Eliminando  $C$  fra [21] e [22], otteniamo l'equazione per la quale il tempo di vibrazione (periodo) è determinato in funzione della

lunghezza d'onda e delle proprietà del solido. Si ha

$$C = -\frac{2r(f^2 + g^2)}{h^2(s^2 + f^2 + g^2)}, \quad \text{e sostituendo in [22],}$$

$$\left\{ k^2 - 2(f^2 + g^2) \right\} \cdot \left\{ s^2 + f^2 + g^2 \right\} + 4rs(f^2 + g^2) = 0,$$

oppure, per la [17] — per la quale  $s^2 + f^2 + g^2 = 2(f^2 + g^2) - k^2$  —

$$\left\{ 2(f^2 + g^2) - k^2 \right\}^2 = 4rs(f^2 + g^2). \quad [23]$$

Quadrando la [23] e introducendo i valori di  $r^2$  e  $s^2$  dati dalle [11], [17] abbiamo

$$\left\{ 2(f^2 + g^2) - k^2 \right\}^4 = 16(f^2 + g^2)^2 (f^2 + g^2 - h^2) (f^2 + g^2 - k^2).$$

Possiamo scrivere anche

$$k^6 \left\{ 1 - 8 \frac{f^2 + g^2}{k^2} + \left( 24 - 16 \frac{h^2}{l^2} \right) \frac{(f^2 + g^2)^2}{k^4} - 16 \left( 1 - \frac{h^2}{k^2} \right) \frac{(f^2 + g^2)^3}{k^6} \right\} = 0. \quad [24]$$

Dalle [19], ricordando le [20] e [21], si ha

$$u = -\frac{if}{h^2} e^{-rz} + \left[ \frac{2ifr}{sh^2} + \frac{if}{sh^2} \left( -\frac{2r(f^2 + g^2)}{s^2 + f^2 + g^2} \right) \right] e^{-sz},$$

da cui

$$h^2 u = if \left[ -e^{-rz} + \left( \frac{2r}{s} - \frac{1}{s} \frac{2r(f^2 + g^2)}{s^2 + f^2 + g^2} \right) e^{-sz} \right].$$

Fra parentesi quadra può scriversi  $\frac{2r}{s} \left( 1 - \frac{f^2 + g^2}{s^2 + f^2 + g^2} \right) = \frac{2rs}{f^2 + s^2 + g^2}$ .

Analogamente per  $h^2 v$ . Perciò, in generale sarà — prescindendo dagli esponenziali —

$$\begin{cases} h^2 u = if \left\{ -e^{-rz} + \frac{2rs}{s^2 + f^2 + g^2} e^{-sz} \right\} \\ h^2 v = ig \left\{ -e^{-rz} + \frac{2rs}{s^2 + f^2 + g^2} e^{-sz} \right\} \\ h^2 w = r \left\{ e^{-rz} - \frac{2(f^2 + g^2)}{s^2 + f^2 + g^2} e^{-sz} \right\} \end{cases} \quad [25]$$

Se consideriamo il moto soltanto in due dimensioni, e precisamente nel piano principale, possiamo porre  $g=0$ . La [21] diviene allora

$$1 - 8 \frac{f^2}{k^2} + \left(24 - 16 \frac{h^2}{k^2}\right) \frac{f^4}{k^4} - 16 \left(1 - \frac{h^2}{k^2}\right) \frac{f^6}{k^6} = 0. \quad [24']$$

Per  $g=0$ , è inoltre  $v=0$ , e le [24] divengono

$$\begin{cases} h^2 u = i f \left\{ -e^{-rz} + \frac{2rs}{s^2 + f^2} e^{-sz} \right\} \\ h^2 w = r \left\{ e^{-rz} - \frac{2f^2}{s^2 + f^2} e^{-sz} \right\}. \end{cases}$$

E' ancora, sempre per  $g=0$ , e posto  $\frac{f^2}{k^2} = \chi^2$  (radice della [24'])

$$r^2 = f^2 - h^2 = k^2 \chi^2 - h^2 = k^2 \left( \chi^2 - \frac{h^2}{k^2} \right)$$

$$s^2 = f^2 - h^2 = k^2 (\chi^2 - 1)$$

$$2rs = 2k^2 \sqrt{\chi^2 - \frac{h^2}{k^2}} \sqrt{\chi^2 - 1} \quad ; \quad s^2 + f^2 = 2f^2 - k^2 = h^2 (2\chi^2 - 1) \quad ,$$

$$\frac{2rs}{s^2 + f^2} = \frac{2 \sqrt{\chi^2 - \frac{h^2}{k^2}} \sqrt{\chi^2 - 1}}{2\chi^2 - 1} \quad ; \quad \frac{2f^2}{s^2 + f^2} = \frac{2\chi^2}{2\chi^2 - 1}$$

Le [25'] si possono scrivere, introducendo gli esponenziali finora sottintesi,

$$\begin{cases} \frac{h^2}{k} u = i \chi \left\{ -e^{-rz} + \frac{2 \sqrt{\chi^2 - \frac{h^2}{k^2}} \sqrt{\chi^2 - 1}}{2\chi^2 - 1} e^{-sz} \right\} e^{i(pt + fx)} \\ \frac{h^2}{k} w = \sqrt{\chi^2 - \frac{h^2}{k^2}} \left\{ e^{-rz} - \frac{2\chi^2}{2\chi^2 - 1} e^{-sz} \right\} e^{i(pt + fx)} \quad , \end{cases} \quad [25'']$$

oppure

$$\begin{aligned} & \frac{h^2}{k} u = i \chi \left\{ -e^{-rz} + \frac{2 \sqrt{\chi^2 - \frac{h^2}{k^2}} \sqrt{\chi^2 - 1}}{2\chi^2 - 1} e^{-sz} \right\} \\ & e^{i \left( pt + \frac{p}{v_s} \frac{x}{\sqrt{1 + p^2 \left( \frac{u'}{\mu} \right)^2}} \sqrt{a + \beta p \frac{u'}{\mu}} + i \left( \beta - a p \frac{u'}{\mu} \right) \right)} \\ & \frac{h^2}{k^3} w = \sqrt{\chi^2 - \frac{h^2}{k^2}} \left\{ e^{-rz} - \frac{2\chi^2}{2\chi^2 - 1} e^{-sz} \right\} \\ & e^{i \left( pt + \frac{p}{v_s} \frac{x}{\sqrt{1 + p^2 \left( \frac{u'}{\mu} \right)^2}} \sqrt{a + \beta p \frac{u'}{\mu}} + i \left( \beta - a p \frac{u'}{\mu} \right) \right)} \end{aligned} \quad [25''']$$

dove  $\alpha$ ,  $\beta$  sono la parte reale e il coefficiente dell'immaginario delle soluzioni della [24'], corrispondenti alle onde di Rayleigh e  $v$ , rappresenta la velocità delle onde trasversali nel mezzo considerato.

2. — Passiamo ora ai valori numerici.

Risolviamo a questo scopo la [24'], ricordando le espressioni di  $h^2$  e  $k^2$  e nell'ipotesi di Poisson. Si sa che  $k' = -\frac{2}{3} \mu'$ . Posto

$$\frac{k^2}{f^2} = \varepsilon,$$

la [24'] diviene

$$\varepsilon^3 - 8\varepsilon^2 + (24 - 16\varphi)\varepsilon - 16(1 - \varphi) = 0, \quad [24'']$$

dove

$$\varphi = \frac{h^2}{k^2} = 3 \frac{9 \left(\frac{\mu}{\mu'}\right)^2 + 4p^2}{81 \left(\frac{\mu}{\mu'}\right)^2 + 16p^2} + i \frac{15p \frac{\mu}{\mu'}}{81 \left(\frac{\mu}{\mu'}\right)^2 + 16p^2},$$

e con le ulteriori posizioni:

$$\varepsilon = \psi + \frac{3}{3}, \quad \varphi = 1 - \frac{j}{16},$$

la [24''] si trasforma nell'equazione

$$\psi^3 + \left(j - \frac{40}{3}\right)\psi + \left(\frac{5}{3}j - \frac{448}{27}\right) = 0. \quad [24''']$$

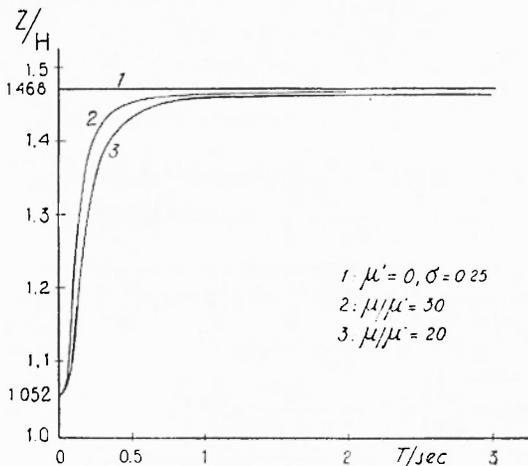


Fig. 1

Andamento del rapporto  $Z/H$  prescindendo dall'assorbimento: andamento analogo, fra gli stessi estremi, nel caso in cui si consideri l'assorbimento

La risoluzione della [24'''] è stata proposta al benemerito Istituto Italiano per le Applicazioni del Calcolo.

I risultati dei calcoli per vari valori del rapporto  $\mu/\mu'$  di  $T$ , sono riportati nelle tabelle I, II e III. In esse  $\gamma$  e  $\delta$  sono la parte reale e il coefficiente dell'immaginario del rapporto  $\frac{h^2}{k^2}$ ;  $R\gamma_1, I\gamma_1, R\gamma_2, I\gamma_2, \alpha$  e  $\beta$  la parte reale e il coefficiente dell'immaginario

TABELLA I

 $\mu/\mu' = 30, \text{sec}^{-1}$ 

$T$ sec	$\gamma$	$\delta$	$R\gamma_1^2$	$I\gamma_1^2$	$R\gamma_2^2$	$I\gamma_2^2$	$\alpha$	$\beta$
0.0	-750000	0	-162435	0	-730406	0	2.107160	0
0.05	-656700	-173696	-16713	-016281	-67763	-17225	1.31484	-43073
0.1	-526762	-207800	-17669	-026357	-51639	-21611	1.19269	-19919
0.5	-317291	-074972	-21911	-031569	-35377	-081416	1.18317	-036995
1	-336913	-038452	-23360	-024725	-33487	-049849	1.18305	-018455
2	-334234	-019351	-24284	-016800	-32450	-029414	1.18302	-009223
5	-333478	-007754	-24833	-008185	-31871	-013223	1.18301	-003688
10	-333369	-003878	-24954	-004287	-31747	-006803	1.18301	-001845
20	-333342	-001939	-24988	-002172	-31711	-003431	1.18301	-0009221
40	-333336	-0009696	-249970	-001091	-317018	-001721	1.183013	-000461
60	-333334	-0006461	-249987	-000727	-317001	-001148	1.183013	-000307
120	-333334	-0003232	-249997	-000364	-316991	-000574	1.183013	-000154
$\infty$	-333333	0	-250000	0	-316987	0	1.183013	0

TABELLA II

 $u/u' = 50 \cdot \text{sec}^{-1}$ 

$T$ sec	$\gamma$	$\delta$	$R\gamma_1^2$	$I\gamma_1^2$	$R\gamma_2^2$	$I\gamma_2^2$	$\alpha$	$\beta$
0.0	0.750000	0	0.162435	0	0.730406	0	2.10716	0
0.05	0.564626	0.207064	0.17337	-0.023705	0.56133	0.22255	1.20188	0.24660
0.1	0.432401	0.177381	0.18886	-0.032201	0.42859	0.16923	1.18508	0.11377
0.5	0.333463	0.045969	0.23030	-0.026742	0.33882	0.056856	1.18308	0.022155
1	0.334629	0.023199	0.24090	-0.018841	0.32662	0.033941	1.18303	0.011067
2	0.333658	0.011627	0.24667	-0.011540	0.32045	0.019096	1.18302	0.005533
5	0.333385	0.004654	0.24935	-0.005106	0.31766	0.008129	1.18301	0.002213
10	0.333346	0.002327	0.24983	-0.002601	0.31716	0.004112	1.18361	0.001107
20	0.333337	0.001164	0.24996	-0.001307	0.31703	0.002063	1.18301	0.000553
40	0.333334	0.000582	0.249989	-0.000654	0.316998	0.001032	1.183013	0.000277
60	0.333334	0.000388	0.249996	-0.000436	0.316992	0.000688	1.183013	0.000184
120	0.333333	0.000194	0.249999	-0.000218	0.316989	0.000344	1.183013	0.0000922
$\infty$	0.333333	0	0.250000	0	0.316987	0	1.183013	0

TABELLA III

 $\mu/\mu' = 100, \text{sec}^{-1}$ 

$T$ sec	$\gamma$	$\delta$	$R\gamma_{12}^2$	$I_{A_4}^2$	$R\gamma_{22}^2$	$I_{A_2}^2$	$\alpha$	$\beta$
0,0	0,750000	0	0,162435	0	0,730406	0	2,107160	0
0,05	0,432401	0,177331	0,18886	-0,032201	0,42459	+0,16923	1,18508	0,11377
0,1	0,363475	0,107938	0,20844	-0,033808	0,37170	0,107580	1,18341	0,055707
0,5	0,334629	0,023199	0,24090	-0,018841	0,32662	0,033941	1,18303	0,011067
1	0,333658	0,011627	0,24667	-0,011540	0,32015	0,019096	1,18302	0,005533
2	0,333415	0,005817	0,24901	-0,006300	0,31801	0,010079	1,18301	0,002766
5	0,333346	0,002327	0,24983	-0,002601	0,31716	0,004112	1,183013	0,001107
10	0,333337	0,001164	0,24996	-0,001307	0,31703	0,002063	1,183013	0,000553
20	0,333334	0,000582	0,249989	-0,000651	0,316998	0,001032	1,183013	0,000277
40	0,333333	0,000291	0,249997	-0,000327	0,316990	0,000516	1,183013	0,000138
60	0,333333	0,000194	0,249999	-0,000218	0,316989	0,000344	1,183013	0,0000922
120	0,333333	0,0000970	0,250000	-0,000109	0,316988	0,000172	1,183013	0,0000161
$\infty$	0,333333	0	0,250000	0	0,316987	0	1,183013	0

della 1<sup>a</sup>, 2<sup>a</sup> e 3<sup>a</sup> radice dell'equazione di Rayleigh rispettivamente.

Per  $T \rightarrow \infty$ , qualunque sia il valore di  $\mu/\mu'$ , si ha

$$\gamma \rightarrow \frac{1}{3}, \quad \gamma_1^2 \rightarrow \frac{1}{4}, \quad \gamma_2^2 \rightarrow \frac{3 - \sqrt{3}}{4} = 1,316988,$$

$$a \rightarrow \frac{3 + \sqrt{3}}{4} = 1,183013$$

che sono — i tre ultimi — i valori delle radici dell'equazione classica di Rayleigh per  $\sigma=0,25$ .

Per  $T \rightarrow 0$ , qualunque sia il valore di  $\mu/\mu'$ , si ha

$$\gamma \rightarrow \frac{3}{4}, \quad \gamma_1^2 \rightarrow 0,162435, \quad \gamma_2^2 \rightarrow 0,730406, \quad a \rightarrow 2,107160.$$

3. — Risolta la [24'], come da paragrafo 2, mi sono proposto di pervenire ai valori delle altre grandezze che entrano nel problema (assorbimento, rapporto delle ampiezze verticali e orizzontali, ampiezza, velocità), limitatamente alle soluzioni corrispondenti alle onde di Rayleigh propriamente dette.

Cominciamo dal rapporto degli spostamenti verticale e orizzontale in superficie.

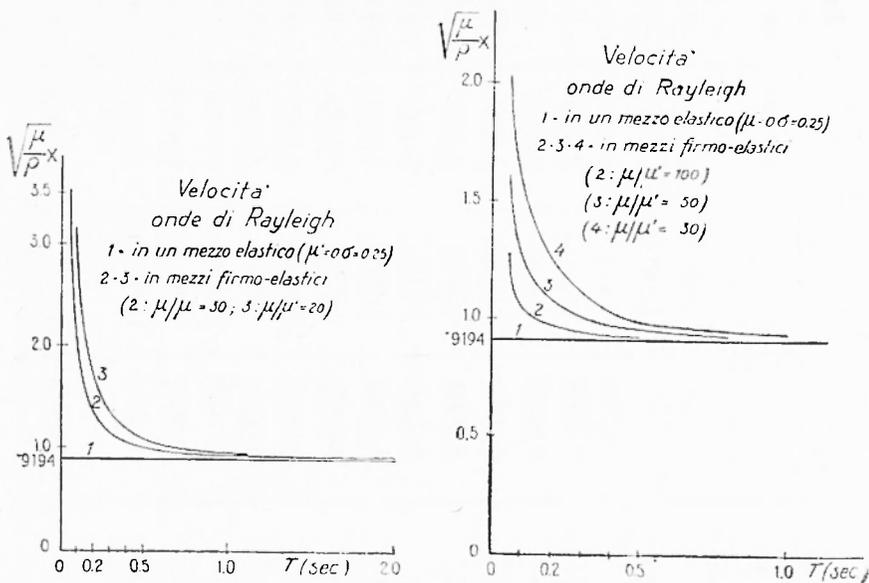


Fig. 2

a) Preseindendo dall'assorbimento; b) Tenendo conto dell'assorbimento

Posto, nell'esponenziale della [25''']

$$a = a + \beta p \frac{u'}{\mu}, \quad b = \beta - a p \frac{u'}{\mu},$$

avremo

$$\left\{ \begin{aligned} \sqrt{a+ib} &= \pm \left( \sqrt{\frac{|a^2+b^2+a|}{2}} + i \sqrt{\frac{|a^2+b^2-a|}{2}} \right) \text{ se } b > 0 \\ \sqrt{a+ib} &= \pm \left( \sqrt{\frac{|a^2+b^2+a|}{2}} - i \sqrt{\frac{|a^2+b^2-a|}{2}} \right) \text{ se } b < 0. \end{aligned} \right. \quad [26]$$

Sia ancora

$$U = \sqrt{\frac{|a^2+b^2+a|}{2}}, \quad V = \sqrt{\frac{|a^2+b^2-a|}{2}}, \quad W = -\frac{U}{v \sqrt{1 + \left( p \frac{u'}{\mu} \right)^2}} \quad [27]$$

e inoltre

$$\begin{aligned} -\gamma + 2 \frac{\gamma \sqrt{\gamma^2 - \frac{h^2}{k^2}} \sqrt{\gamma^2 - 1}}{2\gamma^2 - 1} &= -R + iS \quad [28] \\ \sqrt{\gamma^2 - \frac{h^2}{k^2}} - \sqrt{\gamma^2 - \frac{h^2}{k^2}} \cdot \frac{2\gamma^2}{2\gamma^2 - 1} &= -R' + iS', \end{aligned}$$

poiché nei casi considerati è sempre  $b < 0$ , vale la 2<sup>a</sup> delle [26], la quale ha significato fisico solo con il secondo membro preceduto dal segno  $-$ . Pertanto, per  $z=0$ , possiamo scrivere

$$\left\{ \begin{aligned} \frac{h^2 u}{k} &= \left\{ \begin{aligned} &R \sin p(t + Wx) - S \cos p(t + Wx) \\ &+ i \left[ -R \cos p(t + Wx) - S \sin p(t + Wx) \right] \end{aligned} \right\} e^{-\frac{Vpx}{v \sqrt{1 + p^2 \left( \frac{u'}{\mu} \right)^2}}} \\ \frac{h^2 w}{k} &= \left\{ \begin{aligned} &-R' \cos p(t + Wx) + S' \sin p(t + Wx) \\ &+ i \left[ -R' \sin p(t + Wx) + S' \cos p(t + Wx) \right] \end{aligned} \right\} e^{-\frac{Vpx}{v \sqrt{1 + p^2 \left( \frac{u'}{\mu} \right)^2}}} \end{aligned} \right. \quad [29]$$

Fatte le posizioni

$$\frac{h^2}{k^2} = \gamma + i\delta; \quad [30]$$

$$A = \sqrt{\frac{|a^2 + \beta^2 + a|}{2}}, \quad B = \sqrt{\frac{|a^2 + \beta^2 - a|}{2}}; \quad C = \sqrt{\frac{|(a-\gamma)^2 + (\delta-\beta)^2 + (a-\gamma)|}{2}}$$

TABELLA IV

T sec	$\mu/\mu' = 30, \text{sec}^{-1}$				$\mu/\mu' = 50, \text{sec}^{-1}$			
	R	S	R'	S'	R	S	R'	S'
0.0	0.344446	0.0	0.362432	0.0	0.344446	0.0	0.362432	0.0
0.05	0.501569	0.055691	0.480210	0.133627	0.440592	0.004866	0.511948	0.112730
0.1	0.477688	0.048330	0.573083	0.104331	0.457721	0.021923	0.612725	0.128136
0.5	0.462257	0.006684	0.683131	0.042802	0.458621	0.004292	0.671752	0.031275
1	0.459677	0.002103	0.672686	0.026133	0.458681	0.002154	0.674027	0.015735
2	0.459863	0.001775	0.674361	0.010966	0.458692	0.001086	0.674537	0.007833
5	0.459727	0.000482	0.674722	0.004382	0.459703	0.000430	0.674762	0.003155
10	0.459703	0.000255	0.674774	0.002191	0.459703	0.000391	0.674763	0.001584
20	0.459733	0.000103	0.674786	0.001277	0.459703	0.000092	0.674789	0.000800
40					0.459703			
60								
120								
$\infty$	0.459701	0.0	0.674790	0.0	0.459701	0.0	0.674790	0.0

$$D = \sqrt{\frac{(\alpha - \gamma)^2 + (\delta - \beta)^2 - (\alpha - \gamma)}{2}} ; E = \sqrt{\frac{(\alpha - 1)^2 + \beta^2 - \alpha - 1}{2}}$$

$$F = \sqrt{\frac{(\alpha - 1)^2 + \beta^2 - \alpha + 1}{2}} ; g = CE + DF , h = CF - DE ;$$

$$K = \frac{g \left( \alpha - \frac{1}{2} \right) + \beta h}{\left( \alpha - \frac{1}{2} \right)^2 + \beta^2} , J = \frac{\left( \alpha - \frac{1}{2} \right) h - \beta g}{\left( \alpha - \frac{1}{2} \right)^2 + \beta^2} ;$$

$$L = \frac{\alpha \left( \alpha - \frac{1}{2} \right) + \beta^2}{\left( \alpha - \frac{1}{2} \right)^2 + \beta^2} , M = - \frac{0,5 \beta}{\left( \alpha - \frac{1}{2} \right)^2 + \beta^2}$$

$N = AK - BJ$  ,  $O = BK + AJ$  ;  $P = CL + DM$  ,  $Q = CM - DL$  ,  
 consegue (per  $\beta < \delta$ )

$$\chi = A + iB , \sqrt{\chi^2 - \frac{h^2}{k^2}} = C - iD , \sqrt{\chi^2 - 1} = E + iF ,$$

$$\sqrt{\chi^2 - \frac{h^2}{k^2}} \sqrt{\chi^2 - 1} = g + ih ; 2 \frac{\sqrt{\chi^2 - \frac{h^2}{k^2}} \cdot \sqrt{\chi^2 - 1}}{2\chi^2 - 1} = k + iJ ;$$

$$\frac{2\chi^2}{2\chi^2 - 1} = L + iM , \chi^2 \frac{\sqrt{\chi^2 - \frac{h^2}{k^2}} \sqrt{\chi^2 - 1}}{2\chi^2 - 1} = N + iO ,$$

$$\sqrt{\chi^2 - \frac{h^2}{k^2}} \cdot \frac{2\chi^2}{2\chi^2 - 1} = P + iQ. (*)$$

Pertanto

$$R = A - N , S = O - B ; R' = P - C , S' = -(Q + D).$$

Ovviamente, la parte reale delle [29] è data da

$$\frac{h^2 u}{k} = \left\{ R \sin p(t + W'x) - S \cos p(t + W'x) \right\} e^{-\frac{Vpx}{v_s \sqrt{1 + P^2 \left( \frac{\mu'}{\mu} \right)^2}}}$$

$$\frac{h^2 w}{k} = \left\{ -R' \cos p(t + W'x) + S' \sin p(t + W'x) \right\} e^{-\frac{Vpx}{v_s \sqrt{1 + P^2 \left( \frac{\mu'}{\mu} \right)^2}}}$$

(\*) Per  $\beta > \delta$  è  $\sqrt{\chi^2 - \frac{h^2}{k^2}} = C + iD$  ,  $g = CE - DF$  ,  $h = CF + DE$  ,  $P = CL - DM$  ,  
 $Q = DL + CM$ .

TABELLA V

T sec	$\mu, \mu' = 30, \text{sec}^{-1}$		$\mu, \mu' = 50, \text{s} \cdot \text{c}^{-1}$		$\mu, \mu' = 100, \text{sec}^{-1}$	
	$\tau_{12}$	$k_0$	$\tau_{12}$	$k_0$	$\tau_{12}$	$k_0$
0.0	$\infty$	$\infty$	$\infty$	$\infty$	$\infty$	$\infty$
0.05	2.021 · v <sub>s</sub>	10.532	1.687 · v <sub>s</sub>	12.175	1.2615 · v <sub>s</sub>	12.804
0.1	1.5614 · »	6.342	1.2615 · »	6.4018	1.0322 · »	4.8124
0.5	0.9732 · »	0.72228	0.93953 · »	0.4626	0.92152 · »	0.2382
1	0.9335 · »	0.1950	0.9245 · »	0.11910	0.9207 · »	0.06000
2	0.9229 · »	0.04977	0.9207 · »	0.03250	0.9197 · »	0.01503
5	0.9200 · »	0.008013	0.9195 · »	0.00741	0.91945 · »	0.002407
10	0.91955 · »	0.002000	0.91945 · »	0.001203	0.91942 · »	0.000602
20	0.91944 · »	0.000502	0.919415 · »	0.000301	0.9194 · »	0.000165
40	0.91941 · »	0.0001303	0.919405 · »	0.0000752	0.9194 · »	0.0000476
60	0.9194 · »	0.0000563	0.9194 · »	0.0000317	0.9194 · »	0.0000174
120	0.9194 · »	0.0000123	0.9194 · »	0.0000083	0.9194 · »	0.0000043
$\infty$	0.9194 · »	0	0.9194 · »	0	0.9194 · »	0

Nella Tabella IV sono contenuti i valori  $R, R', S, S'$ , per vari valori di  $T$ , in corrispondenza di  $u/u' = 30$  e  $u/u' = 50$ . Da essa risulta che, esclusi i periodi piú piccoli (di poco interesse per le onde di Rayleigh propriamente dette),  $S$  e  $S'$  assumono valori via via decrescenti, tendenti allo zero: trascurabili comunque nei confronti di quelli di  $R, R'$ .

*Pertanto, il rapporto dell'ampiezza del movimento verticale a quella del movimento orizzontale, da un valore prossimo all'unitá 1,052 per periodi pressoché nulli, tende rapidamente al valore 1.47 che le compete nella classica teoria di Rayleigh in mezzi puramente elastici; tanto piú rapidamente, quanto maggiore è il rapporto  $u/u'$ .*

4. — Passiamo alla velocità. Essa vale evidentemente

$$v_r = \frac{\sqrt{1 + \left(p \frac{u'}{u}\right)^2}}{\sqrt{\frac{a^2 + b^2 + a}{2}}} \cdot v_s = \frac{\sqrt{1 + p^2 \left(\frac{u'}{u}\right)^2}}{\sqrt{\frac{(a^2 + \beta^2) \left(1 + p^2 \left(\frac{u'}{u}\right)^2\right) + a + \beta p \frac{u'}{u}}{2}}} \cdot v_s.$$

La Tabella V contiene i risultati dei calcoli per i valori 30, 50 e 100 del rapporto  $u/u'$ , al variare del periodo. Si nota subito che, da un valore teoricamente infinito per  $T=0$ , la velocità delle onde di Rayleigh in un mezzo firmo-elastico tende al valore che essa assume in un mezzo puramente elastico col tendere del periodo all'infinito, e tanto piú rapidamente quanto maggiore è il valore del rapporto  $u/u'$ .

Questo risultato era già stato ottenuto nel lavoro precedente; resta quindi confermato una sorta di effetto della firmo-viscosità sulla propagazione delle onde superficiali, che appare come propagazione anomala.

5. — Veniamo infine all'assorbimento di un mezzo firmo-elastico. Il coefficiente di assorbimento è

$$k_o = \frac{p}{v_s \sqrt{1 + p^2 \left(\frac{u'}{u}\right)^2}} \cdot \frac{1}{\sqrt{\frac{a^2 + b^2 + a}{2}}} = \frac{p}{v_s \sqrt{1 + p^2 \frac{u'^2}{u^2}}} \cdot \frac{1}{\sqrt{\frac{(a^2 + \beta^2) \left(1 + p^2 \frac{u'^2}{u^2}\right) + a + \beta p \frac{u'}{u}}{2}}}.$$

Fatto  $v_s = 3.3$  km/sec. velocità media delle onde trasversali nello strato superficiale terrestre, e assegnati a  $\mu/\mu'$  i valori 30, 50, 100 rispettivamente i calcoli hanno fornito, per periodi diversi, i valori riportati nella Tabella V.

A periodi nulli corrisponde quindi un assorbimento infinito, il quale resta comunque elevatissimo per piccoli periodi, conformemente all'osservazione; per periodi dell'ordine  $20^s$  e per  $\mu/\mu' = 50$  (che è il valore più prossimo a quelli forniti dall'osservazione), il coefficiente di assorbimento diviene dell'ordine di 0.0003, che è appunto quello generalmente osservato.

L'attrito interno giustifica quindi pienamente le caratteristiche osservate per le onde superficiali, le quali nella teoria di Rayleigh erano considerate come persistenti. Ritengo sia questo uno dei risultati più notevoli della ricerca.

Roma — Istituto Nazionale di Geofisica — Luglio 1918.

#### RIASSUNTO

La ricerca oggetto di questo lavoro, ha condotto ai seguenti risultati: la velocità di propagazione delle onde di Rayleigh in un mezzo fimo-elastico, da un valore infinito per periodi nulli, tende rapidamente, per periodi crescenti, al valore che le compete in mezzi puramente elastici, tanto più rapidamente quanto maggiore è il valore del rapporto  $\mu/\mu'$  ( $\mu$  costante di Lamé,  $\mu'$  coefficiente d'attrito

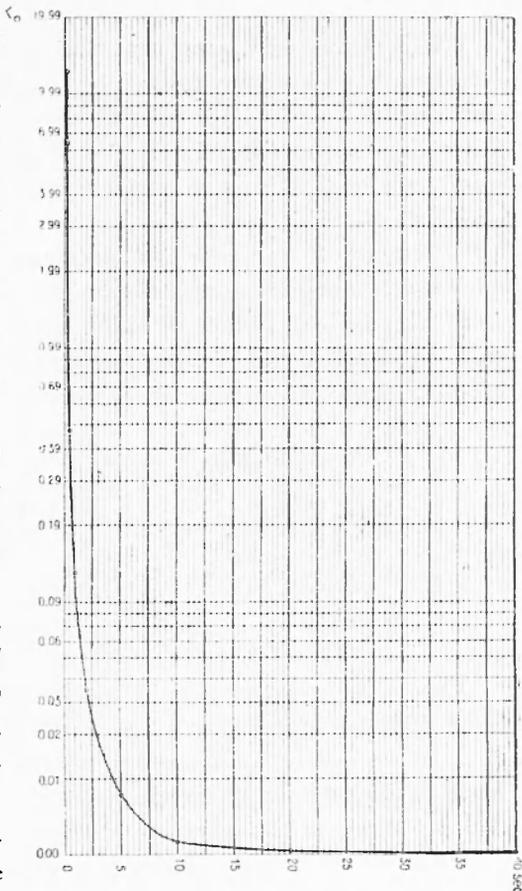


Fig. 3  
Andamento del fattore d'assorbimento  $k_0$  nel caso  $\mu/\mu' = 50$  (Tab. V)

interno equivoluminale); la firmo-elasticità determina una sensibile riduzione della componente verticale del moto, riduzione che è tanto maggiore quanto più piccoli sono il rapporto  $\frac{\mu}{\mu'}$  e il periodo proprio dell'onda: per onde originanti con grossi periodi l'azione dell'attrito interno sul rapporto delle ampiezze è pressoché nulla e il mezzo si comporta come puramente elastico. La firmo-elasticità può variare il rapporto delle ampiezze  $Z/H$  da un valore prossimo all'unità (1,05) a 1,41, valore che la teoria Rayleigh-Lamb assegna a quel rapporto per  $\sigma = 0.25$ .

La ricerca ha consentito inoltre di chiarire teoricamente un altro aspetto delle onde superficiali finora rimasto insoluto. Nella classica teoria di Rayleigh, le onde che portano il suo nome sono considerate come libere, persistenti, non soggette ad assorbimento da parte del mezzo. Ora, l'osservazione prova che l'assorbimento è fortissimo per i periodi più piccoli e tende a decrescere rapidamente per raggiungere il valore di circa  $e^{-0,0003}$  per periodi dell'ordine di  $20^{\circ}$ . La nuova teoria prova che in un mezzo firmo-elastico (con un rapporto  $\frac{\mu}{\mu'} = 5^0$ )  $\text{sec}^{-1}$ , conforme alla media dei valori osservati) ciò è pienamente dimostrato. Ed è sintomatico che le fondamentali caratteristiche delle onde di Rayleigh trovino così completa giustificazione in un mezzo indefinito non stratificato.

#### BIBLIOGRAFIA

- (<sup>1</sup>) RAYLEIGH LORD: *On waves propagated along the plane surface of an elastic solid* - Scientific Papers, II, pagg. 441-447.
- (<sup>2</sup>) LAMB H.: *On the propagation of tremors over the surface of an elastic solid* - Philosophical Transactions, CCIII, A, 1904.
- (<sup>3</sup>) CALOI P.: *Sulle onde di Rayleigh in un mezzo elastico, firmo-viscoso indefinito* - Pontificia Academia Scientiarum, Acta, X, 1946.