Calcolo di orbite a mezzo di misura di distanze 2°

(Orbit determinations from range measurements 2°)

C. Botti

Ricevuto il 26 Maggio 1976

Riassunto. — L'autore presenta, in questa nota, un metodo per la determinazione di orbite di satelliti attraverso l'elaborazione di sole misure di distanza.

Nella prima parte del lavoro è illustrata la procedura matematica.

Nella parte successiva sono analizzati i risultati numerici ottenuti simulando misure di distanza per diverse configurazioni osservatore-satellite. Tali risultati si dimostrano più che soddisfacenti in quanto determinano la posizione dell'osservatore e l'orbita del satellite con un errore relativo dell'ordine di 10^{-8}.

Summary. — The author presents, in this note, a method for the determination of satellite orbits only through the elaboration of range measurements.

The mathematical procedure is illustreted in the first part of the paper.

The numerical results obtained by simulating range measurements of several observer-satellite configurations are analyzed in the subsequent part of the paper. The results are very satisfactory since the parameters, which determine the observer position and the satellite orbit, are obtained with a relative error of about 10^{-8}.

Introduzione

Nell'articolo del prof. M. Caputo « Orbit determinations from range measurements » (1) è stato esaminato un metodo per la determinazione delle orbite dei satelliti a mezzo di una serie di misure di distanza osservatore-satellite effettuate a tempi noti.

Nel presente lavoro abbiamo reso operativo tale metodo con un programma FORTRAN che elabora le misure e mette in evidenza la precisione raggiunta nella determinazione dei parametri orbitali.

Abbiamo diviso il lavoro in due parti: una teorica, l'altra applicativa.

Nella prima abbiamo adattato il metodo di applicazione dei minimi quadrati illustrato dal prof. Caputo al caso di un osservatore sulla superficie terrestre e di un satellite ruotante attorno ad un altro pianeta **V**, supponendo la Terra e il pianeta **V** in orbita ellittica attorno al Sole.

Abbiamo poi notato come sia possibile scrivere la equazione di condizione in modo tale che il metodo dei minimi quadrati migliori, non già i valori dei parametri complessivi, ma direttamente i valori dei parametri orbitali.

Tale metodo presenta rispetto all'altro, che pure resta fondamentale per poter discriminare i casi di indeterminazione (*), due vantaggi:

1) Essendo in generale il numero dei parametri orbitali minore di quello dei parametri complessivi, è anche minore il numero minimo di rilevazioni necessarie per utilizzare i minimi quadrati.

2) Evita la risoluzione di sistemi di equazioni di grado superiore al primo.

Nella seconda parte abbiamo applicato, sia il metodo del prof. M. Caputo che quello qui presentato, a varie situazioni di osservazione. Dapprima, sia per la minor complessità delle equazioni sia in relazione all'imminente lancio, nel giugno del '74, da parte della NASA, del satellite geodetico Geos-C dotato di retroriflettore-laser, abbiamo scelto il caso dell'osservatore sulla superficie della Terra e del satellite terrestre e ad esso abbiamo applicato i vari metodi confrontandoli.

La precisione maggiore è stata raggiunta, come già preannunciato, col metodo di determinazione diretta dei parametri orbitali.

In particolare si è ottenuto (v. Tab. 3.1) un errore percentuale medio di circa 10^{-8}, ossia, ad esempio, un errore assoluto di soli 20 cm per il semiasse dell'orbita ($1{,}85 \cdot 10^{9}$ cm) e di 47 cm per la distanza osservatore-centro di massa terrestre ($6{,}37 \cdot 10^{8}$ cm). Precisioni di quest'ordine di grandezza sono molto importanti perchè dal Geos-C verranno effettuate anche misure radar di distanza dal suolo.

Anche il secondo caso, osservazioni da satellite a satellite, è in relazione con il lancio Geos-C, in quanto nel corso di questo esperimento, verranno effettuate misure di distanza da un satellite ATS, geostazio-

(*) Vedere a tale proposito la discussione di indeterminazione relativa al caso osservatore fisso-satellite extraterrestre nell'articolo citato del prof. Caputo.

TABELLA 3.1.

Metodo di correzione diretta dei parametri orbitali (50 rilevazioni su orbite complete)

Parametri orbitali di Q	Valore vero	Valore finale	Valore iniziale	Errore finale	Errore iniziale	Err. perc. fin.	Err. perc. iniz.
R_T (cm)	$6{,}371020 \cdot 10^{+8}$	$6{,}371019524351 \cdot 10^{8}$	$6{,}372020 \cdot 10^{8}$	$-4{,}76649 \cdot 10$	$1{,}0 \cdot 10^{5}$	$-7{,}46582 \cdot 10^{-8}$	$1{,}56960737 \cdot 10^{-4}$
ω (sec^{-1})	$7{,}292115053926 \cdot 10^{-5}$	$7{,}292115053926 \cdot 10^{-5}$	$7{,}292115053926 \cdot 10^{-5}$	0	0	0	0
a (°)	$4{,}50 \cdot 10$	$4{,}500000310948 \cdot 10$	$4{,}503 \cdot 10$	$3{,}10948 \cdot 10^{-6}$	$3{,}\overline{33} \cdot 10^{-2}$	$6{,}90996 \cdot 10^{-8}$	$7{,}\overline{407} \cdot 10^{-4}$
Parametri orbitali di P							
a (cm)	$1{,}857772753750 \cdot 10^{9}$	$1{,}857772773885 \cdot 10^{9}$	$1{,}862193393484 \cdot 10^{9}$	$2{,}01357 \cdot 10$	$4{,}420639734 \cdot 10^{6}$	$1{,}08386 \cdot 10^{-8}$	$2{,}379537332 \cdot 10^{-3}$
e	$2{,}0 \cdot 10^{-1}$	$1{,}999999982791 \cdot 10^{-1}$	$1{,}50 \cdot 10^{-1}$	$-1{,}7209 \cdot 10^{-9}$	$-5{,}0 \cdot 10^{-2}$	$-8{,}6044 \cdot 10^{-9}$	$-2{,}50 \cdot 10^{-1}$
T (sec)	$2{,}520 \cdot 10^{+4}$	$2{,}520000003370 \cdot 10^{4}$	$2{,}5290 \cdot 10^{4}$	$3{,}370 \cdot 10^{-5}$	$9{,}0 \cdot 10$	$1{,}337 \cdot 10^{-9}$	$3{,}577428571 \cdot 10^{-3}$
τ (sec)	$3{,}60 \cdot 10^{3}$	$3{,}599999490054 \cdot 10^{3}$	$3{,}420 \cdot 10^{3}$	$-5{,}09946 \cdot 10^{-1}$	$-1{,}80 \cdot 10^{2}$	$-1{,}41652 \cdot 10^{-7}$	$-5{,}0 \cdot 10^{-2}$
φ (°)	0	$-3{,}859281923235 \cdot 10^{-6}$	$-4{,}50$	$-3{,}8592819 \cdot 10^{-6}$	$-4{,}50$		
ψ (°)	0	$7{,}415884024521 \cdot 10^{-7}$	6,0	$7{,}415884 \cdot 10^{-7}$	6,0		
ϑ (°)	$2{,}0 \cdot 10$	$2{,}000000930410 \cdot 10$	$1{,}60 \cdot 10$	$9{,}304096 \cdot 10^{-6}$	$-4{,}0$	$4{,}652048 \cdot 10^{-7}$	$-2{,}0 \cdot 10^{-1}$

nario, al Geos-C. In questo caso sono stati determinati i parametri orbitali dei due satelliti con precisioni dell'ordine di 10^{-8}, 10^{-9}.

È stato poi impostato il problema della determinazione delle orbite di satelliti extraterrestri e di quelle dei pianeti interessati. Le precisioni raggiunte sono state più che soddisfacenti anche in questo caso.

1. – Illustrazione teorica dei metodi di determinazione dei parametri orbitali

Nei prossimi paragrafi illustreremo dapprima il metodo seguito dal prof. M. Caputo, poi, come faremo notare, vi apporteremo alcune modifiche onde migliorare la precisione del calcolo dei parametri orbitali.

1.1. *L'equazione della distanza osservatore-satellite.*

Il metodo illustrato in « Orbit determinations from range measurements » del prof. Caputo presuppone un confronto fra la distanza rilevata sperimentalmente e quella calcolata teoricamente in funzione dei parametri orbitali stimati a priori, e una successiva applicazione del metodo dei minimi quadrati all'equazione così ottenuta.

Sviluppiamo intanto, come già il prof. Caputo, l'equazione della distanza osservatore-satellite in funzione dei parametri orbitali. Supponiamo dunque che il satellite **P** ruoti su un'orbita ellittica attorno al pianeta **V** e venga osservato da un punto Q del pianeta **T**, ricordando che **T** e **V** ruotano su orbite ellittiche attorno al Sole.

1.2. *Coordinate relative dell'osservatore e del satellite.*

Poiché Q è sulla superficie di un pianeta, le sue coordinate, rispetto al sistema di riferimento cartesiano ortogonale sinistrorso di fig. 1.1, avente, come origine degli assi, il baricentro O_1 del pianeta stesso e, come asse z_1, l'asse di rotazione del pianeta preso con il verso positivo nella direzione della velocità angolare, sono:

$$\begin{cases} X_1 = R_T \sin a \cos(\omega t + \tau) \\ Y_1 = R_T \sin a \sin(\omega t + \tau) \\ Z_1 = R_T \cos a \end{cases} \qquad [1.1]$$

dove R_T è la distanza QO_1, a è la colatitudine di Q, ω la velocità angolare di rotazione e τ può essere posta uguale a zero scegliendo opportunamente la direzione e il verso di x_1.

Essendo **P** in orbita ellittica attorno al pianeta **V**, le sue coordinate rispetto al sistema di riferimento ortogonale sinistrorso $O_2x_2y_2z_2$ (figg. 1-2) dove O_2 è il centro di massa del pianeta **V** e quindi anche fuoco della orbita di **P**, l'asse z_2 è perpendicolare al piano dell'orbita con il verso della velocità angolare di **P** attorno a **V**, l'asse x_2 ha la direzione dell'asse maggiore e il suo verso negativo viene definito dalla posizione dell'altro fuoco F' dell'orbita stessa, l'asse y_2 risulta anch'esso definito essendo il sistema sinistrorso (*), sono

$$\begin{cases} X_2 = a_P (\cos E_P - e_P) \\ Y_2 = a_P (1 - e^2_P)^{1/2} \sin E_P \\ Z_2 = 0 \end{cases} \qquad [1.2]$$

dove a_P è il semiasse maggiore, e_P l'eccentricità, E_P la anomalia eccentrica dell'orbita che ci permette di determinare le coordinate di **P** in funzione del tempo attraverso l'equazione di Keplero:

$$E - e \sin E = n (t - \tau) \qquad [1.3]$$

dove E è l'anomalia eccentrica, e l'eccentricità, $n = 2\pi/T$ con T periodo dell'orbita e τ è l'istante di passaggio al perigeo.

1.3. *Coordinate assolute di* **P** *e di* Q.

Con una serie di successive trasformazioni trasportiamo ora le coordinate di **P** e Q nello stesso sistema di riferimento $Oxyz$, avente come origine il centro di massa del Sole quale fuoco dell'orbita di T.

Essendo le coordinate dell'origine O_1 date dall'equazione dell'orbita ellittica di T rispetto al sistema $Oxyz$:

$$\begin{cases} X_T = a_T (\cos E_T - e_T) \\ Y_T = a_T (1 - e^2_T)^{1/2} \sin E_T \\ Z_T = O \end{cases} \qquad [1.4]$$

le coordinate di Q rispetto allo stesso sistema di riferimento saranno:

$$\begin{cases} X_Q = B_{11} X_1 + B_{12} Y_1 + B_{13} Z_1 + X_T \\ Y_Q = B_{21} X_1 + B_{22} Y_1 + B_{23} Z_1 + Y_T \\ Z_Q = B_{31} X_1 + B_{32} Y_1 + B_{33} Z_1 \end{cases} \qquad [1.5]$$

ricordando che $Z_T = O$ e che le B_{ij} sono i coseni direttori.

(*) Assumeremo sempre questa disposizione degli assi quando prenderemo come origine del sistema di riferimento il fuoco di un'orbita ellittica.

Le coordinate del centro di massa O_2 rispetto al sistema di riferimento $Ox_3y_3z_3$, avente origine nel fuoco dell'orbita di **V**, saranno poi:

$$\begin{cases} X'_V = a_V (\cos E_V - e_V) \\ Y'_V = a_V (1 - e^2_V)^{2/2} \sin E_V \\ Z'_V = 0 \end{cases} \qquad [1.6]$$

Rispetto all'altro sistema di riferimento $Oxyz$ le coordinate saranno allora:

$$\begin{cases} X_V = A_{11}X'_V + A_{12}Y'_V \\ Y_V = A_{21}X'_V + A_{22}Y'_V \\ Z_V = A_{31}X'_V + A_{32}Y'_V \end{cases} \qquad [1.7]$$

dove le A_{ij} sono i coseni direttori.

Le coordinate di P rispetto allo stesso sistema di riferimento saranno quindi

$$\begin{cases} X_P = C_{11}X_2 + C_{12}Y_2 + X_V \\ Y_P = C_{21}X_2 + C_{22}Y_2 + Y_V \\ Z_P = C_{31}X_2 + C_{32}Y_2 + Z_V \end{cases} \qquad [1.8]$$

dove le C_{ji} sono i coseni direttori (*).

1.4. *L'equazione della distanza.*

Abbiamo ora le coordinate dei punti **P** e Q nello stesso sistema di riferimento in funzione di R_T, ω, a, φ_T, ψ_T, ϑ_T, a_P, e_P, n_P, τ_P, φ_P, ψ_P, ϑ_P, a_V, e_V, n_V, τ_V, φ_V, ψ_V, ϑ_V, a_T, e_T, n_T, τ_T, e del tempo t ed essendo l'equazione della distanza fra due punti **P** e Q:

$$\overline{PQ}^2 = (X_P - X_Q)^2 + (Y_P - Y_Q)^2 + (Z_P - Z_Q)^2 \qquad [1.9]$$

per sostituzione si ottiene:

$$\begin{aligned} \overline{PQ}^2 = {} & X_1 + X_2 \cos E_P + X_3 \sin E_P + X_4 \cos^2 E_P + \\ & + X_5 \cos E_T + X_6 \sin E_T + X_7 \cos^2 E_T + X_8 \cos E_V + \\ & + X_9 \sin E_V + X_{10} \cos^2 E_V + X_{11} \cos E_P \cos E_T + \end{aligned}$$

(*) Ricordiamo che fra i coseni direttori esistono 6 relazioni che riducono a 3 le variabili indipendenti per ogni trasformazione di coordinate e che da queste si possono ricavare le equazioni dei coseni direttori in funzione degli angoli di Eulero φ, ψ, ϑ (v. fig. 1.3).

$$
\begin{aligned}
&+ X_{12} \sin E_P \cos E_T + X_{13} \cos E_P \sin E_T + \\
&+ X_{14} \sin E_P \sin E_T + X_{15} \cos E_P \cos E_V + \\
&+ X_{16} \sin E_P \cos E_V + X_{17} \cos E_P \sin E_V + \\
&+ X_{18} \sin E_P \sin E_V + X_{19} \cos E_V \cos E_T + \\
&+ X_{20} \sin E_V \cos E_T + X_{21} \cos E_V \sin E_T + \\
&+ X_{22} \sin E_V \sin E_T + X_{23} \cos \omega t + X_{24} \sin \omega t + \\
&+ X_{25} \cos E_P \cos \omega t + X_{26} \sin E_P \cos \omega t + \\
&+ X_{27} \cos E_P \sin \omega t + X_{28} \sin E_P \sin \omega t + \\
&+ X_{29} \cos E_T \cos \omega t + X_{30} \sin E_T \cos \omega t + \\
&+ X_{31} \cos E_T \sin \omega t + X_{32} \sin E_T \sin \omega t + \\
&+ X_{33} \cos E_V \cos \omega t + X_{34} \sin E_V \cos \omega t + \\
&+ X_{35} \cos E_V \sin \omega t + X_{36} \sin E_V \sin \omega t.
\end{aligned}
\qquad [1.10]
$$

in cui la dipendenza della distanza dal tempo è data oltre che dal fattore t, anche da E_P, E_T ed E_V, funzioni del tempo secondo l'equazione di Keplero, e le equazioni complete dei parametri complessivi x_m (con $m = 1, 2, \ldots, 36$) in funzione dei parametri orbitali sono riportate nella eq. A.1 di Appendice.

2.1. Determinazione dei parametri complessivi applicando il metodo dei minimi quadrati all'equazione della distanza.

Poiché la distanza fra **P** e Q può essere ottenuta sperimentalmente a mezzo laser in modo molto più preciso di quanto ci possano permettere i valori stimati a priori dei parametri orbitali approssimati, si può supporre che l'errore effettuato nel calcolo della distanza sia dovuto soltanto agli errori dei parametri complessivi x_m (con $m = 1, 2, \ldots, 36$) e a quelli delle anomalie eccentriche, in quanto funzioni dei parametri ornitali approssimati.

Chiamata quindi Δd^2_j la differenza fra il quadrato della distanza misurata ad un certo istante t_j e il quadrato di quella calcolata nel medesimo istante, possiamo scrivere la eq. A.2. di Appendice in cui si è differenziata la eq. [1.10] rispetto a E_P, E_T, E_V, ω, ed ai parametri complessivi x_m.

Scrivendo poi le equazioni di Keplero per le orbite ellittiche di **P**, **T** e **V** nella forma seguente:

$$
\begin{aligned}
E_P - X_{K1} \sin E_P &= X_{K2} t + X_{K3} \\
E_T - X_{K4} \sin E_T &= X_{K5} t + X_{K6} \\
E_V - X_{K7} \sin E_V &= X_{K8} t + X_{K9}
\end{aligned}
\qquad [2.1]
$$

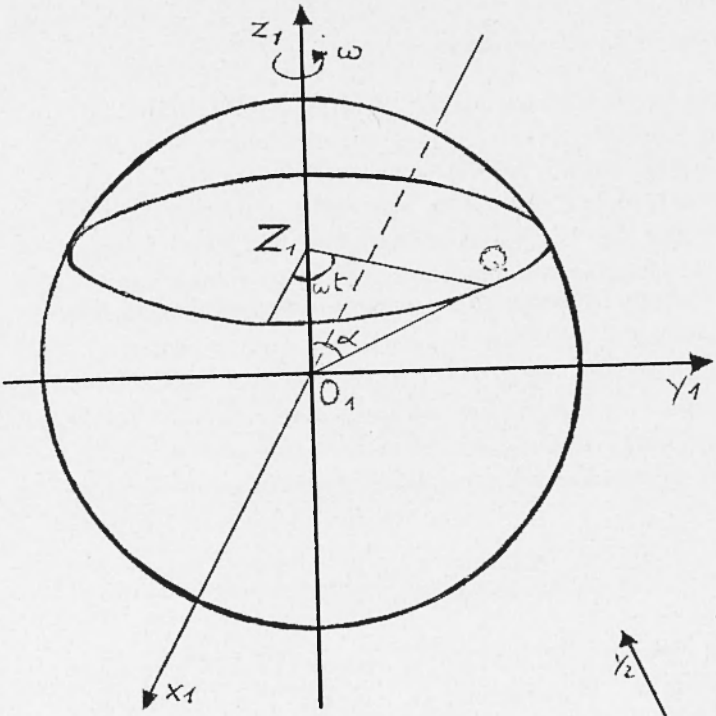

Fig. 1.1

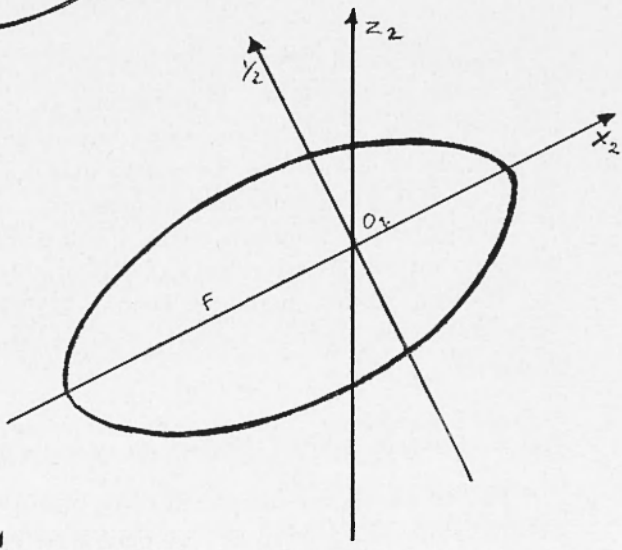

Fig. 1.2

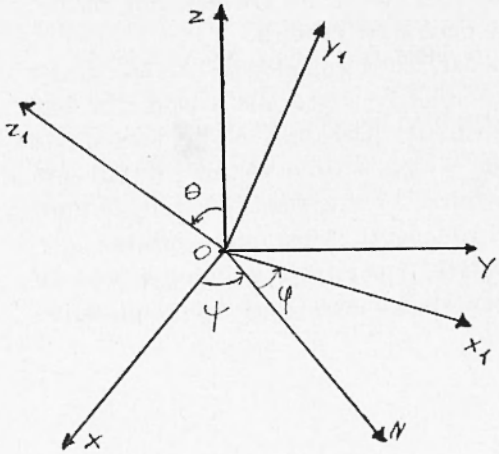

Fig. 1.3

dove

$$
\begin{aligned}
X_{K1} &= e_P;\ X_{K2} = n_P;\ X_{K3} = -n_P\tau_P;\\
X_{K4} &= e_T;\ X_{K5} = n_T;\ X_{K6} = -n_T\tau_T;\\
X_{K7} &= e_V;\ X_{K8} = n_V;\ X_{K9} = -n_V\tau_V
\end{aligned}
\qquad [2.2]
$$

le variazioni delle anomalie eccentriche possono essere scritte in funzione degli errori della x_{Kn} (con $n = 1, 2, \ldots, 9$):

$$
\begin{aligned}
\Delta E_{Pj} &= \frac{\sin E_{Pj}\,\Delta X_{K1} + t_j\Delta X_{K2} + \Delta X_{K3}}{1 - X_{K1}\cos E_{Pj}}\\
\Delta E_{Tj} &= \frac{\sin E_{Tj}\,\Delta X_{K4} + t_j\Delta X_{K5} + \Delta X_{K6}}{1 - X_{K4}\cos E_{Tj}}\\
\Delta E_{Vj} &= \frac{\sin E_{Vj}\,\Delta X_{K7} + t_j\Delta X_{K8} + \Delta X_{K9}}{1 - X_{K7}\cos E_{Vj}}
\end{aligned}
\qquad [2.3]
$$

Sostituendo le eq. [2.3] nella eq. [A.2] si ottiene che Δd^2_j è funzione degli errori di 46 (36+1+9) parametri (x_m, ω, x_{kn}) i cui coefficienti, come si vede chiaramente, sono linearmente indipendenti. Perciò, effettuando un numero di rilevazioni maggiore di 46, si può applicare all'eq. [A.2] il metodo dei minimi quadrati.

Correggendo, in questo modo, i valori dei parametri complessivi, possiamo ridurre gli errori nel calcolo della distanza.

Risultati ancora migliori si possono ottenere utilizzando più volte, successivamente, questo metodo, come vedremo operativamente nei paragrafi 3.2. e 3.5.

2.2. *I parametri orbitali ricavati da quelli complessivi.*

Dai 46 parametri complessivi così ottenuti è ora possibile risalire ad un valore più preciso dei 24 parametri orbitali.

Unendo le 36 equazioni dei parametri complessivi x_m (eq. [A.1]) alle 9 equazioni dei parametri complessivi x_{kn} e alle 6 equazioni che legano i coseni direttori otteniamo infatti un sistema di 51 equazioni; da queste, poiché il parametro orbitale ω è già stato ottenuto direttamente nella Eq. [A.2], ci è sufficiente estrarre 23 equazioni linearmente indipendenti per ricavare i valori dei rimanenti 23 parametri orbitali.

Si deve tener presente che, poiché i parametri orbitali si possono ottenere da gruppi diversi di equazioni, anche i loro valori potranno essere leggermente diversi.

Poiché l'errore di ogni singolo parametro complessivo è funzione degli errori dei parametri orbitali da cui dipende, possiamo differenziare le equazioni dei parametri complessivi rispetto ai parametri orbitali ottenendo, dopo aver posto uguali a zero, in ogni singola equazione, i coefficienti dei parametri orbitali che non vi compaiono, un sistema la cui matrice ha tutte le colonne e almeno 24 righe linearmente indipendenti (*).

A tale sistema possiamo ora applicare il metodo dei minimi quadrati, dopo aver bilanciato i pesi delle varie equazioni, ottenendo i valori delle correzioni da apportare ai parametri orbitali iniziali.

Il metodo sarà poi applicabile più volte, ottenendo così valori più esatti di quanto non possa la semplice risoluzione di uno dei possibili sistemi.

2.3. *Determinazione diretta dei parametri orbitali.*

L'applicazione del metodo dei minimi quadrati dapprima all'equazione della distanza in funzione dei parametri complessivi e successivamente al sistema dei parametri complessivi in funzione dei parametri orbitali è equivalente all'applicazione di tale metodo all'equazione della distanza differenziata direttamente rispetto ai parametri orbitali.

Esporremo qui di seguito questo nuovo metodo e la sua giustificazione teorica.

Sostituendo, infatti, nella Eq. [A.2] le equazioni dei parametri complessivi differenziati rispetto ai parametri orbitali, otteniamo l'errore della distanza direttamente in funzione degli errori dei parametri orbitali.

Raccogliendo poi rispetto alla variazione dei parametri orbitali si ottiene un'equazione di condizione per i minimi quadrati in cui i coefficienti sono una combinazione lineare dei coefficienti dei parametri complessivi che, come abbiamo visto, sono linearmente indipendenti.

I coefficienti delle variazioni dei parametri orbitali sono perciò originati dal prodotto colonne per righe della matrice $24 \cdot 36$ del sistema dei parametri complessivi, differenziati rispetto ai parametri orbitali, per una matrice riga i cui 36 elementi sono dei vettori linearmente indipendenti, corrispondendo ai coefficienti dei parametri complessivi.

(*) Tale condizione di lineare indipendenza corrisponde infatti alla risolubilità del sistema di 52 equazioni che assicura alla matrice un rango $k = 24$.

Poiché, come abbiamo visto, la matrice 24·36 ha rango 24, i 24 vettori ottenuti sono anch'essi linearmente indipendenti. È perciò possibile applicare il metodo dei minimi quadrati.

In questo paragrafo svilupperemo la differenziazione dell'equazione della distanza direttamente dalla eq. [1.9] e non per sostituzione del sistema nella eq. [A.2], ottenendo una forma più compatta e versatile della equazione di condizione.

Differenziando la eq. [1.9] rispetto alle coordinate di **P** e Q possiamo scrivere:

$$\begin{aligned}\Delta d^2/_2 = {} & (X_P - X_Q)\,\Delta X_P + (Y_P - Y_Q)\,\Delta Y_P + (Z_P - Z_Q)\,\Delta Z_P + \\ & + (X_Q - X_P)\,\Delta X_Q + (Y_Q - Y_P)\,\Delta Y_Q + (Z_Q - Z_P)\,\Delta Z_Q \qquad [2.4]\end{aligned}$$

Differenziando le equazioni delle coordinate di P e di Q otteniamo:

$$\left\{\begin{aligned}\Delta X_P &= C_{11}\Delta X_2 + C_{12}\Delta Y_2 + \Delta X_V + X_2\Delta C_{11} + Y_2\Delta C_{12} \\ \Delta Y_P &= C_{21}\Delta X_2 + C_{22}\Delta Y_2 + \Delta Y_V + X_2\Delta C_{21} + Y_2\Delta C_{22} \\ \Delta Z_P &= C_{31}\Delta X_2 + C_{32}\Delta Y_2 + \Delta Z_V + X_2\Delta C_{31} + Y_2\Delta C_{32}\end{aligned}\right. \qquad [2.5]$$

$$\left\{\begin{aligned}\Delta X_Q &= B_{11}\Delta X_1 + B_{12}\Delta Y_1 + B_{13}\Delta Z_1 + \Delta X_T + X_1\Delta B_{11} + \\ &\quad + Y_1\Delta B_{12} + Z_1\Delta B_{13} \\ \Delta H_Q &= B_{21}\Delta X_1 + B_{22}\Delta Y_1 + B_{23}\Delta Z_1 + \Delta Y_T + X_1\Delta B_{21} + \\ &\quad + Y_1\Delta B_{22} + Z_1\Delta B_{23} \\ \Delta Z_Q &= B_{31}\Delta X_1 + B_{32}\Delta Y_1 + B_{33}\Delta Z_1 + \Delta Z_T + X_1\Delta B_{31} + \\ &\quad + Y_1\Delta B_{32} + Z_1\Delta B_{33}\end{aligned}\right. \qquad [2.6]$$

dove

$$\left\{\begin{aligned}\Delta X_2 &= (\cos E_P - e_P)\,\Delta a_P - a_P \sin E_P\Delta E_P - a_P\Delta e_P \\ \Delta Y_2 &= (1 - e^2{}_P)^{1/2} \sin E_P\Delta a_P + a_P\,(1 - e^2{}_P)^{1/2} \cos E_P\Delta E_P + \\ &\quad - a_P e_P\,(1 - e^2{}_P)^{1/2} \sin E_P\Delta e_P\end{aligned}\right. \qquad [2.7]$$

$$\left\{\begin{aligned}\Delta X_1 &= \sin a \cos \omega t\ \Delta R_T + R_T \cos \omega t \cos a\Delta a + \\ &\quad - t\,R_T \sin a \sin \omega t\Delta\omega \\ \Delta Y_1 &= \sin a \sin \omega t\ \Delta R_T + R_T \sin \omega t \cos a\Delta a + \\ &\quad + tR_T \sin a \cos \omega t\ \Delta\omega \\ \Delta Z_1 &= \cos a\ \Delta R_T - R_T \sin a\ \Delta a\end{aligned}\right. \qquad [2.8]$$

$$\left\{\begin{aligned} \Delta X_T &= (\cos E_T - e_T)\,\Delta a_T - a_T \sin E_T \Delta E_T - a_T \Delta E_T \\ \Delta Y_T &= (1 - e^2{}_T)^{1/2} \sin E_T \Delta a_T + a_T (1 - e^2{}_T)^{1/2} \cos E_T \Delta E_T + \\ &- a_T e_T \end{aligned}\right. \qquad [2.9]$$

ed ancora

$$\left\{\begin{aligned} \Delta X_V &= A_{11}\Delta X'_V + A_{12}\Delta Y'_V + X'_V \Delta A_{11} + Y'_V \Delta A_{12} \\ \Delta Y_V &= A_{21}\Delta X'_V + A_{22}\Delta Y'_V + X'_V \Delta A_{21} + Y'_V \Delta A_{22} \\ \Delta Z_V &= A_{31}\Delta X'_V + A_{32}\Delta Y'_V + X'_V \Delta A_{31} + Y'_V \Delta A_{32} \end{aligned}\right. \qquad [2.10]$$

in cui

$$\left\{\begin{aligned} \Delta X'_V &= (\cos E_V - e_V)\,\Delta a_V - a_V \sin E_V \Delta E_V - a_V \Delta e_V \\ \Delta Y'_V &= (1 - e^2{}_V)^{1/2} \sin E_V \Delta a_V + a_V (1 - e^2{}_V)^{1/2} \cos E_V \Delta E_V + \\ &- a_V e_V (1 - e^2{}_V)^{1/2} \sin E_V \Delta e_V \end{aligned}\right. \qquad [2.11]$$

e, tenendo presente l'equazione di Keplero,

$$\left\{\begin{aligned} \Delta E_P &= \frac{(t - \tau_P)\,\Delta n_P - n_P \Delta \tau_P + \sin E_P \Delta e_P}{1 - e_P \cos E_P} \\ \Delta E_T &= \frac{(t - \tau_T)\,\Delta n_T - n_T \Delta \tau_T + \sin E_T \Delta e_T}{1 - e_T \cos E_T} \\ \Delta E_V &= \frac{(t - \tau_V)\,\Delta n_V - n_V \Delta \tau_V + \sin E_V \Delta e_V}{1 - e_V \cos E_V} \end{aligned}\right. \qquad [2.12]$$

Ricordando che i coseni direttori A_{ij}, B_{ij}, C_{ij} sono a loro volta funzioni dei rispettivi angoli di Eulero, potremo anche scrivere, per le variazioni di generici coseni direttori m_{ij}, le equazioni

$$\begin{aligned} \Delta m_{11} &= m_{12}\Delta\varphi - m_{21}\Delta\psi + m_{31} \sin \psi \Delta\vartheta \\ \Delta m_{12} &= -m_{11}\Delta\varphi - m_{22}\Delta\psi + m_{32} \sin \psi \Delta\vartheta \\ \Delta m_{13} &= -m_{23}\Delta\psi + \cos \vartheta \sin \psi \Delta\vartheta \\ \Delta m_{21} &= m_{22}\Delta\varphi + m_{11}\Delta\psi - m_{31} \cos \psi \Delta\vartheta \\ \Delta m_{22} &= -m_{21}\Delta\varphi + m_{12}\Delta\psi - m_{32} \cos \psi \Delta\vartheta \\ \Delta m_{23} &= m_{13}\Delta\psi - \cos \vartheta \cos \psi \Delta\vartheta \\ \Delta m_{31} &= m_{32}\Delta\varphi + \sin \varphi \cos \vartheta \Delta\vartheta \\ \Delta m_{32} &= -m_{31}\Delta\varphi + \cos \vartheta \cos \varphi \Delta\vartheta \\ \Delta m_{33} &= -\sin \vartheta \Delta\vartheta \end{aligned} \qquad [2.13]$$

che, adattate ai coseni direttori A_{ij}, B_{ij}, C_{ij}, ci danno la loro dipendenza dai corrispondenti angoli di Eulero.

Sostituendo tutte queste equazioni, successivamente, nella eq. [2.4] otteniamo la eq. [A.3] in cui l'errore del quadrato della distanza è espresso in funzione degli errori dei 24 parametri orbitali.

Effettuando un numero di misure superiore a 24, numero dei parametri orbitali, e applicando più volte il metodo dei minimi quadrati si dovrebbero ottenere, per i nostri parametri, dei valori molto precisi.

La differenza fondamentale fra il metodo illustrato nei paragrafi 2.1 e 2.2 e questo metodo sta nel numero minimo di equazioni necessarie: nel primo caso occorrono almeno 47 rilevazioni essendo 46 il numero dei parametri complessivi, nel secondo ne bastano 25 essendo 24 il numero dei parametri orbitali.

Per un numero di rilevazioni maggiore o uguale a 47 i risultati dovrebbero coincidere, entro il limite di precisione dell'elaboratore elettronico.

2.4. *Determinazione dei parametri applicando il metodo dei minimi quadrati ad un sistema globale.*

Invece di sostituire nelle equazioni della distanza differenziate (eq. [A.2] o eq. [A.3]) le 3 equazioni delle variazioni delle anomalie eccentriche (eq. [2.3] o eq. [2.13]) possiamo determinare i parametri applicando il metodo dei minimi quadrati al sistema generato dalle 4 equazioni di condizione e quindi formato da $4n$ equazioni, dove n è il numero di osservazioni.

Dobbiamo notare che, in questo modo (*), le anomalie eccentriche non sono più funzioni dei parametri orbitali e del tempo ma assumono anch'esse il ruolo di incognite. Il numero delle incognite sarà dunque dato dal numero di parametri incogniti più $3n$, essendo $3n$ il numero delle anomalie eccentriche incognite per n osservazioni.

Per scrivere la matrice di risoluzione del sistema, porremo, ovviamente, uguali a zero i coefficienti delle incognite che pur comparendo nelle altre equazioni non compaiano in quella presa in esame.

Le uniche quantità che legano assieme la prima equazione alle altre tre saranno perciò: nel caso della risoluzione del sistema in funzione delle variazioni dei parametri orbitali, i coefficienti delle variazioni

(*) La questione è stata trattata in modo molto più ampio nell'articolo sopracitato del prof. Caputo.

delle anomalie eccentriche e delle eccentricità e, nel caso dei parametri complessivi, il solo coefficiente delle variazioni delle anomalie eccentriche.

Per una corretta applicazione del metodo dei minimi quadrati a questo sistema bisogna ricordare che le quattro equazioni di condizione hanno precisioni differenti e quindi pesi fra loro diversi. Bisogna perciò moltiplicare ogni equazione per la radice quadrata del rispettivo peso, in modo da ridurre tutti i residui allo stesso peso.

3. – Elaborazione dei dati e precisioni ottenute

Vogliamo ora stimare quale precisione si possa ottenere nella determinazione dei parametri orbitali dei satelliti con l'applicazione dei metodi illustrati ed anche quale di essi risulti il migliore sia per la precisione ottenuta sia per la versatilità e il tempo di elaborazione del programma.

3.1. *Satellite terrestre osservato da una stazione terrestre.*

Con i prossimi paragrafi, in relazione al prossimo lancio del Geos-C ed anche per la minor complessità delle equazioni, abbiamo voluto analizzare il caso dell'osservatore sulla superficie della Terra e del satellite terrestre.

3.2. *Applicazione del metodo di correzione diretta dei parametri orbitali.*

Si possono facilmente ricavare l'equazione della distanza e l'equazione di condizione, a cui applicare il metodo dei minimi quadrati, dalle Eq. [1.9] e Eq. [A.3] supponendo che V coincida con T e quindi $a_V = a_T$; $e_V = e_T$; $T_V = T_T$; $\tau_V = \tau_T$; $\varphi_V = \psi_V = \vartheta_V = O$ perciò $A_{11} = A_{22} = A_{33} = 1$ e $A_{21} = A_{31} = A_{12} = A_{32} = A_{13} = A_{23} = O$.

I coefficienti delle variazioni dei parametri orbitali di T e V, sotto queste condizioni, si annullano l'un l'altro; in effetti, nel caso di un satellite terrestre, non ha alcuna importanza l'orbita percorsa dalla Terra attorno al Sole. Restano, di conseguenza, da determinare 10 parametri a_P, e_P, n_P, τ_P, φ_P, ψ_P, ϑ_P, R_T, a, ω.

Ricavate queste equazioni abbiamo impostato un programma per l'leboratore elettronico che simulava le misurazioni di distanza e applicava il metodo dei minimi quadrati al sistema generato dalla equazione di condizione.

Per fare questo abbiamo supposto che la stazione terrestre si trovasse a 45° di latitudine Nord e ad una distanza di $6.37102 \cdot 10^8$ cm dal centro della Terra ma che la sua posizione fosse conosciuta con un errore di 2′ sulla latitudine e di 1 km sulla distanza dal centro di massa. Il periodo di rotazione terrestre, e quindi la velocità angolare ω, è stato considerato noto:

$$T = 23^h\ 56'4'',1.$$

Si è poi scelto un satellite avente un periodo di 7^h e il cui piano orbitale fosse inclinato di 20° rispetto a quello equatoriale (*).

Sulla base di questi dati abbiamo calcolato le distanze vere osservatore-satellite in vari istanti e attribuito a questi valori degli errori assoluti da 0 a 1 m per renderli attendibili come misure sperimentali.

Si sono poi assegnati ai parametri orbitali i valori approssimati di Tab. 3.1 e si è costruito in base a questi valori il sistema generato dalla equazione di condizione.

Supponendo di aver effettuato 50 misure negli istanti in cui l'anomalia eccentrica di P assume i valori $E_{Pj} = j$ (con $j = 1, 2, \ldots, 50$), si sono ottenuti i valori corretti di Tab. 3.1. Come si vede la precisione dei risultati è indubbiamente notevole essendo esatte in media le prime 8 cifre. Si ottengono, ad esempio, errori di soli 47 cm sulla distanza osservatore-centro della Terra e di 20 cm sul semiasse dell'orbita del satellite P.

Viste le precisioni ottenute, abbiamo voluto calcolare anche la distanza, nei vari istanti, fra la posizione del satellite vero e quella del satellite virtuale: la distanza massima rilevata è stata di 3,18 m.

Un'ultima osservazione è importante soprattutto per le future applicazioni in tempo reale: i risultati raggiungono la massima precisione quando lo scarto quadratico medio, calcolato ad ogni iterazione, si stabilizza su un valore minimo. Questo ci permetterà di decidere quante iterazioni effettuare per ottenere la precisione maggiore.

3.3. *Determinazione dei parametri orbitali con misure effettuate su archi di orbita.*

Finora abbiamo supposto che l'orbita rimanesse costante al variare del tempo e che quindi si potessero effettuare rilevazioni su un numero indefinito di orbite. Questo però non è affatto vero: proprio a

(*) Gli altri dati sono rilevabili dalla Tab. 3.1.

causa di quelle variazioni del campo gravitazionale che a noi preme rilevare, i parametri variano, sia pure di poco, in modo continuo.

L'analisi dei dati è stata perciò fatta prendendo in esame gruppi di rilevazioni effettuate su archi di orbite di 135°, 90°, 45°, 30°, 22,5°.

Per simulare le misure di cui, in questo paragrafo, esporremo l'elaborazione, abbiamo inoltre supposto di conoscere con precisione le coordinate della stazione osservante in quanto la durata delle osservazioni è piuttosto breve rispetto al periodo di rotazione terrestre e quindi l'osservatore compie uno spostamento tanto breve che il sistema non riesce a determinare con sufficiente precisione i valori dei parametri orbitali (ovverosia delle coordinate) dell'osservatore.

Con rilevazioni su archi di orbita della medesima ampiezza si riuscirebbe a correggere i dati della stazione osservante solo se il satellite avesse un periodo maggiore di 24^h: ciò darebbe modo all'osservatore di descrivere un arco almeno dello stesso ordine di quello del satellite e quindi anche la precisione sarebbe dell'ordine di quella ottenuta per i parametri del satellite. Il satellite sarebbe però, in questo caso, troppo alto per essere utile nelle rilevazioni geodetiche.

I valori dei parametri orbitali del satellite ottenuti simulando rilevazioni su archi di orbita di 135° raggiungono precisioni notevoli: si ha un errore di 2,85 m sul semiasse e di 0,02 sec sul periodo che, essendo i valori dei parametri gli stessi di Tab. 3.1, corrispondono ad errori percentuali dell'ordine di 10^{-6}. Nei casi successivi la precisione diminuisce con l'ampiezza degli archi; gli errori percentuali diventano infatti dell'ordine di 10^{-5} con rilevazioni su 90°, 10^{-4} su 45°, 10^{-3} 30° e 10^{-2} su 22,5°. In quest'ultimo caso gli errori sono, su alcuni parametri calcolati, addirittura maggiori di quelli sui parametri approssimati iniziali.

Tenendo però presente che ad ogni passaggio del satellite si possono effettuare misure laser finché esso si trova all'interno di un angolo zenitale di 65°, i risultati ottenuti mostrano quale ottima precisione sia ad ogni modo raggiungibile nella determinazione dei parametri orbitali.

3.4. *Confronto dei due metodi di elaborazione dei dati.*

Poiché i risultati ottenuti col metodo di correzione diretta dei parametri orbitali erano ottimi, si è preso in esame per un confronto anche l'altro metodo di elaborazione dei dati che dapprima corregge i parametri complessivi e poi da essi ricava quelli orbitali.

TABELLA 3.2.

Metodo di correzione dei parametri complessivi

Parametri complessivi	Valore vero	Errore assoluto iniz.	Errori assoluti finali dei parametri complessivi		
			correzione parametri complessivi (50 rilevazioni)	Correzione parametri complessivi (17 rilevazioni)	Correzione parametri complessivi con sistema di due equazioni (17 rilevazioni)
X_1	$1{,}92860928149 \cdot 10^{18}$	$5{,}56579331 \cdot 10^{15}$	$4{,}57 \cdot 10^{9}$	$5{,}897407 \cdot 10^{10}$	$5{,}897407 \cdot 10^{10}$
X_2	$-3{,}71554550750 \cdot 10^{8}$	$1{,}81349131632 \cdot 10^{16}$	$1{,}26662507256 \cdot 10^{11}$	$2{,}94822235395 \cdot 10^{11}$	$2{,}948222826749 \cdot 10^{11}$
X_3	$-2{,}80461892959 \cdot 10^{17}$	$5{,}2643014215 \cdot 10^{16}$	$-2{,}8375 \cdot 10^{10}$	$-2{,}745611 \cdot 10^{11}$	$-2{,}745611 \cdot 10^{11}$
X_4	$6{,}90263920914 \cdot 10^{16}$	$-3{,}00140444507 \cdot 10^{16}$	$1{,}41138 \cdot 10^{10}$	$4{,}030610 \cdot 10^{10}$	$4{,}030610 \cdot 10^{10}$
X_5	$1{,}67385007251 \cdot 10^{17}$	$-4{,}1537738067 \cdot 10^{16}$	$3{,}6016 \cdot 10^{10}$	$-5{,}25224 \cdot 10^{10}$	$-5{,}25224 \cdot 10^{10}$
X_6	0	$3{,}67712709423 \cdot 10^{15}$	$3{,}72188170277 \cdot 10^{10}$	$1{,}36107505787 \cdot 10^{11}$	$1{,}36107513049 \cdot 10^{11}$
X_7	0	$1{,}83771800301 \cdot 10^{16}$	$-4{,}43731253119 \cdot 10^{11}$	$-3{,}19451424340 \cdot 10^{11}$	$-3{,}19451435149 \cdot 10^{11}$
X_8	$-7{,}70562717923 \cdot 10^{17}$	$-2{,}7311007374 \cdot 10^{16}$	$3{,}8621 \cdot 10^{10}$	$-7{,}871043 \cdot 10^{10}$	$-7{,}871043 \cdot 10^{10}$
X_9	$-8{,}36925036254 \cdot 10^{17}$	$-2{,}056758304 \cdot 10^{15}$	$3{,}5211 \cdot 10^{10}$	$1{,}34202224640 \cdot 10^{11}$	$1{,}3420222 \cdot 10^{11}$
X_{10}	0	$-2{,}45141806282 \cdot 10^{16}$	$3{,}66976411914 \cdot 10^{11}$	$5{,}86855184439 \cdot 10^{11}$	$5{,}86855197916 \cdot 10^{11}$
X_{11}	$2{,}0 \cdot 10^{-1}$	$-5{,}0 \cdot 10^{-2}$	$-9{,}4845 \cdot 10^{-8}$	$5{,}88454 \cdot 10^{-9}$	$5{,}88454 \cdot 10^{-9}$
X_{12}	$2{,}49332750285 \cdot 10^{-4}$	$-8{,}87305161 \cdot 10^{-7}$	$-9{,}49 \cdot 10^{-13}$	$-1{,}6087995 \cdot 10^{-11}$	$-1{,}6087995 \cdot 10^{-11}$
X_{13}	$-8{,}97597901026 \cdot 10^{-1}$	$4{,}7914478702 \cdot 10^{-2}$	$6{,}41312 \cdot 10^{-7}$	$1{,}2662448 \cdot 10^{-6}$	$1{,}2662448 \cdot 10^{-6}$

Abbiamo perciò preparato un nuovo programma che applicasse il metodo descritto nel paragrafo 2.1.

Poiché, in questo caso T coincide con V e ricordando quanto detto nel paragrafo 3.2, la equazione della distanza può essere scritta, trasformando la Eq. [1.10].

$$\begin{aligned}\overline{PQ}^2 &= x_1 + x_2 \cos E + x_3 \sin E + x_4 \cos^2 E + x_5 \sin \omega t + \\ &+ x_6 \cos \omega t + x_7 \sin E \sin \omega t + x_8 \sin E \cos \omega t + \\ &+ x_9 \cos E \sin \omega t + x_{10} \cos E \cos \omega t. \end{aligned} \qquad [3.1]$$

dove

$$\begin{aligned} X_1 &= R_T^2 + a^2 + 2R_T C_{31} \cos \alpha ae \\ X_2 &= -2ae - 2R_T a C_{31} \cos \alpha \\ X_3 &= -2\, R_T\, a C_{32}\, (1 - e^2)^{1/2} \cos \alpha \\ X_4 &= a^2 e^2 \\ X_5 &= 2C_{21} R_T ae \sin \alpha \\ X_6 &= 2C_{11} R_T ae \sin \alpha \\ X_7 &= -2C_{22} R_T a\, (1 - e^2)^{1/2} \sin \alpha \\ X_8 &= -2C_{12} R_T a\, (1 - e^2)^{1/2} \sin \alpha \\ X_9 &= -2C_{21} R_T a \sin \alpha \\ X_{10} &= -2C_{11} R_T a \sin \alpha \end{aligned} \qquad [3.2]$$

Differenziamo questa equazione rispetto a x_j (con $j = 1, 2, \ldots, 13$), a ω, e a E

$$\begin{aligned}\Delta\overline{PQ}^2 &= \Delta x_1 + \cos E \Delta x_2 + \sin E \Delta x_3 + \cos^2 E \Delta x_4 + \\ &+ \sin \omega t \Delta x_5 + \cos \omega t\, \Delta x_6 + \sin E \sin \omega t \Delta x_7 + \\ &+ \sin E \cos \omega t\, \Delta x_8 + \cos E \sin \omega t\, \Delta x_9 + \cos E \cos \omega t\, \Delta x_{10} + \\ &+ (- x_2 \sin E + x_3 \cos E - 2x_4 \sin E \cos E + x_7 \sin \omega t \cos E + \\ &+ x_8 \cos \omega t \cos E - x_9 \sin \omega t \sin E - x_{10} \cos \omega t \sin E)\, \Delta E + \\ &+ (x_5 \cos \omega t - x_6 \sin \omega t + x_7 \sin E \cos \omega t + \\ &- x_8 \sin E \sin \omega t + x_9 \cos E \cos \omega t + \\ &- x_{10} \cos E \sin \omega t) t \Delta \omega \end{aligned} \qquad [3.3]$$

e sostituendo nella Eq. [3.3] a ΔE il valore ricavato dalla differenziazione della equazione di Keplero

$$\begin{aligned} E - x_{11} \sin E - x_{12} t - x_{13} &= \sin E\, \Delta x_{11} + t \Delta x_{12} + \Delta x_{13} + \\ &+ (x_{11} \cos E - 1)\, \Delta E \end{aligned} \qquad [3.4]$$

dove

$$X_{11} = e$$
$$X_{12} = n$$
$$X_{13} = -n\tau$$

si giunge alla equazione di condizione del metodo dei minimi quadrati.

Si è poi elaborato, sulla base di queste equazioni, il gruppo di misure già determinate nel paragrafo 3.3 ottenendo così i valori dei parametri complessivi riportati in Tab. 3.2.

Bisogna notare che gli errori percentualmente rilevanti dei parametri x_2, x_6, x_7, x_{10} sono dovuti ai particolari valori di φ_P e ψ_P che essendo uguali a zero rendono nulli i valori di C_{12}, C_{13}, C_{21}, C_{31} e quindi anche quantità rilevanti dei parametri stessi.

Risolviamo ora il sistema delle x_j (con $j = 1, 2, \ldots, 13$) per ricavarne i valori dei parametri orbitali. Dalle prime 10 equazioni possiamo ottenere

$$e = -x_5/x_9$$
$$a = -x_9 \sqrt{x_4/x_5}$$

inoltre tre relazioni fra i coseni direttori

$$C_{21}/C_{11} = x_9/x_{10}$$
$$C_{22}/C_{12} = x_7/x_8$$
$$C_{31}/C_{32} = (x_2 + 2ae)\ (1-e^2)^{1/2}/x_3$$

che messe a sistema con le Eq. [1.10] ci permettono di conoscere tutti i coseni direttori e quindi i tre angoli di Eulero che, a meno di 180° sono perciò

$$\varphi = \operatorname{arctg}\ (C_{31}/C_{32})$$
$$\psi = \operatorname{arctg}\ (-\ C_{13}/C_{23})$$
$$\vartheta - \operatorname{arctg}\ (C_{32}/C_{33} \cos \varphi)$$

Possiamo poi ottenere a ad esempio da x_7 e x_3

$$= \operatorname{arctg}\ (x_7 C_{32}/x_3 C_{12})$$

R_T da x_1

$$R_T = -\ C_{31} \cos a\ ae \pm \sqrt{C_{31} \cos^2 a\ a^2e^2 - (a^2 - x_1)}$$

e da x_{12} e x_{13}

$$n = x_{12}$$
$$\tau = - x_{13}/n$$

Sostituendo in queste equazioni i valori dei parametri complessivi si ottengono i parametri orbitali.

Bisogna ricordare che avendo delle equazioni di grado superiore al primo dovremo scegliere le radici più vicine ai valori iniziali dei parametri.

Abbiamo riportato in Tab. 3.3 gli scarti dal valore vero. Si può notare come, tranne T, tutti i parametri ricavati dal sistema delle x_j siano meno precisi dei valori ottenuti con la correzione diretta dei parametri orbitali e tutto questo nonostante che lo scarto quadratico medio finale fosse minore di un ordine di grandezza (10^{10} invece di 10^{11}) nel caso della correzione dei parametri complessivi.

Si può notare ancora che e si ottiene anche in modo diretto da x_{11} con uno scarto del valore vero di $-7{,}9954 \cdot 10^{-9}$. Il confronto di questo valore con gli scarti corrispondenti di Tab. 3.3 può probabilmente confortare l'ipotesi di una corrispondenza fra il metodo di correzione diretta dei parametri orbitali e quello dei parametri complessivi quando al sistema venga applicato nuovamente il metodo dei minimi quadrati.

3.5. *Altre prove e scelta del metodo ottimale.*

Un altro vantaggio del metodo di correzione diretta dei parametri orbitali è quello di dare relativamente buoni risultati anche con solo 10 misure, avendo considerato noto ω, mentre l'altro metodo necessita di un minimo di 14 misure.

È stata perciò effettuata una prova anche per verificare questa proprietà. In Tab. 3.3, abbiamo riportato i risultati ottenuti applicando i minimi quadrati al sistema generato dall'equazione di condizione per la correzione dei parametri orbitali quando siano fatte 10 misure soltanto. Anche in questo caso la precisione raggiunta è notevole e la distanza massima fra l'orbita vera e quella virtuale nei vari istanti è questa volta di 29,72 m.

Per completare il confronto fra i vari metodi di elaborazione dei dati rimane solo da controllare quali risultati siano ottenibili dall'applicazione di quello illustrato al paragrafo 2.3.

Invece di sostituire il valore di ΔE nella Eq. [3.3.] abbiamo cioè messo quest'ultima a sistema con la Eq. [3.4].

TABELLA 3.3.

Confronto fra i due metodi di correzione dei parametri orbitali mediante i risultati ottenuti.

Parametri orbitali di Q	Valore vero	Errore assoluto iniziale	Errori assoluti finali dei parametri orbitali		
			Correzione parametri complessivi (50 rilevazioni)	Correzione diretta parametri orbitali (50 rilevazioni)	Correzione diretta parametri orbitali (10 rilevazioni)
R_T (cm)	$6{,}371020 \cdot 10^{8}$	$1{,}0 \cdot 10^{5}$	$-1{,}5188273 \cdot 10^{3}$	$-4{,}75649 \cdot 10$	$1{,}0355815 \cdot 10^{3}$
ω (sec^{-1})	$7{,}292115053926 \cdot 10^{-5}$	0	0	0	0
a	$4{,}50 \cdot 10$	$3{,}33 \cdot 10^{-2}$	$-7{,}617422 \cdot 10^{-4}$	$3{,}10948 \cdot 10^{-6}$	$-1{,}2031418 \cdot 10^{-4}$
P					
a (cm)	$1{,}857772753750 \cdot 10^{9}$	$4{,}420639734 \cdot 10^{6}$	$5{,}35811 \cdot 10^{2}$	$2{,}01357 \cdot 10$	$-4{,}03703 \cdot 10^{2}$
e	$2{,}0 \cdot 10^{-1}$	$-5{,}0 \cdot 10^{-2}$	$4{,}0912 \cdot 10^{-9}$	$-1{,}7209 \cdot 10^{-9}$	$2{,}98309 \cdot 10^{-8}$
T (sec)	$2{,}520 \cdot 10^{4}$	$9{,}0 \cdot 10$	$1{,}080 \cdot 10^{-5}$	$3{,}370 \cdot 10^{-5}$	$-1{,}07673 \cdot 10^{-3}$
τ (sec)	$3{,}60 \cdot 10^{3}$	$-1{,}80 \cdot 10^{2}$	$-6{,}83365 \cdot 10^{-4}$	$-5{,}09946 \cdot 10^{-4}$	$2{,}090097 \cdot 10^{-3}$
φ (°)	0	$-4{,}50$	$-4{,}0690040 \cdot 10^{-5}$	$-3{,}85928119 \cdot 10^{-6}$	$1{,}41475274 \cdot 10^{-4}$
ψ (°)	0	$6{,}0$	$-3{,}1753050 \cdot 10^{-5}$	$7{,}415884 \cdot 10^{-7}$	$-9{,}7400797 \cdot 10^{-5}$
ϑ (°)	$2{,}0 \cdot 10$	$-4{,}0$	$9{,}128743 \cdot 10^{-6}$	$9{,}304096 \cdot 10^{-6}$	$-6{,}948947 \cdot 10^{-5}$

I risultati ottenuti supponendo di aver effettuato 17 rilevazioni e 20 iterazioni successive del metodo dei minimi quadrati sono visibili in Tab. 3.2 in cui abbiamo messo a confronto gli errori assoluti dei parametri complessivi ottenuti in questo modo con quelli ottenuti nelle medesime condizioni col metodo di sostituzione. Come si vede i risultati sono praticamente gli stessi.

È inoltre interessante notare che il tempo di elaborazione, quando i minimi quadrati sono applicati al sistema di due equazioni di condizione, è di circa 24,5 sec mentre, nell'altro caso, è di 5,5 sec: esso viene cioè triplicato soprattutto per il numero maggiore di equazioni e di incognite e per la necessità di bilanciare i pesi delle diverse equazioni di condizione.

Si può perciò scartare questo metodo di elaborazione dei dati in quanto non migliora minimamente la precisione dei risultati e richiede un tempo di elaborazione molto maggiore.

Sulla base delle prove fatte possiamo ora scegliere fra i due metodi quello ottimale: esso è indubbiamente sia per la maggior precisione sia per la versatilità (come si vedrà anche dalla trattazione dei prossimi casi) quello della determinazione diretta dei parametri orbitali.

È importante fare un'ultima osservazione sul valore dello scarto quadratico medio. Abbiamo già detto che esso può essere utilizzato per definire il numero di iterazioni del metodo dei minimi quadrati necessario per ottenere la massima precisione, possiamo però anche sceglierlo come indice della precisione raggiunta.

Si è notato infatti come, ad esempio, nell'ultimo caso trattato lo scarto quadratico medio variasse da un valore di $5 \cdot 10^{15}$ a un valore di $6 \cdot 10^{10}$; esso aveva cioè subito una variazione di 5 ordini di grandezza che rappresenta anche l'ulteriore precisione raggiunta dai parametri complessivi.

4.1. Osservazioni da satellite a satellite.

Per lo studio dei risultati ottenibili dalle misure di distanza da satellite a satellite previste nel programma del Geos-C, si è dovuto impostare di nuovo l'equazione della distanza e quella di condizione tenendo presente che ora l'osservatore è in moto su un orbita ellittica attorno alla terra.

4.2. *Le equazioni*

Ridefiniamo dunque il sistema cartesiano ortogonale $O_1x_1y_1z_1$ ponendo O_1 coincidente anch'esso con il centro di massa della Terra quale fuoco della sua orbita. In questo sistema le coordinate di Q saranno

$$\begin{cases} X_1 &= a_Q\,(\cos E_Q - e_Q) \\ Y_1 &= a_Q\,(1 - e_Q^2)^{1/2} \sin E_Q \\ Z_1 &= 0 \end{cases} \qquad [4.1]$$

dove E_Q è data, ancora una volta, dall'equazione di Keplero.

Fatta questa sostituzione e ricordato che anche in questo caso T coincide con V, possiamo calcolare la distanza dalla Eq. [1.9].

Bisogna anche notare che ora φ_P, ψ_P, ϑ_P, determinano l'inclinazione dell'orbita di P rispetto all'orbita di Q e non rispetto al sistema di riferimento terrestre.

Naturalmente l'equazione di condizione per la correzione diretta dei parametri orbitali si differenzia dalla Eq. [A.3], oltre che per la condizione $T \equiv V$, anche perché nel corso della differenziazione della Eq. [1.9] dobbiamo sostituire non la Eq. [2.8], ma quella ottenuta differenziando la Eq. [4.1].

Ricordando che anche ΔE_Q dipende, attraverso l'equazione di Keplero differenziata, da Δe_Q, Δn_Q, $\Delta \tau_Q$, potremo scrivere nel caso di due satelliti terrestri

$$\begin{aligned} \Delta d^2/2 \;=\; & \{[(X_Q - X_P)B_{11} + (Y_Q - Y_P)B_{21} + \\ & + (Z_Q - Z_P)B_{31}]\,(\cos E_Q - e_Q) + \\ & + [(X_Q - X_P)B_{12} + (Y_Q - Y_P)B_{22} + \\ & + (Z_Q - Z_P)B_{32}]\,(1 - e^2_Q)^{1/2} \sin E_Q \cdot \Delta a_Q + \\ & - \Bigg\{\Bigg[(X_Q - X_P)B_{11} + (Y_Q - Y_P)B_{21} + \\ & + (Z_Q - Z_P)B_{31}\Bigg]\, a_Q \left(1 + \frac{\sin^2 E_Q}{1 - e_Q \cos E_Q}\right) + \\ & + [(X_Q - X_P)B_{12} + (Y_Q - Y_P)\,B_{22} + (Z_Q - Z_P)B_{32}]\cdot \\ & \cdot \left[\frac{a_Q e_Q \sin E_Q}{(1 - e^2_Q)^{1/2}} - \frac{a_Q\,(1 - e^2_Q)^{1/2} \cos E_Q \sin E_Q}{1 - e_Q \cos E_Q}\right]\Bigg\}\,\Delta e_Q + \end{aligned} \qquad [4.2]$$

$$
\begin{aligned}
&- \{[(X_Q - X_P)B_{11} + (Y_Q - Y_P)B_{21} + (Z_Q - Z_P)B_{31}]\, a_Q \sin E_Q + \\
&\quad - [(X_Q - X_P)B_{12} + (Y_Q - Y_P)B_{22} + \\
&\quad + (Z_Q - Z_P)B_{32}]\, a_Q\, (1 - e^2_Q)^{1/2} \cos E_Q\} \cdot \\
&\quad \cdot \frac{t - \tau_Q}{1 - e_Q \cos E_Q} \Delta n_Q + \\
&+ \{[(X_Q - X_P)B_{11} + (Y_Q - Y_P)B_{21} + \\
&\quad + (Z_Q - Z_P)B_{31}]\, a_Q \sin E_Q + \\
&\quad - [(X_Q - X_P)B_{12} + (Y_Q - Y_P)B_{22} + \\
&\quad + (Z_Q - Z_P)B_{32}]\, a_Q\, (1 - e^2_Q)^{1/2} \cos E_Q\} \cdot \\
&\quad \cdot \frac{n_Q}{1 - e_Q \cos E_Q} \Delta \tau_Q + \\
&- \{[(X_P - X_Q)C_{11} + (Y_P - Y_Q)C_{21} + \\
&\quad + (Z_P - Z_Q)C_{31}] \left(1 + \frac{\sin^2 E_P}{1 - e_P \cos E_P}\right) + \\
&\quad + [(X_P - X_Q)C_{12} + (Y_P - Y_Q)C_{22} + (Z_P - Z_Q)C_{32}] \cdot \\
&\quad \cdot \left[\frac{a_P e_P \sin E_P}{(1 - e^2_P)^{1/2}} - \frac{a_P\, (1 - e^2_P)^{1/2} \cos E_P \sin E_P}{1 - e_P \cos E_P}\right]\Bigg\} \Delta e_P + \\
&+ \{[(X_P - X_Q)C_{11} + (Y_P - Y_Q)C_{21} + \\
&\quad + (Z_P - Z_Q)C_{31}] (\cos E_P - e_P) + \\
&\quad + [(X_P - X_Q)C_{12} + (Y_P - Y_Q)C_{22} + \\
&\quad + (Z_P - Z_Q)C_{32}]\, (1 - e^2_P)^{1/2} \sin E_P\} \Delta a_P + \\
&- \{[(X_P - X_Q)C_{11} + (Y_P - Y_Q)C_{21} + (Z_P - Z_Q)C_{31}] \sin E_P + \\
&\quad - [(X_P - X_Q)C_{12} + (Y_P - Y_Q)C_{22} + \\
&\quad + (Z_P - Z_Q)C_{32}] \cos E_P\, (1 - e^2_P)^{1/2}\} \cdot \\
&\quad \cdot \frac{a_P\, (t - \tau_P)}{1 - e_P \cos E_P} \Delta n_P + \\
&+ \{[(X_P - X_Q)C_{11} + (Y_P - Y_Q)C_{21} + \\
&\quad + (Z_P - Z_Q)C_{31}] \sin E_P +
\end{aligned}
\qquad [4.2]
$$

$$
\begin{aligned}
&- [(X_P - X_Q)C_{12} + (Y_P - Y_Q)C_{22} + \\
&+ (Z_P - Z_Q)C_{32}] \cos E_P \, (1 - e^2_P)^{1/2}\} \cdot \\
&\cdot \frac{a_P - n_P}{1 - e_P \cos E_P} \Delta\tau_P + \qquad [4.2] \\
&+ [(X_P - X_Q)(C_{12}X_2 - C_{11}Y_2) + (Y_P - Y_Q)(C_{22}X_2 - C_{21}Y_2) + \\
&+ (Z_P - Z_Q)(C_{32}X_2 - C_{31}Y_2)] \Delta\varphi_P + \\
&+ [(X_P - X_Q)(-C_{21}X_2 - C_{22}Y_2) + \\
&+ (Y_P - Y_Q)(C_{11}X_2 + C_{12}Y_2) \Delta\psi_P + \\
&+ [(X_P - X_Q)(C_{31}X_2 \sin\psi_P + C_{32}Y_2 \sin\psi_P) + (Y_P - Y_Q) \cdot \\
&\cdot (-C_{31}X_2 \cos\psi_P - C_{32}Y_2 \cos\psi_P) + (Z_P - Z_Q) \cdot \\
&\cdot (X_2 \sin\varphi_P + C_2 \cos\varphi_P) \cos\vartheta_P] \Delta\vartheta_P
\end{aligned}
$$

Come si vede chiaramente, a riprova della duttilità di questo metodo, al variare delle condizioni di rilevazione variano, nell'equazione di condizione, solo i coefficienti dei parametri direttamente interessati come differenziazione parziale della equazione della distanza, ciò non accade invece per l'equazione di condizione espressa in funzione dei parametri complessivi.

4.3. *Dati e risultati.*

Si è usato per queste rilevazioni lo stesso satellite del capitolo precedente con periodo $T = 7^h$ mentre il satellite Q è stato considerato geostazionario. Sono state simulate 50 misure negli istanti corrispondenti ad una anomalia eccentrica di P, $E_{Pj} = 0{,}5j$ (con $j = 1, 2, \ldots, 50$) supponendo che l'errore massimo di misurazione fosse 1 m.

Sono stati elaborati i dati sulla base della nuova equazione di condizione (Eq. [4.2]) ottenendo per i parametri orbitali di P la stessa precisione raggiunta nel caso di Tab. 3.1 mentre per i parametri di Q la precisione è ancora maggiore essendo l'errore percentuale finale per tutti i parametri dell'ordine di 10^{-9}.

5.1. Satellite vesuviano osservato da una stazione terrestre.

Abbiamo poi messo a punto un programma per elaborare misure di distanza, effettuate a mezzo laser, tra un osservatore terrestre Q ed un satellite venusiano P.

TABELLA 5.1.

Determinazione dei parametri orbitali di P e Q supponendo noti quelli di T e V (100 rilevazioni).

Parametri orbitali di Q	Valore vero	Valore finale	Valore iniziale	Errore finale	Errore iniziale	Err. perc. fin.	Err. perc. iniz.
R_T (cm)	$6{,}371020 \cdot 10^{8}$	$6{,}371053077951 \cdot 10^{8}$	$6{,}372020 \cdot 10^{8}$	$3{,}91 \cdot 10^{3}$	$1{,}0 \cdot 10^{5}$	$6{,}13 \cdot 10^{-6}$	$1{,}56960737 \cdot 10^{-1}$
ω (sec^{-1})	$7{,}292115953926 \cdot 10^{-5}$	$7{,}292115053926 \cdot 10^{-5}$	$7{,}292115053926 \cdot 10^{-5}$	0	0	0	0
α (°)	$4{,}50 \cdot 10$	$4{,}499952577937 \cdot 10$	$4{,}50\bar{3} \cdot 10$	$-4{,}7022063 \cdot 10^{-1}$	$3{,}\bar{3} \cdot 10^{-2}$	$-1{,}0449347 \cdot 10^{-5}$	$7{,}40740740 \cdot 10^{-1}$
φ_T (°)	0	$-1{,}833071223975 \cdot 10^{-1}$	$-3{,}0$	$-1{,}83307122 \cdot 10^{-1}$	$-3{,}0$		
ψ_T (°)	0	$2{,}019619764347 \cdot 10^{-1}$	$2{,}769230769231$	$2{,}01961976 \cdot 10^{-1}$	$2{,}769230765231$		
ϑ_T (°)	$2{,}34\bar{52} \cdot 10$	$2{,}345188714084 \cdot 10$	$1{,}89\bar{52} \cdot 10$	$-3{,}3508138 \cdot 10^{-1}$	$-4{,}50$	$-1{,}4285830 \cdot 10^{-5}$	$-1{,}91873471265 \cdot 10^{-1}$
Parametri orbitali di P							
a_P (cm)	$3{,}936476770647 \cdot 10^{9}$	$3{,}936475757241 \cdot 10^{9}$	$3{,}939217442219 \cdot 10^{9}$	$-1{,}013306 \cdot 10^{3}$	$2{,}740671 \cdot 10^{6}$	$-2{,}574145 \cdot 10^{-7}$	$6{,}962245 \cdot 10^{-1}$
e_P	$2{,}0 \cdot 10^{-1}$	$1{,}999999839652 \cdot 10^{-1}$	$-1{,}59 \cdot 10^{-1}$	$-1{,}60348 \cdot 10^{-2}$	$-5{,}0 \cdot 10^{-5}$	$-8{,}1742 \cdot 10^{-8}$	$-2{,}50 \cdot 10^{-1}$
T_P	$8{,}616410 \cdot 10^{4}$	$8{,}616410006848 \cdot 10^{4}$	$8{,}625410 \cdot 10^{4}$	$6{,}848 \cdot 10^{-5}$	$9{,}0 \cdot 10$	$7{,}942 \cdot 10^{-10}$	$1{,}044518540 \cdot 10^{-3}$
τ_P	$5{,}40 \cdot 10^{3}$	$5{,}400000723192 \cdot 10^{3}$	$5{,}220 \cdot 10^{3}$	$7{,}23192 \cdot 10^{-1}$	$-1{,}80 \cdot 10^{2}$	$1{,}33524 \cdot 10^{-7}$	$-3{,}\bar{3} \cdot 10^{-2}$
φ_P	0	$1{,}326243936111 \cdot 10^{-1}$	$-4{,}50$	$1{,}38624394 \cdot 10^{-1}$	$-4{,}50$		
ψ_P	0	$-1{,}231713486256 \cdot 10^{-1}$	$6{,}0$	$-1{,}23171349 \cdot 10^{-1}$	$6{,}0$		
ϑ_P	$2{,}0 \cdot 10$	$1{,}999995341720 \cdot 10$	$1{,}60 \cdot 10$	$-4{,}658280 \cdot 10^{-5}$	$-4{,}0$	$-2{,}329140 \cdot 10^{-6}$	$-2{,}0 \cdot 10^{-1}$

TABELLA 5.2.

Determinazione dei parametri orbitali di T e V supponendo noti quelli di P e Q (100 rilevazioni).

Parametri orbitali di T	Valore vero	Valore finale	Valore iniziale	Errore finale	Errore iniziale	Err. perc. fin.	Err. perc. iniz.
a_T	$1{,}496267973875 \cdot 10^{13}$	$1{,}496268047887 \cdot 10^{13}$	$1{,}496269870470 \cdot 10^{13}$	$7{,}401229375 \cdot 10^{5}$	$1{,}8965847 \cdot 10^{7}$	$4{,}94646 \cdot 10^{-8}$	$1{,}267550 \cdot 10^{-6}$
e_T	$1{,}70 \cdot 10^{-2}$	$1{,}699999293442 \cdot 10^{-2}$	$1{,}690 \cdot 10^{-2}$	$-7{,}06558 \cdot 10^{-9}$	$-1{,}0 \cdot 10^{-4}$	$-4{,}15622 \cdot 10^{-7}$	$-5{,}882352941 \cdot 10^{-3}$
T_T	$3{,}155692954502 \cdot 10^{7}$	$3{,}155693209822 \cdot 10^{7}$	$3{,}155698954502 \cdot 10^{7}$	$2{,}5532$	$6{,}0 \cdot 10$	$8{,}0908 \cdot 10^{-8}$	$1{,}901325 \cdot 10^{-6}$
τ_T	$7{,}889232386255 \cdot 10^{6}$	$7{,}889232908553 \cdot 10^{6}$	$7{,}889592386255 \cdot 10^{6}$	$5{,}2230 \cdot 10^{-1}$	$3{,}60 \cdot 10^{2}$	$6{,}6204 \cdot 10^{-8}$	$4{,}5631816 \cdot 10^{-5}$
Parametri orbitali di V							
a_V	$1{,}082080016375 \cdot 10^{13}$	$1{,}082079937515 \cdot 10^{13}$	$1{,}082213825995 \cdot 10^{13}$	$-7{,}8760 \cdot 10^{5}$	$1{,}33809620 \cdot 10^{9}$	$-7{,}2786 \cdot 10^{-8}$	$1{,}23659635 \cdot 10^{-4}$
e_V	$7{,}0 \cdot 10^{-3}$	$7{,}000023885744 \cdot 10^{-3}$	$7{,}50 \cdot 10^{-3}$	$2{,}388574 \cdot 10^{-8}$	$5{,}0 \cdot 10^{4}$	$3{,}412249 \cdot 10^{-6}$	$7{,}1428571128 \cdot 10^{-2}$
T_V	$1{,}940751167019 \cdot 10^{7}$	$1{,}940751286075 \cdot 10^{7}$	$1{,}941111167019 \cdot 10^{7}$	$1{,}1906$	$3{,}60 \cdot 10^{3}$	$6{,}1346 \cdot 10^{-8}$	$1{,}85495186 \cdot 10^{-4}$
τ_V	0	$-8{,}045280176335$	$-7{,}20 \cdot 10^{3}$	$-8{,}04528$	$-7{,}20 \cdot 10^{3}$		
φ_V	0	$3{,}945822546598 \cdot 10^{-4}$	$-1{,}80 \cdot 10$	$3{,}94582255 \cdot 10^{-4}$	$-1{,}80 \cdot 10$		
ψ_V	$9{,}0 \cdot 10$	$8{,}999946451974 \cdot 10$	$1{,}020 \cdot 10^{2}$	$-5{,}354803 \cdot 10^{-4}$	$1{,}20 \cdot 10$	$-5{,}945781 \cdot 10^{-6}$	$1{,}33 \cdot 10$
ϑ_V	$3{,}390$	$3{,}389975744243$	$2{,}190$	$-2{,}425576 \cdot 10^{-5}$	$-1{,}20$	$-7{,}155091 \cdot 10^{-6}$	$-3{,}539823 \cdot 10^{-1}$

I dati orbitali in base ai quali si è sviluppato il problema sono quelli di Tab. 5.1 e 5.2.

Per evitare l'indeterminazione dovuta all'eccessivo peso dei parametri orbitali dei due pianeti rispetto a quelli del satellite e dell'osservatore, abbiamo considerato separatamente il problema della correzione dei due gruppi di parametri.

L'equazione della distanza è evidentemente in ambedue i casi la Eq. [1.10]; è invece differente l'equazione di condizione.

5.2. *Determinazione dei parametri orbitali di Q e P conoscendo la posizione di T e V.*

Come si vede dalla Tab. 5.2. abbiamo ancora una volta considerato noto ω e quindi restano solo 12 parametri orbitali da determinare.

L'equazione di condizione usata è la [A.3] in cui si è posto, essendo i corrispondenti parametri orbitali noti, $\Delta\omega = \Delta a_T = \Delta n_T = \Delta e_T = \Delta\tau_T = \Delta a_V = \Delta e_V = \Delta n_V = \Delta\tau_V = \Delta\varphi_V = \Delta\psi_V = \Delta\vartheta_V = 0$

Dopo aver ricavato i valori delle distanze sperimentali inficiate di un errore massimo di 15 m e i valori delle distanze calcolate nei corrispondenti istanti dai valori iniziali dei parametri orbitali, abbiamo applicato il metodo dei minimi quadrati al sistema originato dalla equazione di condizione sostituendovi i dati ottenuti.

Dopo 30 iterazioni, supponendo di aver effettuato 100 osservazioni negli istanti corrispondenti ad una anomalia eccentrica $E_{Pj} = j$ (con $j = 1, 2, \ldots, 100$), i risultati convergono sui valori di Tab. 5.1.

5.3. *Determinazione delle orbite di T e V essendo noti i parametri di P e Q.*

L'equazione di condizione è stata ricavata dalla Eq. [A.3] tenendo presente che i parametri orbitali di P e Q sono supposti noti e che perciò $\Delta\omega = \Delta R_T = \Delta a = \Delta\varphi_T = \Delta\psi_T = \Delta\vartheta_T = \Delta a_P = \Delta e_P - \Delta n_P = \Delta\tau_P = \Delta\varphi_P = \Delta\psi_P = \Delta\vartheta_P = 0$

I parametri di cui vogliamo ottenere il valore sono quindi e_T, a_T, n_T, τ_T, a_V, e_V, n_V, τ_V, φ_V, ψ_V, ϑ_V.

I risultati ottenuti con 100 dati negli istanti corrispondenti ad un'anomalia eccentrica $E_{Pj} = 24j$ (con $j = 1, 2, \ldots, 100$) sono quelli di Tab. 5.2. Come si vede essi hanno una precisione di vari ordini di grandezza maggiore rispetto ai valori iniziali.

Applicando alternativamente più volte questi due metodi si riuscirà ad ottenere con precisione i valori di tutti i parametri.

RINGRAZIAMENTI.

Desidero ringraziare il prof. M. Caputo per i preziosi consigli e suggerimenti con cui ha seguito, in qualità di relatore, lo svolgimento della tesi di Laurea da cui è tratta questa nota.

APPENDICE

Eq. [A.1] – Parametri complessivi in funzione dei parametri orbitali.

$$
\begin{aligned}
X_1 &= R_T^2 + a_P^2 + a_T^2 + a_V^2 - 2B_{13}R_T a_T e_T \cos a - 2C_{11} a_P e_P \cdot \\
&\cdot a_T e_T + 2 \sum_1^3{}_i B_{i3} C_{i1} R_T a_P e_P \cos a + 2 \sum_1^3{}_i A_{i1} B_{i1} \cdot \\
&\cdot B_{i3} R_T a_V e_V \cos a + 2 \sum_1^3{}_i A_{i1} C_{i1} a_P a_V e_P e_V + \\
&+ 2A_{11} a_T e_T a_V e_V .
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
X_2 &= -2a^2_P e_P + 2C_{11} a_P a_T e_T - 2 \sum_1^3{}_i B_{i3} C_{i1} R_T a_P \cos a + \\
&- 2 \sum_1^3{}_i A_{i1} C_{i1} a_P a_V e_V .
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
X_3 &= 2C_{12} a_P a_T e_T (1-e^2_P)^{1/2} - 2 \sum_1^3 A_{i1} C_{i2} a_V e_V a_P (1-e^2_P)^{1/2} + \\
&- 2 \sum_1^3{}_i B_{i3} C_{i2} R_T a_P (1-e^2_P)^{1/2} \cos a .
\end{aligned}
$$

$$
X_4 = a^2_P e^2_P \qquad [A.1]
$$

$$
\begin{aligned}
X_5 &= -2a^2_T e_T + 2B_{13} R_T a_T \cos a + 2C_{11} a_P e_P a_T + \\
&+ 2 A_{11} a_V e_V a_T .
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
X_6 &= 2 B_{23} R_T a_T (1-e^2_T)^{1/2} \cos a + 2C_{21} a_P e_P a_T (1-e^2_T)^{1/2} + \\
&+ 2 A_{21} a_V e_V a_T (1-e^2_T)^{1/2} .
\end{aligned}
$$

$$
X_7 = a^2_T e^2_T .
$$

$$
\begin{aligned}
X_8 &= -2a^2_V e_V - 2 \sum_1^3 A_{i1} B_{i3} R_T a_V \cos a + 2A_{11} a_T e_T a_V + \\
&- 2 \sum_1^3{}_i A_{i1} C_{i1} a_P a_V e_P .
\end{aligned}
$$

$$X_9 = -2\sum_1^3 {}_iA_{i2}B_{i3}R_T a_V (1-e^2_V)^{1/2} \cos a - 2\sum_1^3 {}_iA_{i2}C_{i1}a_P e_P a_V \cdot$$
$$\cdot (1-e^2_V)^{1/2} + 2A_{12}a_T e_T a_V (1-e^2_V)^{1/2}.$$

$$X_{10} = a^2_V e^2_V.$$

$$X_{11} = -2C_{11}a_P a_T.$$

$$X_{12} = -2C_{12}a_T a_P (1-e^2_P)^{1/2}.$$

$$X_{13} = -2C_{21}a_T a_P (1-e^2_T)^{1/2}.$$

$$X_{14} = -2C_{22}a_T a_P (1-e^2_T)^{1/2} (1-e^2_P)^{1/2}.$$

$$X_{15} = +2\sum_1^3 {}_iA_{i1}C_{i1}a_V a_P.$$

$$X_{16} = +2\sum_1^3 {}_iA_{i1}C_{i2}a_V a_P (1-e^2_P)^{1/2}$$

$$X_{17} = +2\sum_1^3 A_{i2}C_{i1}a_V a_P (1-e^2_V)^{1/2}.$$

$$X_{18} = 2\sum_1^3 {}_iA_{12}C_{i2}a_P a_V (1-e^2_P)^{1/2} (1-e^2_V)^{1/2}$$

$$X_{19} = 2A_{11}a_V a_T$$

$$X_{20} = -2A_{12}a_T a_V (1-e^2_V)^{1/2} \qquad [A.1]$$

$$X_{21} = -2A_{21}a_V a_T (1-e^2_T)^{1/2}$$

$$X_{22} = -2A_{22}a_V a_T (1-e^2_T)^{1/2} (1-e^2_V)^{1/2}$$

$$X_{23} = -2B_{11}R_T a_T e_T \sin a + 2\sum_1^3 {}_iA_{i1}B_{i2}R_T a_V e_V \sin a +$$
$$+ 2\sum_1^3 {}_iB_{i1}C_{i1}R_T a_P e_P \sin a$$

$$X_{24} = -2B_{12}R_T a_T e_T \sin a + 2\sum_1^3 {}_iB_{i2}C_{i1}R_T a_P e_P \sin a +$$
$$+ 2\sum_1^3 {}_iA_{i1}B_{i2}R_T a_V e_V \sin a$$

$$X_{25} = -2\sum_1^3 {}_iB_{i1}C_{i1}R_T a_P \sin a$$

$$X_{26} = -2\sum_1^3 {}_iB_{i1}C_{i2}R_T a_P (1-e^2_P)^{1/2} \sin a$$

$$X_{27} = -2\sum_1^3 {}_iB_{i2}C_{i1}R_T a_P \sin a$$

$$X_{28} = -2\sum_1^3 {}_iB_{i3}C_{i2}R_T a_P (1-e^2_P)^{1/2} \sin a$$

$$X_{29} = 2B_{11}R_T a_T \sin a$$

$$X_{30} = 2B_{21}R_T a_T (1-e^2_T)^{1/2} \sin a$$

$$
\begin{aligned}
X_{31} &= 2\ B_{1\circ} R_T a_T \sin \alpha \\
X_{32} &= 2\ B_{22} R_T a_T\ (1-e^2{}_T)^{1/2} \sin \alpha \\
X_{33} &= -\ 2 \sum_1^3{}_i A_{i1} B_{i1} R_T a_V \sin \alpha \\
X_{34} &= -\ 2 \sum_1^3{}_i A_{i2} B_{i1} R_T a_V\ (1-e^2{}_V)^{1/2} \sin \alpha \qquad [A.1] \\
X_{35} &= -\ 2 \sum_1^3{}_i A_{i1} B_{i\circ} R_T a_V \sin \alpha \\
X_{36} &= -\ 2 \sum_1^3{}_i A_{i2} B_{i2} R_T a_V\ (1-e^2{}_V)^{1/2} \sin \alpha
\end{aligned}
$$

Eq. [A.2] – Equazione di condizione per i parametri complessivi.

$$
\begin{aligned}
\Delta d^2{}_j = {} & \Delta X_1 + \cos E_{Pj}\, \Delta X_2 + \sin E_{Pj}\, \Delta X_3 + \cos^2 E_{Pj}\, \Delta X_4 + \\
& + \cos E_{Tj}\, \Delta X_5 + \sin E_{Tj} \Delta X_6 + \cos^2 E_{Tj} \Delta X_7 + \cos E_{Vj} \Delta X_8 + \\
& + \sin E_{Vj} \Delta X_9 + \cos^2 E_{Vj} \Delta X_{10} + \cos E_{Pj} \cos E_{Tj} \Delta X_{11} + \\
& + \sin E_{Pj} \cos E_{Tj} \Delta X_{12} + \cos E_{Pj} \sin E_{Tj} \Delta X_{13} + \\
& + \sin E_{Pj} \sin E_{Tj} \Delta X_{14} + \cos E_{Pj} \cos E_{Vj} \Delta X_{15} + \\
& + \sin E_{Pj} \cos E_{Vj}\, \Delta X_{16} + \cos E_{Pj} \sin E_{Vj} \Delta X_{17} + \\
& + \sin E_{Pj} \sin E_{Vj} \Delta X_{18} + \cos E_{Vj} \cos E_{Tj} \Delta X_{19} + \\
& + \sin E_{Vj} \cos E_{Tj} \Delta X_{20} + \cos E_{Vj} \sin E_{Tj} \Delta X_{21} + \\
& + \sin E_{Vj} \sin E_{Tj} \Delta X_{22} - (X_2 \sin E_{Pj} - X_3 \cos E_{Pj} + \\
& + 2\ X_4 \cos E_{Pj} \sin E_{Pj} + X_{11} \cos E_{Tj} \sin E_{Pj} - \\
& - X_{12} \cos E_{Tj} \cos E_{Pj} + X_{13} \sin E_{Tj} \sin E_{Pj} + \\
& - X_{14} \sin E_{Tj} \cos E_{Pj} + X_{15} \cos E_{Vj} \sin E_{Pj} + \\
& - X_{16} \cos E_{Vj} \cos E_{Pj} + X_{17} \sin E_{Vj} \sin E_{Pj} + \\
& - X_{18} \sin E_{Vj} \cos E_{Pj} + X_{25} \cos \omega t_j \sin E_{Pj} + \\
& - X_{26} \cos \omega t_j \cos E_{Pj} + X_{27} \sin \omega t_j \sin E_{Pj} + \qquad [A.2] \\
& - X_{28} \sin \omega t_j \cos E_{Pj}\, \Delta E_{Pj} + \\
& + \cos \omega t_j\, \Delta X_{23} + \sin \omega t_j\, \Delta X_{24} + \cos E_{Pj} \cos \omega t_j\, \Delta X_{25} + \\
& + \sin E_{Pj} \cos \omega t_j\, \Delta X_{26} + \cos E_{Pj} \sin \omega t_j\, \Delta X_{27} + \\
& + \sin E_{Pj} \sin \omega t_j\, \Delta X_{28} + \cos \omega t_j \cos E_{Tj}\, \Delta X_{29} + \\
& + \sin E_{Tj} \cos \omega t_j\, \Delta X_{30} + \cos E_{Tj} \sin \omega t_j\, \Delta X_{31} +
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&+ \sin E_{Tj} \sin \omega t_j \, \Delta X_{32} + \cos E_{Vj} \cos \omega t_j \, \Delta X_{33} + \\
&+ \sin E_{Vj} \cos \omega t_j \, \Delta X_{34} + \cos E_{Vj} \sin \omega t_j \, \Delta X_{35} + \\
&+ \sin E_{Vj} \sin \omega t_j \, \Delta X_{36} - (X_5 \sin E_{Tj} - X_6 \cos E_{Tj} + 2\, X_7 \cos E_{Tj} \cdot \\
&\cdot \sin E_{Tj} + X_{11} \cos E_{Pj} \sin E_{Tj} + X_{12} \sin E_{Pj} \sin E_{Tj} + \\
&- X_{13} \cos E_{Pj} \cdot \cos E_{Tj} - X_{14} \sin E_{Pj} \cos E_{Tj} + \\
&+ X_{19} \cos E_{Vj} \sin E_{Tj} + X_{20} \sin E_{Vj} \sin E_{Tj} + \\
&- X_{21} \cos E_{Vj} \cos E_{Tj} - X_{22} \sin E_{Vj} \cos E_{Tj} + \\
&+ X_{29} \cos \omega t_j \sin E_{Tj} - X_{30} \cos \omega t_j \cos E_{Tj} + \\
&+ X_{31} \sin \omega t_j \sin E_{Tj} - X_{32} \sin \omega t_j \cos E_{Tj}) \, \Delta E_{Tj} + \qquad [A.2] \\
&- (X_8 \sin E_{Vj} - X_9 \cos E_{Vj} + 2\, X_{10} \cos E_{Vj} \sin E_{Vj} + \\
&+ X_{15} \cos E_{Pj} \sin E_{Vj} + X_{16} \sin E_{Pj} \sin E_{Vj} + \\
&- X_{17} \cos E_{Pj} \cos E_{Vj} - X_{18} \sin E_{Pj} \cos E_{Vj} + \\
&+ X_{19} \cos E_{Tj} \sin E_{Vj} - X_{20} \cos E_{Tj} \cos E_{Vj} + \\
&+ X_{21} \sin E_{Tj} \sin E_{Vj} - X_{22} \sin E_{Tj} \cos E_{Vj} + \\
&+ X_{33} \cos \omega t_j \sin E_{Vj} - X_{34} \cos \omega t_j \cos E_{Vj} + \\
&+ X_{35} \sin \omega t_j \sin E_{Vj} - X_{36} \sin \omega t_j \cos E_{Vj}) \, \Delta E_{Vj} + \\
&- (X_{23} \sin \omega t_j - X_{24} \cos \omega t_j + X_{25} \cos E_{Pj} \sin \omega t_j + \\
&+ X_{26} \sin E_{Pj} \sin \omega t_j - X_{27} \cos E_{Pj} \cos \omega t_j + \\
&- X_{28} \sin E_{Pj} \cos \omega t_j + X_{29} \cos E_{Tj} \sin \omega t_j + \\
&+ X_{30} \sin E_{Tj} \sin \omega t_j - X_{31} \cos E_{Tj} \cos \omega t_j + \\
&- X_{32} \sin E_{Tj} \cos \omega t_j + X_{33} \cos E_{Vj} \sin \omega t_j + \\
&+ X_{34} \sin E_{Vj} \cos \omega t_j - X_{35} \cos E_{Vj} \cos \omega t_j + \\
&- X_{30} \sin E_{Vj} \cos \omega t_j) \, t_j \Delta \omega .
\end{aligned}
$$

Eq. [A.3] – Equazione di condizione per i parametri orbitali.

$$
\begin{aligned}
\Delta d^2/2 \; = \; & \{[(X_Q - X_P) B_{11} + (Y_Q - Y_P) B_{21} + \\
& + (Z_Q - Z_P) B_{31}] \sin a \cos \omega t + [(X_Q - X_P) B_{12} + \\
& + (Y_Q - Y_P) B_{22} + (Z_Q - Z_P) B_{32}] \sin a \sin \omega t + \\
& + [(X_Q - X_P) B_{13} + (Y_Q - Y_P) B_{23} + (Z_Q - Z_P) B_{33}] \cos a\} \, \Delta R_T +
\end{aligned}
$$

$$+ \{[(X_Q - X_P)B_{11} + (Y_Q - Y_P)B_{21} +$$
$$+ (Z_Q - Z_P)B_{31}] \cos a \cos \omega t + [(X_Q - X_P)B_{12} +$$
$$+ (Y_Q - Y_P)B_{22} + (Z_Q - Z_P)B_{32}] \cos a \sin \omega t +$$
$$- [(X_Q - X_P)B_{13} + (Y_Q - Y_P)B_{23} +$$
$$+ (Z_Q - Z_P)B_{33}] \sin a\} R_T \Delta a +$$

$$+ \{[(X_Q - X_P)B_{11} + (Y_Q - Y_P)B_{21} + (Z_Q - Z_P)B_{31}] t \sin \omega t +$$
$$- [(X_Q - X_P)B_{1^o} + (Y_Q - Y_P)B_{22} +$$
$$+ (Z_Q - Z_P)B_{32}] t \cos \omega t\} R_T \sin a \, \Delta \omega t +$$

$$+ \{[(X_P - X_Q)C_{11} + (Y_P - Y_Q)C_{21} +$$
$$+ (Z_P - Z_Q)C_{31}] (\cos E_P - e_P) + [(X_P - X_Q)C_{12} +$$
$$+ (Y_P - Y_Q)C_{22} + (Z_P - Z_Q)C_{32}] (1 - e^2{}_P)^{1/2} \sin E_P\} \Delta a_P +$$

$$- \{[(X_P - X_Q)C_{11} + (Y_P - Y_Q)C_{21} +$$
$$+ (Z_P - Z_Q)C_{31}] a_P \left(1 + \frac{\sin^2 E_P}{1 - e \cos E_P} \right. +$$
$$+ [(X_P - X_Q)C_{12} + (Y_P - Y_Q)C_{22} + (Z_P - Z_Q)C_{32}] \cdot$$
$$\cdot \left[\frac{a_P e_P \sin E_P}{(1 - e^2{}_P)^{1/2}} - \frac{a_P (1 - e^2{}_P)^{1/2} \cos E_P \sin E_P}{(1 - e_P \cos E_P)} \right] \Bigg\} \Delta e_P +$$

$$- \{[(X_P - X_Q)C_{11} + (Y_P - Y_Q)C_{21} +$$
$$+ (Z_P - Z_Q)C_{31}] \sin E_P + [(X_P - X_Q)C_{12} +$$
$$+ (Y_P - Y_Q)C_{22} + (Z_P - Z_Q)C_{32}] (1 - e^2{}_P)^{1/2} \cos E_P\}.$$
$$\cdot \frac{a_P (t - \tau_P)}{1 - e_P \cos E_P} \Delta n_P +$$

$$+ \{[(X_P - X_Q)C_{11} + (Y_P - Y_Q)C_{21} +$$
$$+ (Z_P - Z_Q)C_{31}] \sin E_P - [(X_P - X_Q)C_{12} +$$
$$+ (Y_P - Y_Q)C_{22} + (Z_P - Z_Q)C_{32}] (1 - e_P{}^2)^{1/2} \cos E_P\} \cdot$$
$$\cdot \frac{a_P n_P}{1 - e_P \cos E_P} \Delta \tau_I +$$

$$+ \{[(X_P - X_Q)A_{11} + (Y_P - Y_Q)A_{21} +$$
$$+ (Z_P - Z_Q)A_{31}] (\cos E_V - e_V) + [(X_P - X_Q)A_{12} +$$
$$+ (Y_P - Y_Q)A_{22} + (Z_P - Z_Q)A_{32}] \sin E_V (1 - e^2{}_V)^{1/2}\} \Delta a_V +$$

$$
\begin{aligned}
&- \{[(X_P - X_Q)A_{11} + (Y_P - Y_Q)A_{21} + \\
&+ (Z_P - Z_Q)A_{31}] \left(1 + \frac{\sin^2 E_V}{1 - e_V \cos E_V}\right) + [(X_P - X_Q)A_{12} + \\
&+ (Y_P - Y_Q)A_{22} + (Z_P - Z_Q)A_{32}] \cdot \\
&\cdot \left[\frac{a_V e_V \sin E_V}{(1 - e_V^2)^{1/2}} - \frac{a_V (1 - e_V^2)^{1/2} \cos E_V \sin E_V}{1 - e_V \cos E_V}\right]\Bigg\} \Delta e_V + \\
&- \{[(X_P - X_Q)A_{11} + (Y_V - Y_Q)A_{21} + \\
&+ (Z_P - Z_Q)A_{31}] a_V \sin E_V - [(X_P - X_Q)A_{12} + \\
&+ (Y_P - Y_Q)A_{22} + (Z_P - Z_Q)A_{32}] a_V (1 - e^2_V)^{1/2} \cos E_V\} \cdot \\
&\cdot \frac{t - \tau_V}{1 - e_V \cos E_V} \Delta n_V + \\
&+ \{[(X_P - X_Q)A_{11} + (Y_P - Y_Q)A_{21} + \\
&+ (Z_P - Z_Q)A_{31}] a_V \sin E_V - [(X_P - X_Q)A_{12} + \qquad [A.3] \\
&+ (Y_P - Y_Q)A_{22} + (Z_P - Z_Q)A_{32}] a_V (1 - e^2_V)^{1/2} \cos E_V\} \cdot \\
&\cdot \frac{n_V}{1 - e_V \cos E_V} \Delta\tau_V + \\
&+ [(X_Q - X_P)(\cos E_T - e_T) + (Y_Q - Y_P)(1 - e^2_T)^{1/2} \sin E_T] \Delta a_T + \\
&- \Bigg\{(X_Q - X_P) a_T \left(1 - \frac{\sin^2 E_T}{1 - e_T \cos E_T}\right) + \\
&+ (Y_Q - Y_P) \left[\frac{a_T e_T \sin E_T}{(1 - e^2_T)^{1/2}} + \right. \\
&\left. - \frac{a_T (1 - e^2_T)^{1/2} \cos E_T \sin E_T}{1 - e_T \cos E_V}\right]\Bigg\} \Delta e_T + \\
&+ [(X_Q - X_P) a_T \sin E_T - (Y_Q - Y_P) a_T (1 - e^2_T)^{1/2} \cos E_T] \cdot \\
&\cdot \frac{n_T}{1 - e_T \cos E_T} \Delta \tau_T + \\
&+ [(X_Q - X_P) a_T \sin E_T - (Y_Q - Y_P) a_T (1 - e^2_T)^{1/2} \cos E_T] \cdot \\
&\cdot \frac{t - \tau_T}{1 - e_T \cos E_T} \Delta n_T +
\end{aligned}
$$

$$+ [(X_P - X_Q)(A_{12}X'_V - A_{11}Y'_V) + (Y_P - Y_Q)(A_{22}X'_V - A_{21}Y'_V)$$
$$+ (Z_P - Z_Q)(A_{32}X'_V - A_{32}Y'_V)] \Delta\varphi_V +$$

$$+ [(X_P - X_Q)(-A_{21}X'_V - A_{22}Y'_V) +$$
$$+ (Y_P - Y_Q)(A_{11}X'_V + A_{12}Y'_V)] \Delta\psi_V +$$

$$+ [(X_P - X_Q)(A_{31}X'_V \sin\psi_V + A_{32}Y'_V \sin\psi_V)(Y_P - Y_Q) \cdot$$
$$\cdot (-A_{31}X'_V \cos\psi_V - A_{32}Y'_V \cos\psi_V) + (Z_P - Z_Q) \cdot$$
$$\cdot (X'_V \sin\varphi_V \cos\vartheta_V + Y'_V \cos\varphi_V \cos\vartheta_V)] \Delta\vartheta_V +$$

$$+ [(X_P - X_Q)(C_{12}X_2 - C_{11}Y_2) + (Y_P - Y_Q)(C_{22}X_2 - C_{21}Y_2) +$$
$$+ (Z_P - Z_Q) \cdot (C_{32}X_2 - C_{31}Y_2)] \Delta\varphi_P +$$

$$+ [(X_P - X_Q)(-C_{21}X_2 - C_{22}Y_2) +$$
$$+ (Y_P - Y_Q)(C_{11}X_2 + C_{12}Y_2) \Delta\psi_P +$$

$$+ [(X_P - X_Q)(C_{31}X_2 \sin\varphi_P + C_{32}Y_2 \sin\psi_P) + (Y_P - Y_Q) \cdot$$
$$\cdot (-C_{31}X_2 \cos\psi_P - C_{32}Y_2 \cos\psi_P) + (Z_P - Z_Q) \cdot$$
$$\cdot (X_2 \sin\varphi_P \cos\vartheta_P + Y_2 \cos\varphi_P \cos\vartheta_P)] \Delta\vartheta_P +$$

$$+ [(X_Q - X_P)(B_{12}X_1 - B_{11}Y_1) + (Y_Q - Y_P)(B_{22}X_1 - B_{21}Y_1) +$$
$$+ (Z_Q - Z_P)(B_{32}X_1 - B_{31}Y_1)] \Delta\varphi_T +$$

$$+ [(X_Q - X_P)(-B_{21}X_1 - B_{22}Y_1 - B_{33}Z_1) + (Y_Q - Y_P) \cdot$$
$$\cdot (B_{11}X_1 + B_{12}Y_1 + B_{13}Z_1)] \Delta\psi_T +$$

$$+ [(X_Q - X_P)(B_{31}X_1 \sin\psi_T + B_{32}Y_1 \sin\psi_T + Z_1 \sin\psi_T \cos\vartheta_T) +$$
$$+ (Y_Q - Y_P)(-B_{31}X_1 \cos\psi_T - B_{32}Y_1 \cos\psi_T +$$
$$- Z_1 \cos\psi_T \cos\vartheta_T) + (Z_Q - Z_P)(X_1 \sin\varphi_T \cos\vartheta_T +$$
$$+ Y_1 \cos\varphi_T \cos\vartheta_T - Z_1 \sin\vartheta_T)] \Delta\vartheta_T. \qquad [A.3]$$

BIBLIOGRAFIA

(1) CAPUTO, M., 1972. – "*Orbit determinations from range measurements.* Da "Memorie della Società Astronomica Italiana", **XLIII**, 3, pp. 425-445.