La ripartizione dell'energia fra le sesse di un lago

(The energy distribution among the seiches of a lake)

G. PEZZOLI (*)

Ricevuto il 5 Marzo 1975

RIASSUNTO. — In questa nota è stato preso in esame in maniera approssimata il problema della ripartizione dell'energia fra le oscillazioni libere di un lago di diversa nodalità.

E ovvio che condizioni particolari possono influire sull'insorgere prevalente di una sessa piuttosto che di un'altra, tuttavia, statisticamente, la probabilità che si osservi l'uninodale è generalmente maggiore di quella relativa all'osservazione della binodale ecc., perché, sempre statisticamente, sono in media maggiori le ampiezze dell'uninodale rispetto alle altre.

La determinazione della ripartizione statistica delle energie, e quindi delle ampiezze, è lo scopo del presente lavoro.

SUMMARY. — This work studies by approximation the problem of the energy distribution among the seiches of a lake of various node.

It is obvious that particular conditions may affect the prevalent rise of one seiche rather than another, however, statistically the probability to observe the uninodale is generally bigger than the probability of observing the binodale etc.; because, still statistically the amplitudes of the uninodale are, on the average, bigger, compared with the others.

The determination of the statistical distribution of the energies and consequently the amplitudes, is the purpose of this work.

A complemento di precedenti indagini, mi sono proposto col presente lavoro, di esaminare, sia pure in modo approssimato, il modo di ripartirsi dell'energia totale tra le sesse di varie nodalità presenti in un lago o bacino, sia esso naturale che artificiale, ed anche in mari in cui si instaurino oscillazioni libere.

(*) Istituto di Idraulica e Costruzioni Idrauliche, Politecnico, Torino.

La ripartizione differenziata dell'energia alle varie frequenze fa sì, come è ben noto dalle osservazioni dirette, che la sessa uninodale, ad esempio, sia, in un dato lago, a parità di altre condizioni, ben più evidente della binodale, e questa della trinodale e così via.

Le ipotesi che generalmente si fanno nelle teorie idrodinamiche delle sesse possono così riassumersi: lunghi bacini (canali) di larghezza e profondità variabili; componente laterale del movimento orizzontale, normale alla linea di valle, trascurabile, ciò che presuppone il moto orizzontale verificarsi soltanto parallelamente all'asse x, che, in corrispondenza della linea di valle, sta nel piano orizzontale costituito dalla superficie libera del lago in quiete. Queste ipotesi si ritengono praticamente soddisfatte se non si verificano brusche variazioni né in larghezza e profondità, né lungo la linea di valle.

Per onde lunghe, rispetto alla lunghezza d'onda delle quali la profondità h del bacino sia piccola, l'accelerazione verticale si ritiene trascurabile. Conseguenza di questa ipotesi è che soltanto la pressione idrostatica risulta dinamicamente efficace; sono quindi da considerare soltanto le variazioni di pressione derivanti dalle variazioni di livello. Naturalmente, anche gli spostamenti orizzontali ξ sono uguali per tutte le particelle di una stessa sezione trasversale $S(x)$.

Per dislivelli η piccoli rispetto alle profondità h, l'equazione del movimento in un bacino generico assume la forma

$$\frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} = -g \frac{\partial \eta}{\partial x} \qquad [1]$$

L'equazione di continuità invece, se $b(x)$ indica la larghezza variabile del bacino misurata alla superficie libera, si scrive:

$$\eta = -\frac{1}{b(x)} \frac{\partial}{\partial x} [\xi \cdot S(x)] \qquad [2]$$

La soluzione di queste equazioni conduce ad un problema ai limiti del 2° ordine che notoriamente ha soluzioni soltanto per determinati autovalori di un parametro; nel nostro caso, questi valori sono i periodi delle possibili oscillazioni libere.

G. Chrystal ([1,3,8]) trasforma le equazioni [1] e [2], che mediante l'introduzione delle variabili

$$u = \xi \cdot S(x) \qquad [3]$$

$$v = \int_0^x b(x)\, dx \qquad [4]$$

forniscono

$$\frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} = g \frac{\partial}{\partial x} \left[\frac{1}{b(x)} \frac{\partial \{S(x) \cdot \xi\}}{\partial x} \right]$$

per cui moltiplicando per $S(x)$ e ponendo

$$S(x) \cdot b(x) = \sigma(v), \qquad [5]$$

dove x risulta, per la [4], funzione di v, si ottengono le equazioni del moto e di continuità sotto la forma:

$$\left\{ \begin{aligned} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} &= g\, \sigma(v) \frac{\partial^2 u}{\partial v^2} \\ \eta &= - \frac{\partial u}{\partial v} \end{aligned} \right. \qquad [6]$$

Se ora u è rappresentabile mediante la somma di una serie di semplici funzioni armoniche di t del tipo

$$u = \sum_1^\infty {}_n\, U_n(v) \sin \omega_n (t - t_n), \qquad \left(\omega_n = \frac{2\pi}{T_n} \right)$$

tale da rappresentare un'oscillazione stazionaria della massa, l'equazione di Chrystal assume la forma:

$$\sigma(v) \frac{d^2 U}{dv^2} + \frac{4\pi^2}{gT^2} U = 0 \qquad [7]$$

avendo soppresso l'indice n relativo all'ordine della sessa.

La curva rappresentata dalla funzione $\sigma(v)$ è detta da Chrystal curva normale del bacino d'acqua; la [7], con le posizioni

$$\frac{v}{a} = z, \qquad \frac{4\pi^2 a^2}{gT^2} = \lambda \qquad [8]$$

dove a è la superficie totale del lago e gli altri simboli noti e consueti, diviene

$$\frac{d^2 U}{dz^2} + \frac{\lambda U}{\sigma(z)} = 0 \qquad [9]$$

da integrarsi con le condizioni al contorno

$$U(0) = U(1) = 0 \tag{10}$$

Il problema è stato ampiamente trattato e risolto in varia guisa, sia numericamente che con metodi di tipo variazionale; tutti portano, sia pure con una certa complicazione nei calcoli, alla determinazione di valori T_n dei periodi delle varie sesse.

La conoscenza dei valori suindicati non è però quella che qui ci interessa direttamente, anche se i valori stessi sono fondamentali ai fini della ricerca.

Il fine che ci proponiamo di raggiungere è quello di una valutazione, sia pure di massima, della ripartizione dell'energia fra le sesse di varia nodalità e delle ampiezze possedute dalle medesime, a parità di sollecitazioni indotte nella massa liquida; mi sembra in effetti che l'argomento in questione non sia generalmente considerato dagli Autori che si sono finora occupati di simili questioni.

È noto che un'onda stazionaria può ritenersi provocata dalla sovrapposizione di due onde di egual lunghezza che si propagano in sensi opposti; considerazioni di carattere meccanico e statistico, hanno condotto Neumann, Pierson e altri ([4,5,6]) a stabilire per la variazione ΔE di energia media, compresa in una lunghezza d'onda, relativa ad una gamma di periodi ΔT, per onde dirette, la relazione:

$$\Delta E = K\, T^4\, e^{-2\left(\frac{a\,T}{V}\right)^2} \Delta T \tag{11}$$

dove $a = \frac{g}{2\,\pi}$, K è una costante da determinarsi sperimentalmente e V la velocità del vento che provoca le onde stesse; la [11] è riferita naturalmente all'unità di lunghezza di fronte d'onda piano e vale nell'ipotesi che la causa perturbante agisca sul mezzo liquido in modo aleatorio.

Dato che le sesse sono quasi sempre provocate da variazioni di pressione atmosferica, e quindi da venti, sfrutteremo l'ulteriore risultato di Neumann che per le onde molto lunghe assegna una relazione di proporzionalità fra V e T, ed in particolare

$$V \simeq \frac{g}{2\,\pi} \sqrt{\frac{2}{3}}\; T \tag{12}$$

Con la [12], la [11] diviene, indicando con K' una ulteriore costante:

$$\Delta E = K'\, T^4\, \Delta T \tag{13}$$

da cui considerando ΔE e ΔT al limite come differenziali e integrando, si ottiene per l'energia totale, per lunghezza d'onda e per unità di lunghezza di fronte un legame di proporzionalità tra E e T^5; vale a dire

$$E = K'' \, T^5 \qquad [14]$$

Il rapporto fra l'energia afferente alla sessa di nodalità n e quella posseduta dall'uninodale sarà quindi:

$$\frac{E_n}{E_1} = \left(\frac{T_n}{T_1} \right)^5 \qquad [15]$$

e di conseguenza poiché l'energia totale media di un'onda progressiva compresa nel dominio anzidetto (per l'onda stazionaria cambierebbe solo un fattore numerico), vale:

$$E = \frac{\gamma \, a^2 \, \lambda}{8} \qquad [16]$$

dove γ è il peso specifico del liquido, λ la lunghezza dell'onda e a la sua ampiezza, la [15] diviene

$$\left(\frac{T_n}{T_1} \right)^5 = \frac{a_n^2 \, \lambda_n}{a^2_1 \, \lambda_1} \qquad [17]$$

e poiché $\lambda_n = c \, T_n$ e c è pressoché costante per ogni onda, trattandosi di onde molto lunghe rispetto alla profondità ($c = \sqrt{g \, h}$), la [17] risulta

$$\frac{a_n}{a_1} = \left(\frac{T_n}{T_1} \right)^2 \qquad [18]$$

Le [15] e [18] forniscono i rapporti di energia e di ampiezza fra la sessa di ordine n.mo e quella di ordine 1, tuttavia Chrystal ha dimostrato che la [9], nel caso di curva normale $\sigma \, (z)$ data da una porzione di curva quartica del tipo

$$\sigma \, (z) = \sigma_o \, (1 \mp z^2)^2 \qquad [19]$$

è integrabile, e fornisce per il periodo T_n, il valore

$$T_n = \frac{T_o}{\sqrt{n^2 + \varepsilon}} \qquad [20]$$

dove T_o ed ε sono due costanti proprie del lago (o del golfo) oscillante ed ε 0 a seconda che il segno fra parentesi nella [19] è negativo o positivo.

La [20], pur essendo approssimata, e non essendo in generale possibile dedurre T_0 ed ε dalle costanti del sistema studiato, consente però di valutare T_0 ed ε quando siano noti, ad esempio, i valori di T_1 e T_2 e permette di conseguenza di valutare TK con $K > 2$.

Introducendo la [20] nella [18] è possibile scrivere immediatamente

$$\frac{a_n}{a_1} = \frac{1 + \varepsilon}{n^2 + \varepsilon} \qquad [21]$$

da cui si deduce, sia pure in via approssimata, che una sola costante, per ogni sistema liquido oscillante a pelo libero, è responsabile della distribuzione di ampiezze, e quindi di energia, fra le sesse di varia nodalità.

Non è facile, in genere, disporre di serie di ampiezze massime di sesse, dovute a cause aleatorie, e che non siano esaltate da particolari effetti di risonanza ecc. Molto spesso i dati sperimentali sono ottenuti da limnografi posti in luoghi che si rivelano buoni per captare sesse di assegnata nodalità, ma pessimi per sesse di nodalità diversa, ragion per cui è difficile e molto impreciso risalire alle ampiezze massime.

Per le maree dell'Alto Adriatico, da un recentissimo studio di P. Caloi (2) abbiamo dedotto i valori più attendibili per le prime 3 sesse; si ha:

$$\begin{cases} T_1 = 22^h\ 40^m \\ T_2 = 11^h\ 40^m \\ T_3 = \ \ 7^h\ 30^m \end{cases}$$

di conseguenza la costante caratteristica ε del mare, dal confronto fra [18] e [21] risulta

$$\varepsilon \simeq 0{,}08528.$$

Dall'altra nota ricerca di S. Polli (7) relativa allo stesso mare, ho tratto le ampiezze massime delle stesse sesse:

$$\begin{cases} a_1 = 0{,}94 \ \text{m} \\ a_2 = 0{,}20 \ \text{»} \quad \text{rilevate il giorno 28.1.1948} \\ a_3 = 0{,}12 \ \text{»} \end{cases}$$

Il confronto fra i valori $\frac{a_n}{a_1}$ teorici e sperimentali sono riportati nella tabella 1

TABELLA 1

Rapporto	Teorico	Sperimentale
a_2/a_1	0,2656	0,2127
a_3/a_1	0,1194	0,1276

nella quale è possibile osservare un soddisfacente accordo fra le misure e le determinazioni analitiche.

Occorre tuttavia molto maggior materiale sperimentale, ottenuto nelle ipotesi fatte, per poter confermare la validità delle [18] e [21].

BIBLIOGRAFIA

(1) CALOI P., 1948. – *Le sesse del lago di Garda.* « Annali di Geofisica », **I.**

(2) CALOI P., 1973. – *Sulle cause delle acque « alte » nell'Adriatico settentrionale con particolare riguardo alla laguna veneta.* « Annali di Geofisica », **XXVI.**

(3) CHRYSTAL G., 1905-06-07-08. – *On the hydrodynamical theory of Seiches* – Transactions of the Royal Society of Edinburgh, **XLI, XLV, XLVI.**

(4) NEUMANN G., 1953. – *On ocean wave spectra and new method of forecasting wind-generated waves.* Beach Erosion Board. Techn. Memo., **143.**

(5) PIERSON W. J., 1952. – *An unified mathematical theory for the analysis, propagation and refraction of storm-generated surface waves.* N. Y. Univer. College of Engineering Dep. of Meteor., New York.

(6) PIERSON W. J., NEUMANN G. e JAMES R. W., 1955. – *Practical methods for observing and forecasting Ocean Waves by means of wave spectra and statistics.* H. O. Pub. n° 603, U. S. Navy Hydrogr. Off.

(7) POLLI S., 1958. – *Le sesse nell'Adriatico.* « Annali di Geofisica », **X.**

(8) SUPINO G., 1965. – *Le reti idrauliche.* Ed. Patron, Bologna.