Elementi per una teoria dei giacimenti di vapore naturale

C. CONTINI

EQUAZIONI GENERALI DEL FLUSSO DEL VAPORE.

Il movimento dei fluidi negli strati porosi e permeabili del sottosuolo devè soddisfare innanzitutto alla *equazione di continuità*

$$\frac{\partial(\gamma V_x)}{\partial x}+\frac{\partial(\gamma V_y)}{\partial y}+\frac{\partial(\gamma V_z)}{\partial z}= -f\,\frac{\partial\gamma}{\partial\tau}\,, \qquad [1]$$

ove siano V_x, V_y e V_z le componenti della velocità del flusso rispettivamente secondo le direzioni degli assi ortogonali X, Y, Z del sistema cartesiano di riferimento, γ la densità del fluido, f la porosità del mezzo e τ il tempo.

Se supponiamo che il flusso avvenga secondo la legge di Darcy ossia che

$$V_x=-\frac{k}{\eta}\left(\frac{\partial p}{\partial x}-F_x\right)$$

$$V_y=-\frac{k}{\eta}\left(\frac{\partial p}{\partial y}-F_y\right) \qquad [2]$$

$$V_z=-\frac{k}{\eta}\left(\frac{\partial p}{\partial z}-F_z\right),$$

ove p pressione in atto, k permeabilità del mezzo, η viscosità del fluido, F_x, F_y e F_z componenti secondo le direzioni degli assi X, Y e Z di una forza F qualunque esterna agente sul fluido e, inoltre, supponiamo che la forza F ammetta potenziale, abbiamo

$$V_x=-\frac{\partial W}{\partial x}$$

$$V_y=-\frac{\partial W}{\partial y} \qquad [3]$$

$$V_z=-\frac{\partial W}{\partial z},$$

essendo indicato con W il *potenziale della velocità*

$$W=\frac{k}{\eta}\,(p+\varphi), \qquad [4]$$

φ funzione potenziale di F.

Dalla [1] otteniamo allora

$$\frac{\partial\gamma}{\partial x}\,\frac{\partial W}{\partial x}+\frac{\partial\gamma}{\partial y}\,\frac{\partial W}{\partial y}+\frac{\partial\gamma}{\partial z}\,\frac{\partial W}{\partial z}+ \gamma\Delta_2 W=f\,\frac{\partial\gamma}{\partial\tau}\,, \qquad [5]$$

ove

$$\Delta_2 W=\frac{\partial^2 W}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 W}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 W}{\partial z^2} \qquad [6]$$

Se il fluido in movimento è costituito da un liquido di compressibilità trascurabile e quindi con densità costante, poichè necessariamente è $\Delta_2\varphi = 0$, abbiamo la condizione

$$\Delta_2 p=\frac{\partial^2 p}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 p}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 p}{\partial z^2}=0\,. \qquad [7]$$

Nel caso che il fluido sia un gas perfetto, supposto che nell'espansione la densità e la pressione varino secondo la legge

$$p=\left(\frac{\gamma}{\gamma_u}\right)^m, \qquad [8]$$

ove γ_u sia la densità del fluido corrispondente alla pressione unitaria, abbiamo invece

$$\Delta_2\gamma^{m+1}=\frac{\partial^2\gamma^{m+1}}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\gamma^{m+1}}{\partial y^2}+\frac{\partial^2\gamma^{m+1}}{\partial z^2}= \frac{m+1}{m}\,f\,\frac{\eta}{k}\,\gamma_u^m\,\frac{\partial\gamma}{\partial\tau}\,, \qquad [9]$$

ammessa trascurabile l'influenza della gravità sulla densità del fluido. Se sostituiamo la pressione alla densità otteniamo per la [8]

$$\Delta_2 p^{\frac{m+1}{m}} = \frac{\partial^2 p^{\frac{m+1}{m}}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 p^{\frac{m+1}{m}}}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 p^{\frac{m+1}{m}}}{\partial z^2} =$$

$$= \frac{m+1}{m} f \frac{\eta}{k} p^{-\frac{m+1}{m}} \frac{\partial p}{\partial \tau} \,. \qquad [10]$$

La costante m è uguale all'unità quando l'espansione del gas è fatta a temperatura costante, espansione isotermica, ed è uguale al rapporto fra i calori specifici del gas a pressione costante c_p ed a volume costante c_v quando l'espansione è fatta senza scambio di calore, espansione adiabatica.

Le equazioni trovate definiscono le caratteristiche del flusso nei diversi punti del mezzo poroso per rispetto al tempo quando sono note le *condizioni al contorno* e le *condizioni iniziali*, le prime definite dalle caratteristiche del flusso in corrispondenza alla superficie di delimitazione del mezzo poroso considerato e le seconde dalle caratteristiche del flusso corrispondenti all'istante d'inizio della misura dei tempi.

La [7] non è altro che l'equazione di Laplace caratteristica delle funzioni armoniche: risulta quindi, nel caso particolare dei fluidi incompressibili, che la funzione W definita dalla [4] è il *potenziale della velocità* del flusso; quando la φ fosse nulla evidentemente il potenziale della velocità è la pressione p.

Se ammettiamo che il flusso dei fluidi avvenga secondo un regime stazionario, tale per cui nei diversi punti del suolo il fluido abbia velocità e caratteristiche fisiche costanti nel tempo, si annullano i termini in $\partial\tau$: quindi l'equazione di continuità si trasforma nella

$$\frac{\partial(\gamma V_x)}{\partial x} + \frac{\partial(\gamma V_y)}{\partial y} + \frac{\partial(\gamma V_z)}{\partial z} = 0 \qquad [11]$$

mentre la [9] e la [10] si trasformano rispettivamente nelle

$$\Delta_2 \gamma^{m+1} = 0 \qquad [12]$$

$$\Delta_2 p^{\frac{m+1}{m}} = 0 \,. \qquad [13]$$

Per l'equazione di Laplace, la quale trova applicazione in molti altri campi, come la gravimetria, la conduzione del calore, l'elettrostatica, l'elasticità, sono stati elaborati numerosi mezzi di calcolo e sono state date molte soluzioni particolari che ora possono essere utilizzate nello studio del flusso dei liquidi incompressibili secondo la [7]. Per le equazioni [12] e [13] invece non abbiamo nessun mezzo di calcolo e nessuna soluzione particolare: possiamo però ricavare delle soluzioni approssimate, utili per la pratica, se ammettiamo che le potenze $m+1$ di γ ed $(m+1)/m$ di p variano linearmente nel mezzo poroso e quindi risolviamo le equazioni di Laplace che risultano dalle [12] e [13] considerando le stesse potenze come i potenziali della velocità del flusso.

Dinamica dei giacimenti di vapore.

Vediamo ora quali condizioni d'equilibrio si creino in un mezzo M indefinito, omogeneo ed isotropo, di permeabilità k e conduttività termica $\varkappa$, quando nello stesso mezzo affluisca, mediante una *bocca di afflusso* sferica di raggio r_o, del vapore saturo secco alla pressione p_o, ammesso che: 1) il mezzo M sia saturato con un fluido di pressione p_a costante; 2) il vapore ad una certa distanza r_a dal centro della bocca di afflusso venga liquefatto, alla temperatura t_a e alla pressione p_a, e il calore ceduto al mezzo venga disperso per conduzione termica, 3) si stabiliscano delle condizioni d'equilibrio stazionario fra il flusso del vapore e il flusso del calore disperso.

Supposto che il vapore possa considerarsi un gas perfetto, otteniamo dalla [13], considerando come variabile la potenza $(m+1)/m$ della pressione e operando secondo le note modalità sviluppate nella teoria dei potenziali, l'equazione generale

$$r p^{\frac{m+1}{m}} = r_o p_o^{\frac{m+1}{m}} \,, \qquad [15]$$

ove p indichi la pressione del vapore nel mezzo M alla distanza r qualsiasi dal centro della bocca di afflusso, $r < r_a$.

La portata Q del vapore immesso nel mezzo M, costante, per la legge di Darcy è data in generale dalla

$$Q = -4\pi r^2 \frac{k}{\eta} \gamma \frac{\partial p}{\partial r}, \qquad [15]$$

per cui, essendo

$$\gamma \frac{\partial p}{\partial r} = \frac{m}{m+1} \gamma_u \frac{\partial p^{\frac{m+1}{m}}}{\partial r}, \qquad [16]$$

otteniamo

$$Q = 4\pi \frac{m}{m+1} \frac{k}{\eta} \gamma_u r_o p_o^{\frac{m+1}{m}}, \qquad [17]$$

od anche, per la [14],

$$Q = 4\pi \frac{m}{m+1} \frac{k}{\eta} \gamma_u r_a p_a^{\frac{m+1}{m}}. \qquad [18]$$

Vediamo da queste che la portata del vapore che il mezzo M può assorbire è proporzionale al raggio r_o della bocca di afflusso, alla potenza $(m+1)/m$ della pressione p_o e alla permeabilità k del mezzo M.

Il calore ceduto dal vapore al mezzo M, il quale deve essere disperso per conduzione, è dato dal prodotto del valore di Q, calcolato mediante la [17] o la [18], per la differenza fra il calore totale I_o del vapore alla bocca di afflusso e il calore totale J_s dell'acqua alla temperatura t_s del mezzo M alle grandi distanze dalla bocca di afflusso del vapore. Abbiamo allora dalla teoria della trasmissione del calore

$$Q(I_o - J_s) = 4\pi\varkappa r_a (t_a - t_s). \qquad [19]$$

La funzione che lega le temperature del vapore saturo alle pressioni per tutto l'intervallo delle temperature da 0° alla temperatura critica è molto complessa: se però consideriamo i valori relativi a un intervallo delle temperature meno esteso possiamo ridurre la funzione a una relazione del tipo

$$t_a = t'_a + C p_a^{\frac{1}{n}} - C p'_a p_a^{-\left(1-\frac{1}{n}\right)} = \sim C (p_n - p'_a)^{\frac{1}{n}}, \qquad [20]$$

ove t'_a valore dell'estremo inferiore dell'intervallo delle temperature considerato, p'_a la pressione corrispondente del vapore saturo, C ed n delle costanti, $n > 1$.

Sostituendo questa nella [19] otteniamo l'equazione

$$(I_o - J_s) \frac{m}{m+1} \frac{\gamma_u}{\eta} \frac{k}{\varkappa} p_a^{\frac{m+1}{m}} - C p_a^{\frac{1}{n}} + C p'_a p_a^{-\left(1-\frac{1}{n}\right)} - (t'_a - t_s) = 0, \qquad [21]$$

la quale ci permette di calcolare i rapporti fra i valori della permeabilità k, della conduttività $\varkappa$ e della pressione p_a che possono dar luogo ad un equilibrio stabile fra il vapore e il fluido contenuto in M.

Quando il rapporto $k/\varkappa$ ha un valore maggiore di quello dato dalla [21] il vapore che affluisce nel mezzo M non può essere tutto condensato se il raggio ha il valore dato dalla [18]: la temperatura allora aumenterà, il decremento della pressione diminuirà e aumenterà il raggio r_a, per cui risulterà in definitiva una diminuzione della portata e un aumento della dispersione del calore; ciò fino a tanto che si stabilirà un equilibrio fra il calore portato dal vapore e quello disperso per conduzione. Esattamente il contrario avviene quando il rapporto $k/\varkappa$ ha un valore minore di quello dato dalla [21].

È da osservare che in ogni caso si arriva a un equilibrio stabile.

In effetto nel mezzo M, che nella realtà dei fatti dobbiamo identificare col sottosuolo, la pressione non è costante, ma, in generale, variabile colla profondità secondo l'equilibrio idrostatico del fluido contenuto, normalmente acqua più o meno salata, ossia con legge lineare. Se indichiamo con H_o la profondità della bocca di afflusso rispetto alla tavola dell'acqua superficiale e con z le quote riferite alla stessa bocca di afflusso dei punti P dello spazio occupato dal vapore, che chiameremo con *giacimento*, possiamo calcolare le pressioni p_a dei punti P del contatto vapore-acqua ponendo semplicemente

$$p_a = \delta_a (H_o - z), \qquad [22]$$

ove δ_a peso specifico del fluido d'imbibizione e z positivo verso l'alto.

In questo caso il flusso del vapore avverrà ancora a raggiera intorno alla bocca di afflusso: poichè però il giacimento non avrà la forma sferica la [18] sarà valida soltanto se riferita ai tubi di flusso elementari: porremo perciò:

$$\delta Q = \frac{m}{m+1} \frac{k}{\eta} \gamma_u r_a p_a^{\frac{m+1}{m}} \delta\Omega \qquad [23]$$

ove $\delta\Omega$ angolo solido, molto piccolo, corrispondente all'ampiezza del tubo considerato, r_a distanza dal centro della bocca di afflusso del contatto vapore-acqua entro il tubo e p_a la pressione agente in corrispondenza allo stesso contatto.

Per le stesse ragioni porremo la [19] sotto la forma

$$(I_o - J_s)\, \delta Q = \varkappa r_a (t_a - t_s)\, \delta\Omega . \qquad [24]$$

Considerando allora costante il raggio, la pressione e la temperatura del contatto vapore-acqua nell'ambito dei diversi tubi di flusso, per ognuno di questi otteniamo un'equazione di condizione uguale alla [21] e possiamo ripetere quanto abbiamo detto pel caso della pressione costante circa le modalità secondo cui è raggiunto l'equilibrio stabile.

Nella realtà, poichè le superfici disperdenti variano per i diversi tubi di flusso, avremo, in generale, che le condizioni dell'equilibrio stabile potranno essere raggiunte soltanto coll'incurvamento verso l'alto di tutte le linee di flusso.

Evidentemente devono risultare al contatto vapore-acqua dei decrementi delle pressioni del vapore maggiori di quelli dell'acqua. Questa condizione, ammesso che l'equilibrio stabile del giacimento sia raggiunto in modo non troppo difforme da quello caratterizzato dalla [21], equivale alla condizione che la derivata della pressione p_a rispetto al raggio r_a risultante dalla [14] sia minore di quella risultante dalla [22]. Considerando la direzione verticale, cui corrispondono le condizioni meno favorevoli, otteniamo in conseguenza la condizione

$$r_a < \frac{m}{2m+1} H_o . \qquad [25]$$

Ammesso che l'equilibrio del giacimento sia raggiunto in modo conforme alla [21] otteniamo per la superficie limite del giacimento l'equazione

$$(x^2 + y^2 + z^2) \left(H_o - z \right)^{2\frac{m+1}{m}} - r_o^2 \left(\frac{P_o}{\delta_a} \right)^{2\frac{m+1}{m}} = 0 \qquad [26]$$

essendo x, y e z le coordinate riferite a un sistema di assi cartesiani ortogonali coll'origine coincidente col centro della bocca d'afflusso e l'asse Z verticale e positivo verso l'alto.

Come si vede, risulta una forma assimilabile, approssimativamente, a una cardioide di rotazione coll'asse polare verticale e il polo coincidente colla bocca di afflusso.

Risultano per la direzione verticale delle distanze del contatto vapore-acqua dal centro della bocca di afflusso che soddisfano all'equazione

$$r_a^{\frac{2m+1}{m+1}} - H_o r_a^{\frac{m}{m+1}} + r_o^{\frac{m}{m+1}} \frac{p_o}{\delta_a} = 0$$

risolubile per via grafica. Per le direzioni orizzontali risulta invece la distanza

$$r_a = r_o \left(\frac{p_o}{\delta_a H_o} \right)^{\frac{m+1}{m}} .$$

Naturalmente queste distanze devono soddisfare la condizione [25]. Quando avvenisse che in una direzione le distanze superano quella limite della [25] le pressioni del vapore divengono maggiori di quelle dell'acqua a contatto e quindi si ha la rapida dilatazione del giacimento nella stessa direzione: colla dilatazione risulta un'accentuazione dello squilibrio delle pressioni e quindi una maggior spinta di dilatazione e così di seguito.

È importante notare che, qualunque siano le caratteristiche fisiche del mezzo M: 1) possono sempre formarsi dei giacimenti di vapore in condizioni d'equilibrio stabile, sebbene di dimensioni ridotte conformemente alla [25]; 2) quando in una direzione venisse superata la distanza limite della [25] e il giacimento subisse una rapida dilatazione nella stessa direzione, nelle altre direzioni le dimensioni del giacimento si adeguerebbero sempre alle condizioni dell'equilibrio secondo le [22], [23] e [24]; 3) quando dopo un'espansione la portata della bocca d'afflusso diminuisse in modo che la [24] possa essere soddisfatta per valori di r_a che soddisfano pure la [25] l'equilibrio del giacimento si adeguerà alle [22], [23] e [24] e quindi diverrà stabile; 4) risulta dalla [25] che la potenza possibile dei giacimenti cresce approssimativamente in ragione della quarta potenza della profondità della bocca d'afflusso.

Il raggio r_o della bocca d'afflusso agli effetti dei nostri calcoli può essere preso qualunque, purchè piccolo e corrispondente ad una pressione p_o nota: ciò in considerazione che ogni superficie equipotenziale, ossia di pressione costante, può essere considerata come origine del flusso del vapore e che per le piccole distanze le equipotenziali si possono assimilare a superfici sferiche.

Quando uno stesso giacimento fosse alimentato da due o più bocche le condizioni dell'equilibrio si determinano semplicemente tenendo presente che le pressioni e le temperature sono i potenziali del flusso del vapore e del calore rispettivamente e che di conseguenza i valori che risultano colle formole sopra trovate per le diverse bocche possono essere sommati come semplici scalari.

Nel caso particolare che il complesso delle bocche d'afflusso del vapore sia assimilabile a un'unica bocca di forma cilindrica di raggio ϱ_o e pressione p_o risulta l'equazione generale

$$p^{\frac{m+1}{m}} = p_u^{\frac{m+1}{m}} - \frac{p_u^{\frac{m+1}{m}} - p_o^{\frac{m+1}{m}}}{\log. \varrho_o - \log. \varrho_u} \log \frac{\varrho}{\varrho_u}, \qquad [27]$$

essendo indicato con p_u la pressione alla distanza ϱ_u dall'asse della bocca e con la p la pressione alla distanza generica ϱ.

La portata q del vapore per unità di lunghezza risulta in tale caso

$$q = 2\pi\varrho \frac{k}{\eta} \gamma \frac{\partial p}{\partial \varrho} \qquad [28]$$

e di conseguenza per la [16] e per la [27]

$$q = 2\pi \frac{m}{m+1} \frac{k}{\eta} \gamma_u \frac{p_u^{\frac{m+1}{m}} - p_o^{\frac{m+1}{m}}}{\log \varrho_o - \log \varrho_u}, \qquad [29]$$

od anche, indicando coll'indice a i valori relativi al contatto vapore-acqua,

$$q = 2\pi \frac{m}{m+1} \frac{k}{\eta} \gamma_u \frac{p_o^{\frac{m+1}{m}} - p_a^{\frac{m+1}{m}}}{\log \varrho_a - \log \varrho_o}. \qquad [30]$$

Uguagliando il calore portato dal vapore a quello disperso nel mezzo M otteniamo

$$q\,(I_o - J_s) = 2\pi\varkappa \frac{t_o - t_a}{\log \varrho_a - \log \varrho_o}, \qquad [31]$$

dalla quale tenendo conto delle [20] e [30] ricaviamo l'equazione

$$(I_o - J_m) \frac{m}{m+1} \frac{\gamma_u}{\eta} \frac{k}{\varkappa} p_a^{\frac{m+1}{m}} - \qquad [32]$$
$$- C p_a^{\frac{1}{n}} + C p'_a p_a^{\left(1 - \frac{1}{n}\right)} - (t_a' - T_s) = 0,$$

ove

$$T_s = t_o - (I_o - J_s) \frac{m}{m+1} \frac{\gamma_u}{\eta} \frac{k}{\varrho} p_o^{\frac{m+1}{m}},$$

la quale differisce dalla [21] soltanto per il termine noto.

Possiamo ripetere quindi tutte le considerazioni fatte per i giacimenti di forma sferica.

Ammesso che la pressione vari colla profondità secondo la [22] e che la bocca di afflusso sia orizzontale, dal confronto dei decrementi delle pressioni, otteniamo la condizione per la stabilità dell'equilibrio nella direzione verticale

$$(H_o - \varrho_a)^{\frac{1}{m}} < \frac{m}{m+1} \delta_a^{-\frac{m+1}{m}} \frac{p_u^{\frac{m+1}{m}} - p_o^{\frac{m+1}{m}}}{\log \varrho_o - \log \varrho_u}. \qquad [33]$$

La sezione normale del giacimento, nell'ipotesi che l'equilibrio sia conforme alla [32], risulta di forma somigliante a quella della sezione del giacimento che si ha per una bocca sferica: una specie di cardioide coll'asse polare verticale e la traccia della bocca d'afflusso coincidente col polo.

La potenza possibile per questi giacimenti risulta, per la [33], all'incirca crescente colla terza potenza della profondità della bocca d'alimentazione.

Nel caso che il complesso delle bocche d'afflusso sia assimilabile ad un'unica bocca di forma piana infinitamente estesa risulta l'equazione generale

$$p^{\frac{m+1}{m}} = p_o^{\frac{m+1}{m}} - \left(p_o^{\frac{m+1}{m}} - p_n^{\frac{m+1}{m}} \right) \frac{d}{d_n} ,$$

ove p_n pressione alla distanza d_n dalla bocca e p pressione alla distanza d, e risulta l'equazione per l'equilibrio fra calore apportato dal vapore e calore disperso per conduzione

$$q_e \,(I_o - J_s) = \varkappa \frac{t_a - t_a}{d_a} \cdot$$

Da queste equazioni potremmo evidentemente ricavare un'equazione simile alle [21] e [32]. Rilsuta però, dal confronto dei decrementi delle pressioni, che in effetto con una bocca piana infinita non si può formare nel sottosuolo nessun giacimento di vapore. Abbiamo infatti la condizione:

$$d_a > H_o - \delta_a^{-\cdot(m+1)} \left[\frac{m}{m+1} \, \frac{p_o^{\frac{m+1}{m}} - p_n^{\frac{m+1}{m}}}{d_n} \right] \cdot$$

In tutte le considerazioni precedenti abbiamo implicitamente supposto come trascurabile l'influenza della trasmissione del calore per conduzione del mezzo nell'ambito dei giacimenti: in effetto tale influenza non è trascurabile e di conseguenza si ha, in generale, l'aumento delle temperature ai margini dei giacimenti e della dispersione per conduzione e quindi una riduzione delle dimensioni dei giacimenti stessi.

Influenza delle eterogeneità e dell'anisotropia del mezzo poroso.

Si abbia una bocca di vapore sferica di centro S in un mezzo M di permeabilità k a contatto secondo un piano ζ con un mezzo M' di permeabilità k' e calcoliamo la distribuzione delle pressioni del vapore che risulta.

Abbiamo, per la nota teoria delle immagini di Maxwell, se ancora ammettiamo trascurabile l'influenza della trasmissione del calore per conduzione nell'ambito del giacimento, adottando per i riferimenti il sistema di assi cartesiani ortogonali avente il piano XY coincidente con ζ e l'asse Z passante per S, positivo da ζ verso S stessa,

$$p^{\frac{m+1}{m}} = \frac{G}{\sqrt{\varrho^2 + (z - z_o)^2}} - \varphi \frac{G}{\sqrt{\varrho^2 + (z + z_o)^2}} \qquad [34]$$

$$p'^{\frac{m+1}{m}} = \varphi' \frac{G}{\sqrt{\varrho^2 + (z - z_o)^2}}$$

ove siano p e p' le pressioni dei punti cui corrispondono i valori di z rispettivamente positivi (mezzo M) e negativi (mezzo M') z_o la distanza di S da ζ,

$$\varrho = \sqrt{x^2 + y^2} ,$$

G una costante da determinarsi, φ e φ' i *fattori d'immagine*, funzioni della permeabilità dei due mezzi a contatto,

$$\varphi = \frac{k - k'}{k + k'} , \; \varphi' = \frac{2k}{k + k'} \cdot \qquad [35]$$

È facile verificare che le [34] soddisfano entrambe all'equazione di Laplace, se consideriamo lineari le potenze $(m+1)/m$ delle pressioni, e soddisfano alle condizioni al contorno, le quali ultime si concretano ponendo uguali le pressioni nei due mezzi lungo la superficie di contatto ζ, ossia

$$p = p' , \qquad [36]$$

e ponendo uguale nei due mezzi il flusso di vapore concatenato ad ogni elemento di ζ, ossia

$$k \frac{\partial p^{\frac{m+1}{m}}}{\partial z} = k' \frac{\partial p'^{\frac{m+1}{m}}}{\partial z} \cdot \qquad [37]$$

La costante G può essere determinata quando è nota la potenza della bocca oppure è nota la pressione in un punto di coordinate date, per esempio del piano ζ.

Quando la bocca di afflusso del vapore fosse cilindrica e il piano ζ fosse parallelo alla stessa risultano le formole, riferite al sistema di assi cartesiani avente il piano XY ancora coincidente con ζ e l'asse Z passante per l'asse della bocca,

$$p^{\frac{m+1}{m}} = - R \log \sqrt{\varrho^2 + (z - z_o)^2} - \\ - \varphi \, R \log \sqrt{\varrho^2 + (z + z_o)^2} \qquad [38]$$

$$p'^{\frac{m+1}{m}} = - \varphi' \, R \log \sqrt{\varrho^2 + (z - z_o)^2} \, ,$$

essendo z_o la distanza dell'asse della sorgente da ζ, R una costante da determinare nello stesso modo indicato per G, ϱ, φ e φ' definite come sopra.

Avendo diverse bocche, anche di forma diversa, le fornole risolutive saranno date semplicemente dalla sommatoria dei termini relativi a tutte le bocche simili a quelli delle [34] oppure delle [38], a seconda della forma delle bocche.

Per il flusso del calore, trasmesso per conduzione, valgono esattamente le medesime formule quando si sostituiscano nelle stesse alle potenze $(m+1)/m$ delle pressioni p e p' le differenze $t - t_s$ e $t' - t_s$ e alle permeabilità k e k' le conduttività $\varkappa$ e $\varkappa$ dei due mezzi rispettivamente.

La [37] e la corrispondente che si ottiene considerando le conduttività possono essere messe sotto la forma

$$\frac{\operatorname{tg} \alpha}{k} = \frac{\operatorname{tg} \alpha'}{k'} \, , \quad \frac{\operatorname{tg} \alpha}{\varkappa} = \frac{\operatorname{tg} \alpha'}{\varkappa} \, , \qquad [39]$$

ove α ed α' indichino gli angoli formati dalle linee di flusso colla normale alla superficie ζ rispettivamente nei mezzi M ed M'.

Queste formule costituiscono in effetto le leggi secondo cui avviene la rifrazione delle linee di flusso lungo le superfici ζ di separazione dei mezzi con caratteristiche diverse. Nel caso che invece dei flussi si considerino le superfici isotermiche o isobariche valgono le stesse formule [38] quando si indichino con α ed α' gli angoli formati dalle normali alle stesse superfici colla normale alla superficie ζ.

I terreni costituenti il sottosuolo in generale non sono isotropi nè rispetto alla permeabilità nè rispetto alla conduttività termica: ciò come conseguenza sia del processo di scistizzazione che le forti pressioni in atto nel sottosuolo sempre comportano, qualunque sia la specie delle rocce, sia del processo della sedimentazione e della disposizione laminare delle eterogeneità che lo stesso comporta, per le rocce di origine sedimentaria. In generale abbiamo che i valori della permeabilità e della conduttività sono maggiori nella direzione della scistizzazione e della stratificazione che non nelle direzioni ortogonali.

Se ammettiamo che il mezzo sia omogeneo, pur essendo anisotropo, e le sorgenti del flusso siano puntiformi risultano delle superfici isobariche ed isotermiche ellissoidiche approssimativamente di rotazione con gli assi equatoriali e polari che stanno fra loro secondo i rapporti

$$a = \sqrt{\frac{k_1}{k_2}} \quad \text{e} \quad a = \sqrt{\frac{\varkappa_1}{\varkappa_2}} \, ,$$

i quali, per analogia con quanto si fa in geoelettrica, possono essere chiamati *coefficienti d'anisotropia*, essendo indicati con k_1 e $\varkappa_1$ i valori massimi della permeabilità e della conduttività e con k_2 e $\varkappa_2$ i valori minimi.

I valori di a per le rocce d'origine sedimentaria comunemente incontrate nelle ricerche petrolifere oscillano intorno al valore medio di 1,25, sia che si tratti di permeabilità sia che si tratti di conduttività termica, però con campi di oscillazione diversi, dall'unità fino a 4 nel primo caso e dall'unità fino a 2 nel secondo caso; non è raro trovare per la permeabilità dei valori anche superiori alla decina.

Risulta dalle considerazioni sopra fatte che, in generale, la presenza nel sottosuolo di una eterogeneità di permeabilità maggiore di quella del mezzo M agisce come attrazione delle linee di flusso del vapore e quindi peggiora le condizioni dell'equilibrio dei giacimenti; viceversa per le eterogeneità di permeabilità minore. Il contrario avviene se si considerano le eterogeneità nei confronti della conduttività termica.

La superficie del suolo agisce come uno strato di permeabilità e di conduttività termica infinite, e riguardo ai giacimenti esercita un'influenza in complesso negativa sulla stabilità dell'equilibrio.

Un effetto generalmente favorevole alla stabilità dell'equilibrio abbiamo dalla anisotropia dei terreni quando la stratificazione è orizzontale o suborizzontale e viceversa quando la stratificazione è verticale o subverticale.

Quando il piano ζ passasse per il centro della bocca sferica o per l'asse della bocca cilindrica del giacimento e il mezzo M' fosse pochissimo o punto permeabile il giacimento avrebbe nel mezzo M la forma e le dimensioni pressochè corrispondenti a quelle che risultano per il mezzo omogeneo di cui abbiamo detto al paragrafo precedente mentre nel mezzo M' avrebbe una configurazione simile, raccordata secondo le leggi della rifrazione [39], ma con spessori minimi. Per i valori di k' non molto piccoli le forme e le dimensioni nei due mezzi, le quali si influenzano reciprocamente, possono essere determinate soltanto applicando le formole che più sopra abbiamo trovato.

Se i mezzi presenti nel sottosuolo sono tre e le superfici di contatto si intersecano in corrispondenza alla bocca di afflusso del vapore è facile immaginare la configurazione che risulta per il giacimento, però analiticamente noi non sappiamo dare la soluzione se non nel caso che uno dei mezzi abbia permeabilità nulla.

Una delle configurazioni più semplici che si possano immaginare per un giacimento è quella che risulta dalla sovrapposizione di un mezzo permeabile, privo di faglie, a un mezzo pochissimo o punto permeabile, con delle faglie in corrispondenza alle quali si trovano le bocche del vapore, sferiche o cilindriche. In tale caso, ammesso che la superficie di contatto dei mezzi sia piana e orizzontale, risulta evidentemente la forma della cardioide di rotazione o cilindrica regolare relativa ai mezzi omogenei troncata nella parte inferiore al contatto col mezzo impermeabile.

Se con una simile configurazione noi ammettiamo che il giacimento, nel suo regolare sviluppo, raggiunga la superficie del suolo, questa provoca un forte richiamo verso l'alto delle linee di flusso, le quali si dispongono verticali in corrispondenza ad essa, e la cardioide acquista la forma di un pennello rivolto verso l'alto, di rotazione o cilindrica, a seconda del tipo della bocca d'afflusso del vapore.

Quando viceversa il giacimento raggiungesse uno strato di permeabilità minima o nulla l'equilibrio del giacimento risulta perfettamente stabile e indipendente dall'estensione che potesse assumere: in tale caso le linee di flusso tendono a disporsi parallele allo strato e la cardioide si fa molto appiattita, simile ad una patera romana per una bocca sferica, e cilindrica con sezione simile a quella della patera per una bocca cilindrica.

Per i valori intermedi della permeabilità evidentemente la forma che risulterà per il giacimento sarà intermedia e si avvicinerà a quella che si ha colla presenza della superficie del suolo o di uno strato impermeabile a seconda se la permeabilità è più o meno elevata.

Se lo strato eterogeneo poco o punto permeabile raggiunto è piegato ad anticlinale oppure a cupola il giacimento risulta chiuso e simile, almeno nell'apparenza, a quelli più comuni che si trovano per il petrolio e il metano. Tutte le configurazioni caratteristiche dei giacimenti di petrolio e metano possono evidentemente dare luogo alla formazione di giacimenti di vapore; quindi possiamo avere i giacimenti a trappola originati per faglia oppure per inconformità, i giacimenti a pinchout per discordanza stratigrafica o di porosità, i giacimenti collegati ai reefs, ai delta, ai domi di sale, ecc. sempre in condizioni di equilibrio perfettamente stabile, sebbene in generale con capacità limitate.

I giacimenti di Larderello, a quanto ci è dato sapere, sono alimentati attraverso faglie in terreni poco porosi e sono protetti verso l'alto da uno strato superficiale di argille impermeabili le quali ne rendono l'equilibrio stabile e indipendente dalle dimensioni.

È importante notare che in condizioni di regime stazionario il vapore nei giacimenti, qualunque sia la configurazione di questi, si condensa sempre in corrispondenza alle medesime zone e che in queste, quindi, si depositeranno nei pori delle rocce le sostanze contenute nel vapore stesso che non sono solubili nell'acqua di condensazione, formando a poco a poco delle incrostazioni le quali ridurranno la porosità e aumenteranno la compattezza delle rocce. A fenomeni del genere possiamo attribuire la formazione delle *zone di callo*, con rocce molto dure e compatte, che i perforatori della *Larderello* incontravano sempre, quando perforavano con carotaggio continuo, nelle argille al contatto col vapore.

Produzione dei giacimenti.

Consideriamo ora il caso di un giacimento di vapore, molto profondo sotto la superficie del suolo, il quale venga raggiunto da un sondaggio di esplorazione.

L'approssimarsi del pozzo al giacimento di vapore sarà in generale accusato dall'aumento graduale delle temperature dei fanghi di perforazione: raggiunto il giacimento il pozzo entrerá in produzione di vapore appena verrà svuotato dei fanghi stessi.

Indichiamo con p_1 la pressione che in conseguenza del regime di erogazione adottato risulta mediamente alla distanza r_1 dalla bocca del pozzo O_1. Il giacimento sia alimentato da un'unica bocca caratterizzata dalla pressione media p_1 in corrispondenza alla distanza r_1 dal centro O_1 della bocca stessa.

In condizioni di regime stazionario, supposto il terreno omogeneo ed isotropo, la distribuzione delle pressioni nel giacimento risulta approssimativamente conforme alla seguente equazione, la quale si ottiene dalla differenza dei potenziali dei flussi relativi alla bocca di alimentazione e al pozzo in erogazione,

$$p^{\frac{m+1}{m}} = \frac{r_o\, p_o^{\frac{m+1}{m}}}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}} - \frac{r_1\, p_1^{\frac{m+1}{m}}}{\sqrt{(x-x_o)^2+(y-y_o)^2+(z-z_o)^2}}, \qquad [40]$$

riferita a un sistema di assi cartesiani ortogonali avente l'origine al centro della bocca di alimentazione; x_o, y_o, z_o coordinate del centro della bocca del pozzo di erogazione.

Tale equazione, per le [17] e [18], può anche essere posta sotto la forma

$$4\pi \frac{m}{m+1} \frac{k}{\eta} \gamma_u\, p^{\frac{m+1}{m}} = \frac{Q_o}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}} - \frac{Q_1}{\sqrt{(x-x_o)^2+(y-y_o)^2+(z-z_o)^2}}, \qquad [41]$$

essendo Q_o e Q_1 le portate della bocca di alimentazione e del pozzo di erogazione rispettivamente.

Per un numero n qualsiasi di pozzi d'erogazione e un numero u pure qualsiasi di bocche di alimentazione le pressioni p entro il giacimento, ammesso che questo sia continuo e in condizioni di regime stazionario, sono date dalla

$$\begin{aligned}4\pi \frac{m}{m+1} \frac{k}{\eta} \gamma_u\, p^{\frac{m+1}{m}} &= \frac{Q'}{\sqrt{(x-x')^2+(y-y')^2+(z-z')^2}} + \\ &+ \frac{Q''}{\sqrt{(x-x'')^2+(y-y'')^2+(z-z'')^2}} + \ldots \\ &+ \frac{Q^{(u)}}{\sqrt{(x-x^{(u)})^2+(y-y^{(u)})^2+(z-z^{(u)})^2}} - \\ &- \frac{Q_1}{\sqrt{(x-x_1)^2+(y-y_1)^2+(z-z_1)^2}} - \\ &- \frac{Q_2}{\sqrt{(x-x_2)^2+(y-y_2)^2+(z-z_2)^2}} - \ldots \\ &- \frac{Q_n}{\sqrt{(x-x_n)^2+(y-y_n)^2+(z-z_n)^2}},\end{aligned} \qquad [42]$$

essendo Q', Q'', ... $Q^{(u)}$ le portate delle bocche di alimentazione aventi i centri rispettivamente di coordinate x', y', z', x'', y'', z'', ... $x^{(u)}$, $y^{(u)}$, $z^{(u)}$, riferite a un sistema di assi cartesiani ortogonali qualsiasi, Q_1, Q_2, ... Q_n le portate erogate dai pozzi aventi le bocche coi centri rispettivamente di coordinate x_1, y_1, z_1, x_2, y_2, z_2,

. . . . . . x_n , y_n , z_n riferite allo stesso sistema di assi.

L'equilibrio fra il calore apportato dalle bocche d'afflusso, quello asportato dai pozzi d'erogazione e quello disperso per conduzione, ammesso che la pressione dell'acqua circostante sia p_a, è raggiunto quando, approssimativamente,

$$(Q' + Q'' \ldots\ldots + Q^{(n)} - Q_1 - Q_2 - \\ - \ldots Q_n)(I_n - J_s) = 4\,\pi\,\varkappa\,R_a\,(t_a - t_s)\,, \qquad [43]$$

essendo R_a il raggio medio del giacimento, quale risulta dalla [42] ponendo $p = p_a$ costante, e t_a la temperatura del vapore saturo alla pressione p_a .

Formule simili si ottengono se si considerano giacimenti alimentati da bocche cilindriche in erogazione mediante pozzi con bocche sferiche oppure cilindriche, queste ultime ottenute colla perforazione della colonna per un lungo tratto.

Ammessa variabile la pressione del mezzo in conformità dell'equilibrio idrostatico, secondo la [22], si ottengono delle condizioni del tutto simili alle [25] e [33].

È facile convincersi che in ogni caso le condizioni dell'equilibrio dei giacimenti risultano notevolmente migliorate, per rispetto alla stabilità, quando i giacimenti stessi vengono messi in produzione, qualunque sia il numero di pozzi d'erogazione e delle bocche d'alimentazione.

Per la pratica è ora utile notare che le pressioni dei pozzi, misurate a testa chiusa, possono variare per effetto delle tre cause seguenti: I) riduzione delle dimensioni dei giacimenti conseguente alla messa in produzione, in conformità della [43]; II) maggiori portate richieste dalle bocche d'alimentazione conseguenti ai più rapidi decrementi delle pressioni che risultano dalla presenza dei pozzi, secondo la [15]; III) diminuzione della pressione all'origine delle bocche d'alimentazione; le prime due indipendenti dalla potenzialità dei giacimenti e l'ultima, invece, da mettersi in relazione, in generale, con una diminuzione della stessa potenzialità. Naturalmente tali diminuzioni di pressione possono anche portare all'allagamento dei pozzi più periferici dei giacimenti.

Riguardo al regime da adottare per l'erogazione osserviamo che: *a*) i pozzi in produzione con un lungo tratto perforato della colonna provocano diminuzioni delle pressioni sensibilmente minori di quelle dei pozzi in produzione colla sola bocca estrema, a parità di produzione di vapore; *b*) le portate erogabili dai pozzi per una stessa pressione o, ciò che è lo stesso, le pressioni in pozzo per le stesse portate di erogazione sono in generale crescenti al diminuire delle distanze dalle bocche d'alimentazione, approssimativamente in ragione dell'inverso delle distanze per la forma sferica e in ragione dell'inverso del logaritmo delle distanze per la forma cilindrica delle bocche d'alimentazione; *c*) i pozzi messi in produzione con pressioni minori di quelle corrispondenti all'equilibrio idrostatico possono venire raggiunti dalle acque dei *coni di risucchio* che si generano ed essere compromessi nella produttività ciò indipendentemente dalle diminuzioni delle pressioni di cui più sopra abbiamo detto.

Facciamo notare infine che per la coltivazione dei giacimenti di vapore riuscirà, in generale, di scarsa utilità la tecnica sviluppata per i giacimenti di metano, ora molto progredita, date le condizioni d'equilibrio sostanzialmente diverse: equilibrio dinamico con giacimenti parzialmente o totalmente aperti per il vapore ed equilibrio statico con giacimenti ermeticamente chiusi per il metano.

Conclusioni pratiche

Possiamo riassumere come segue i risultati pratici ai quali siamo pervenuti:

1) si possono formare dei giacimenti di vapore in equilibrio stabile anche in un mezzo omogeneo ed isotropo aperto in tutte le direzioni, con estensioni dell'ordine di ½ ÷ ⅓ della profondità della bocca o del complesso delle bocche di adduzione del vapore; la forma di tali giacimenti, nel caso di una bocca sferica di alimentazione, è assimilabile a quella della cardioide di rotazione avente l'asse verticale e il polo coincidente colla bocca;

2) i giacimenti limitati verso l'alto da strati impermeabili, orizzontali o suborizzontali, sono sempre in equilibrio stabile,

qualunque siano le loro dimensioni, e quindi possono acquistare capacità anche molto grandi quando le portate delle bocche di adduzione sono adeguate; i giacimenti di Larderello sono di questa specie;

3) le configurazioni dei giacimenti possono essere qualsiasi ed occasionalmente possono essere del tipo chiuso simili a quelle dei giacimenti di petrolio e di metano, ad anticlinale, a cupola, a trappola, a pinchout, ecc.: in generale però saranno caratterizzate dalla presenza di rotture del terreno in corrispondenza delle quali si trovano le bocche del vapore;

4) i sondaggi che raggiungono i giacimenti di vapore non accusano, in generale, nessuna particolare variazione del regime di perforazione e possono dimostrare la presenza del vapore soltanto mediante prove apposite, con svuotamento dai fanghi di perforazione o con packer;

5) le differenze fra le pressioni dei pozzi di uno stesso giacimento, misurate a testa chiusa (a pozzo chiuso), e le pressioni idrostatiche del mezzo per le profondità delle bocche relative sono crescenti dai pozzi periferici a quelli centrali dei giacimenti: da ciò la possibilità di individuare, almeno approssimativamente, la posizione delle bocche di alimentazione;

6) i giacimenti diminuiscono le dimensioni quando sono messi in produzione come conseguenza delle diverse condizioni d'equilibrio che risultano: avvenendo quindi che, al progredire della produzione, i pozzi più periferici sono raggiunti dalle acque non si deve senz'altro dedurre, come usasi fra i petrolieri, che i giacimenti sono in fase di esaurimento;

7) i pozzi anche se ubicati in posizioni centrali dei giacimenti non debbono essere messi in produzione con pressioni alla bocca inferiore minori di quelle idrostatiche del mezzo per le profondità corrispondenti onde evitare di richiamare in pozzo le acque del mezzo stesso.

RIASSUNTO

Vengono date le equazioni generali del flusso del vapore nei mezzi porosi e vengono determinate le possibili condizioni d'equilibrio dei giacimenti di vapore naturale nel sottosuolo. Detti giacimenti possono formarsi in qualsiasi terreno, anche se aperto in tutte le direzioni, però risulta anche che le grandi capacità possono aversi soltanto quando degli strati impermeabili orizzontali o poco inclinati ne limitano lo sviluppo verso l'alto.

Vengono quindi analizzate le perturbazioni dell'equilibrio dei giacimenti quando questi sono messi in produzione con uno o più pozzi. Infine vengono elencate le conclusioni di interesse pratico per le ricerche dei giacimenti nel sottosuolo e per la razionale coltivazione degli stessi.

ABSTRACT

The general formulas are given according to which steam is known to flow through porous means and the possible balance conditions of natural umderground steam beds are discussed.

Although such beds may form in all sorts of soil structures, including those opened in all directions, the fact has been established that no large-size formations may occur unless the upward development of the bed is limited by the presence of some impermeable layers arranged horizontally or at a small angle with the horizontal.

The balance-upsetting effects exerted on these steam beds when one or more wells are drilled to exploit them are discussed.

Finally, such conclusions are drawn as may be of a practical interest in locating and exploiting underground steam formations.

BIBLIOGRAFIA

CARSLAW, H. S. and JAEHER, J. C., *Conduction of heat in solids.* Clarendon Press, Oxford, 1950.

DE MARCHI, G., *Idraulica,* Vol. I, Parte II, Hoepli, Milano, 1955.

FAGGIANI, D., *Trasmissione del calore.* Editrice Politecnica Tamburini, Milano, 1946.

HOUPEURT, A., *Elements de mécanique des fluides dans les milieux poreux.* « Revue Inst. Franc. Pétr. », Vol. 10, 1955.

JAKOB, M., *Heat transfer,* Wiley, New York, 1950.

MUSKAT, M., *The flow of omogeneous fluids through porous media,* Edwards and Arbor, Michigan, 1946.