

Sulla « correzione per la gravità » nelle misure con bilance magnetiche

A. NORINELLI

1. - Nei rilievi magnetici di dettaglio l'influenza delle variazioni della accelerazione di gravità (che in seguito chiameremo brevemente variazioni della gravità) è praticamente trascurabile nella determinazione delle variazioni del campo magnetico terrestre (c.m.t.), effettuate a mezzo di bilance magnetiche.

Nel caso però di rilevamenti regionali in cui, partendo da un'unica stazione base, si pretenda elevata precisione, o nel caso in cui si vogliano ripetere o istituire, a mezzo di bilance, stazioni magnetiche fondamentali, come già auspicato (¹), non si può fare a meno di tener conto, nella riduzione delle misure, anche della variazione di gravità.

Nella presente Nota si studia appunto l'influenza di detta variazione sui dati di osservazione sia per la componente verticale che per quella orizzontale del c.m.t.

2. - Nei variometri magnetici, al momento meccanico, provocato dal c.m.t., controagisce il momento che proviene dal campo gravitazionale terrestre. Dall'annullarsi della somma dei due momenti, nella posizione d'equilibrio dell'ago, scaturisce l'equazione fondamentale delle bilance magnetiche.

Fermando l'attenzione sulla bilancia di Schmidt, uno dei variometri più diffusi, l'equazione fondamentale relativa al tipo per la misura della componente verticale del c.m.t. è [²] pag. 58], in una stazione generica S_k :

$$n_k - N = \frac{2fM}{mg_k h} Z_k - 2f \frac{a}{h}, \quad [1]$$

dove i simboli hanno il seguente significato:

n_k = lettura alla scala dello strumento nella stazione S_k ,

N = lettura alla scala quando l'equipaggio magnetico è nella posizione orizzontale,

f = distanza focale dell'obiettivo,

M = momento magnetico dell'equipaggio,

Z_k = intensità della componente verticale del c.m.t. nella stazione S_k ,

m = massa totale dell'equipaggio magnetico,

g_k = intensità dell'accelerazione della gravità nella stazione S_k (centro dell'equipaggio magnetico),

a = componente, secondo l'asse dell'ago, della distanza del centro di gravità dell'equipaggio dall'asse di rotazione,

h = componente, secondo la direzione perpendicolare all'asse dell'ago, della distanza del centro di gravità dell'equipaggio dall'asse di rotazione.

Per la stazione base S_o si potrà scrivere analogamente:

$$n_o - N = \frac{2fM}{mg_o h} Z_o - 2f \frac{a}{h}. \quad [2]$$

Indicando con $\varepsilon_o = \frac{mg_o h}{2fM}$ la costante di scala dello strumento, determinata nella stazione base S_o , e ponendo $g_k = g_o + \delta g_{o,k}$, si deduce dalle [1] e [2]:

$$Z_k = [Z_o + \varepsilon_o (n_k - n_o)] \left(1 + \frac{\delta g_{o,k}}{g_o}\right). \quad [3]$$

Trascurando il termine

$$\varepsilon_o (n_k - n_o) \frac{\delta g_{o,k}}{g_o} \quad (1),$$

la [3] diventa:

$$Z_k = Z_o + \varepsilon_o (n_k - n_o) + Z_o \frac{\delta g_{o,k}}{g_o}. \quad [4]$$

Se nella stazione k -esima è stato variato artificialmente il campo magnetico a causa di un magnete ausiliario, la [4] muta soltanto perchè la componente verticale del c. m. t. Z_k deve essere accompagnata dall'analogha componente verticale del campo dovuto al magnete.

Per due stazioni successive S_k e S_{k+1} valgono la precedente e la:

$$Z_{k+1} = Z_o + \varepsilon_o (n_{k+1} - n_o) + Z_o \frac{\delta g_{o,k+1}}{g_o}, \quad [4']$$

per cui, sottraendo la [4] dalla [4'], si può scrivere:

$$Z_{k+1} - Z_k = \varepsilon_o (n_{k+1} - n_k) + Z_o \frac{\delta g_{k,k+1}}{g_o}, \quad [5]$$

dove

$$\delta g_{k,k+1} = g_{k+1} - g_k.$$

L'ultimo termine è in via ordinaria molto esiguo. Ammesso infatti l'error medio di una stazione magnetica $\pm 3\gamma$, supposto ancora $Z_o = 40.000 \gamma$ e $g_o = 980$ gal,

$Z_o \frac{\delta g_{k,k+1}}{g_o}$ supera il detto error medio se $|\delta g_{k,k+1}| > 70$ mgal circa. Poichè variazioni gravimetriche di oltre 70 mgal sono poco frequenti su limitate estensioni, è usuale adottare nei rilievi di dettaglio, anzichè la [5], la formola approssimata:

$$Z_{k+1} - Z_k = \varepsilon_o (n_{k+1} - n_k). \quad [6]$$

Nel caso però di profili notevolmente ampi che si distendano in direzione meridiana o nel caso di stazioni a forte dislivello tra di loro, variazioni di 70 mgal fra la stazione base e la stazione k -esima del rilievo non sono più eccezionali, per cui il termine $Z_o \frac{\delta g_{o,k}}{g_o}$ della [4] non è più trascurabile rispetto alla precisione del rilievo se si

esige che questa sia molto elevata, ed il termine $Z_o \frac{\delta g_{k,k+1}}{g_o}$ della [5] acquista lungo il profilo un carattere *sistematico*, per cui, pur essendo modesta l'entità, non si può non tenerne conto.

Infatti la [4], che dà *l'intensità della componente verticale Z_k del c.m.t. della stazione generica S_k in funzione della Z_o della stazione base S_o , collegata a questa sia direttamente che indirettamente a mezzo di stazioni intermedie*, esprime che nelle osservazioni con bilancia magnetica la stima della trascurabilità o meno del termine

$$Z_o \frac{\delta g_{o,k}}{g_o}, \quad [7]$$

che dà la « *correzione per la gravità* » nella misura della componente verticale del c.m.t., va fatta tenendo conto non della variazione della g tra le stazioni successive, ma della *massima variazione esistente tra la stazione base S_o e le altre stazioni del rilievo ad essa collegate*.

Altrimenti potrebbe capitare che, calcolando le Z delle successive stazioni, partendo da S_o , usando la formola [6] perchè i termini

$$Z_o \frac{\delta g_{k,k+1}}{g_o}, \quad [8]$$

che esprimono la « *correzione per la gravità* » tra due stazioni successive, si sono ritenuti nei singoli tratti insignificanti, si giunga ad una stazione S_k per la quale invece il termine [7] non sia più trascurabile rispetto alla precisione del rilievo: si avrebbero allora per S_k due valori diversi, quello calcolato direttamente da S_o mediante la [4] e quello ottenuto per via indiretta per successive applicazioni della [6].

Il termine [7] quindi consente anche di stabilire preventivamente se, per una determinata rete di collegamenti, sia, o non, da tener conto della *correzione per la gravità tra stazioni successive*.

Le g dei termini [7] e [8] sono i valori osservati dell'accelerazione di gravità. Tali valori si possono ricavare, nel caso che non

(1) Pur supponendo per i fattori a numeratore i più alti valori che si possano presentare in pratica, il contributo del termine sopra scritto risulta assolutamente insensibile.

si possa osservarli, dai rilievi gravimetrici che ricoprono ormai quasi tutto il territorio italiano o quanto meno dedurre dai valori della gravità normale.

Il simbolo Z_o indica il valore assoluto della componente verticale del c.m.t. nella stazione base S_o . Per il calcolo di [7] e [8] ne è ovviamente sufficiente anche un valore approssimato.

3. - Consideriamo ora il variometro per la misura della componente orizzontale del c.m.t.

L'equazione fondamentale è [(2) pag. 61]:

$$n_k - N = \frac{2f M H_k - 2f m g_k a}{M Z_k + m g_k h} \quad [9]$$

dove si indica con:

n_k = la lettura della scala nella stazione generica S_k ,

N = la lettura alla scala quando l'equipaggio magnetico è nella posizione verticale,

H_k = l'intensità della componente orizzontale del c.m.t. in S_k .

Gli altri simboli conservano il significato del paragr. precedente.

Nella stazione base S_o si può scrivere analogamente:

$$n_o - N = \frac{2f M H_o - 2f m g_o a}{M Z_o + m g_o h} \quad [10]$$

Se con

$$\varepsilon_o = \frac{M Z_o + m g_o h}{2f M} \quad [11]$$

si indica la costante di scala dello strumento determinata nella stazione base S_o , sottraendo la [10] dalla [9] si ottiene, dopo alcuni passaggi, :

$$H_k = \frac{M Z_k + m g_k h}{2f M \varepsilon_o} \left\{ H_o + \varepsilon_o (n_k - n_o) \right\} + \frac{m a}{2f M \varepsilon_o} (g_k Z_o - g_o Z_k) \quad [12]$$

Posto:

$$Z_k = Z_o + \delta Z_{o,k}, \quad g_k = g_o + \delta g_{o,k},$$

la [12] può scriversi anche:

$$H_k = H_o + \varepsilon_o (n_k - n_o) + \left\{ \frac{\delta Z_{o,k}}{2f M \varepsilon_o} M H_o + M \varepsilon_o (n_k - n_o) - m a g_o \right\} + \left\{ \frac{\delta g_{o,k}}{2f M \varepsilon_o} m h H_o + m h \varepsilon_o (n_k - n_o) + m a Z_o \right\} \quad [13]$$

Se con H si indica il valore del campo cui corrisponde la lettura N della scala nella stazione base S_o , sarà per la [10], in cui $n_o - N$ risulterà nullo, :

$$H = \frac{m g_o a}{M} \quad [14]$$

Tenendo conto di questa posizione e della [11], la [13] assume la scrittura:

$$H_k = H_o + \varepsilon_o (n_k - n_o) + \left\{ \frac{\delta Z_{o,k}}{2f \varepsilon_o} \left\{ H_o - H + \varepsilon_o (n_k - n_o) \right\} + \frac{\delta g_{o,k}}{g_o} \left\{ H_o + \varepsilon_o (n_k - n_o) - (H_o - H) \frac{Z_o}{2f \varepsilon_o} - \frac{Z_o}{2f} (n_k - n_o) \right\} \right\} \quad [15]$$

Entro la seconda parentesi a graffa, l'unico termine che possa dare, moltiplicato per $\frac{\delta g_{o,k}}{g_o}$, contributo apprezzabile è l' H_o .

Gli altri termini possono essere trascurati, giacchè il loro contributo (sempre tenendo presente il fattore esterno) è irrilevabile ancorchè vi si attribuiscono i più elevati valori possibili in pratica.

L'intensità quindi della componente orizzontale H_k di una stazione generica S_k in funzione della H_o della stazione base S_o si può ritenere espressa dalla:

$$H_k = H_o + \varepsilon_o (n_k - n_o) + \left\{ \frac{\delta Z_{o,k}}{2f \varepsilon_o} \left\{ H_o - H + \varepsilon_o (n_k - n_o) \right\} + \frac{\delta g_{o,k}}{g_o} H_o \right\} \quad [16]$$

Nel caso che venga variato artificialmente il campo a mezzo di un magnete ausiliario, il primo membro della [16] deve essere accompagnato dalla componente orizzontale del campo dovuto a tale magnete.

La parte preponderante della differenza $H_k - H_o$ è costituita dal termine $\varepsilon_o (n_k - n_o)$. Il termine successivo a questo è originato dalla variazione della Z nel passaggio dalla stazione S_o alla stazione S_k e dal fatto che quale costante di scala, funzione della Z , si mantiene quella determinata nella sta-

zione base S_o . La H , che entra a far parte di tale termine, può essere determinata assieme alla ε_o nella stazione base o, meglio ancora, si può operare in modo che risulti $H_o - H \sim 0$ nel qual caso il binomio $H_o - H$ può essere tolto dalla [16].

L'ultimo termine

$$\frac{\delta g_{o,k}}{g_o} H_o \quad [17]$$

esprime la « *correzione per la gravità* » nelle misure tra la stazione base S_o e la stazione generica S_k della componente orizzontale del c.m.t.

Per avere un'idea quantitativa di tale correzione, supponendo che in un rilievo si esiga una precisione di $\pm 3\gamma$, attribuendo ad H_o e a g_o rispettivamente 22.000 γ e 80 gal, il termine correttivo sarà dell'ordine della detta precisione se $|\delta g_{o,k}| \sim 130$ mgal.

Come si vede, con i dati proposti per H_o e per Z_o (§ 2), che corrispondono grosso modo alle componenti del c.m.t. dell'Italia settentrionale, la correzione per la gravità, in corrispondenza di un determinato δg , può avere significato per la determinazione rigorosa di una componente e non dell'altra.

Per due stazioni successive S_k e S_{k+1} valgono la [16] e la

$$\begin{aligned} H_{k+1} = & H_o + \varepsilon_o (n_{k+1} - n_o) + \\ & + \frac{\delta Z_{o,k+1}}{2f\varepsilon_o} \left\{ H_o - H + \varepsilon_o (n_{k+1} - n_o) \right\} + \\ & + \frac{\delta g_{o,k+1}}{g_o} H_o. \end{aligned} \quad [18]$$

Sottraendo la [16] dalla [18] si deduce:

$$\begin{aligned} H_{k+1} - H_k = & \varepsilon_o (n_{k+1} - n_k) + \\ & + \frac{\delta Z_{o,k+1}}{2f\varepsilon_o} \left\{ H_o - H + \varepsilon_o (n_{k+1} - n_o) \right\} + \\ & + \frac{\delta Z_{o,k}}{2f} (n_{k+1} - n_k) + \frac{\delta g_{o,k+1}}{g_o} H_o, \end{aligned} \quad [19]$$

dove

$$\delta Z_{k,k+1} = Z_{k+1} - Z_k \text{ e } \delta g_{k,k+1} = g_{k+1} - g_k.$$

L'ultimo termine:

$$\frac{\delta g_{k,k+1}}{g_o} H_o \quad [20]$$

esprime la « *correzione per la gravità* » nelle misure per la componente orizzontale del c.m.t. tra due stazioni successive.

Le considerazioni fatte a proposito della « *correzione per la gravità* » nelle misure della Z si estendono alle misure per la H . E principalmente: La variazione di gravità, cui si deve prestar attenzione, è quella massima esistente tra la stazione base e le altre stazioni della zona da rilevare, collegate ad essa sia direttamente che indirettamente.

RIASSUNTO

Viene studiata l'influenza della variazione dell'accelerazione della gravità sulle misure delle due componenti verticale e orizzontale del c.m.t., eseguite a mezzo di bilance magnetiche, al fine di riconoscere la trascurabilità o meno di tale influenza, quando si considerano le variazioni massime che si possono presentare tra la stazione magnetica base e le altre stazioni ad essa collegate sia direttamente che indirettamente.

ABSTRACT

The influence of gravity changes upon the magnetic measurements of both horizontal and vertical components of terrestrial magnetic field made with Schmidt balances is studied.

The study mainly is concerned with the evaluation of possible corrections to make especially when appreciable gravity changes occur between magnetic stations.

BIBLIOGRAFIA

- (1) - C. MORELLI, Nuovi criteri per la sistematica magnetica, Annali di Geofisica, vol. III, n. 3, 1950.
- (2) - — Teoria e pratica dei variometri magnetici da campagna, Del Bianco edit., Udine. 1947.