LE SESSE DEL LAGO DI SANTA CROCE

DOMENICO DI FILIPPO

1. — Allo scopo di portare un contributo allo studio sistematico delle caratteristiche fisiche dei laghi italiani intrapreso dall'Istituto Nazionale di Geofisica, ho eseguito il calcolo delle sesse del lago di Santa Croce (Belluno).

Il lago di Santa Croce (latitudine $46^{\circ}6'$ N, longitudine $12^{\circ}22'$ W) con il lago Morto, nelle Prealpi venete, vengono chiamati lapisini dalla vicina regione dell'Alpago ed occupano parte del fondo della profonda incassatura, chiamata anch'essa valle lapisina, che separa l'altipiano Carsico del Cansiglio dalla catena del Col Visentin ⁽¹⁾.

Il terribile terremoto del 1873, il cui epicentro corrispose appunto alla regione dell'Alpago, attirò l'attenzione di illustri geologi su questi luoghi, i quali si occuparono anche dell'origine di questi laghi, problema di un certo interesse dal punto di vista geologico, che ancora è in discussione.

Il lago di Santa Croce, ha la forma di un triangolo, con un solo vertice a sud, ed occupa parte della depressione dove il Tesa, che raccoglie le acque dell'Alpago, immette nella valle portando le sue acque all'angolo Nord-Est del lago, mentre dall'angolo Nord-Ovest sortono le acque del Rai, affluente del Piave.

La profondità del lago nelle vicinanze del vertice a Sud presenta il massimo valore di circa 35 m e va poi man mano diminuendo verso la base a Nord. Il fondale abbastanza regolare si presenta però pieno di un fango alluvionale grigio biancastro calcareo, argilloso ed untuoso al tatto. A Sud del lago la valle si restringe ed è occupata dalle famose frane di Fadalto, il cui punto più depresso è alto m 482.

I principali dati morfometrici del lago di Santa Croce sono:

Altezza dal livello del mare	.	.	.	.	m	381
Superficie	.	.	.	.	kmq	4,70
Profondità massima	.	.	.	.	m	35
Lunghezza	.	.	.	.	km	3,2
Larghezza massima	.	.	.	.	km	2,1
» media	.	.	.	.	km	1,6

LAGO DI S.CROCE

- - - - - *Uninodi*
 - - - - - *Binodi*
 - - - - - *Trinodi*

D = Defant

H = Hidaka

2. — Partendo dall'equazione fondamentale della idrodinamica, Chrystal, considerando un lago come un canale finito di sezione variabile con la profondità non in modo brusco, tratta in maniera rigorosa la prima teoria per lo studio delle sesse.

Chrystal considera trascurabili le componenti laterali del movimento orizzontale in modo da tener conto solo del movimento nel senso dell'asse x , posto lungo la linea di valle e alla superficie del lago; piccolo lo spostamento η verticale rispetto alla profondità h e dipendente esclusivamente dall'ascissa x e dal tempo t , in modo da risultare uguale per tutte le particelle che si trovano in un dato istante in una sezione verticale $S(x)$ del lago, normale alla linea di valle; infine, per le onde di lunghezza tale per cui la profondità h del bacino sia piccola, trascurabile l'accelerazione verticale, da cui consegue che resta solo da considerare la pressione idrostatica e cioè solo le variazioni di pressione derivanti dalle variazioni di livello.

Gli spostamenti orizzontali ξ perciò risultano uguali per tutte le particelle di una stessa sezione $S(x)$. Ciò posto Chrystal perviene alla seguente equazione, che porta il suo nome:

$$\sigma(v) \frac{d^2 u}{d v^2} + \frac{4 \pi^2}{T^2 g} u = 0 \quad [1]$$

dove u rappresenta il volume del liquido che attraversa la sezione $S(x)$ in forza dello spostamento orizzontale ξ e v l'area, calcolata sulla superficie libera da una estremità del lago, $x=0$, alla sezione considerata, cioè in modo che risulta variabile fra 0 e la superficie totale del lago u .

La funzione σ è data dal prodotto dell'area $S(x)$ di una sezione trasversale per la larghezza in superficie $b(x)$ della stessa sezione del lago.

La curva i cui punti hanno per ascissa $v(x)$ e per ordinata $\sigma(x)$ fu chiamata da Chrystal « curva normale » e rappresenta la sezione longitudinale lungo la linea di valle del lago ridotto.

La « curva normale » del lago di Santa Croce, come tutti gli altri elementi, l'ho determinata servendomi dei dati ottenuti da una carta batimetrica al 25000 rilevata dal Magrini, in una campagna dell'autunno del 1904, con 343 scandagli e con le curve di profondità tracciate di 5 in 5 m oltre ad altri numerosi punti segnati con profondità intermedie.

Su di essa, con la massima precisione, ho tracciato 13 sezioni ad una distanza l'una dall'altra in generale di 250 m circa, normali alla linea di valle, che partendo dal vertice Sud del lago (abitato di Santa Croce) seguendo la linea di massima profondità e tenendo conto della forma particolare del bacino, arriva alla parte Nord-Ovest della base.

Nella tabella I riporto i valori delle grandezze $[x, S(x), b(x), l'(x), \sigma(x)]$ necessari per i calcoli successivi.

La figura 1 rappresenta la curva normale che, pur non presentandosi eccessivamente irregolare, tuttavia non è facilmente rappresentabile da una semplice funzione analitica e pertanto non è possibile integrare la equazione di Chrystal con i metodi da lui suggeriti.

Fig. 1

Per questo studio mi sono valso dei metodi di Hidaka e di Defant che riescono più agevoli degli altri e i cui risultati sono egualmente buoni.

3. — *Metodo di Hidaka*: Applicando il calcolo delle variazioni del Ritz all'integrazione dell'equazione differenziale di Chrystal, Hidaka ha proposto un metodo piuttosto semplice per determinare teoricamente le seste di un lago. Infatti egli considera l'equazione [1] con le condizioni ai limiti

$$u(0) = u(a) = 0$$

e posto $z = \frac{v}{a}$ la trasforma nella

$$\frac{d^2 u}{dz^2} + \frac{\lambda}{\sigma(z)} u = 0, \quad [2]$$

dove

$$\lambda = \frac{4 \pi^2}{T^2} \frac{a^3}{g},$$

con le condizioni ai limiti

$$u(0) = u(1) = 0.$$

TABELLA I

Sezioni	x m	S(x) m ²	b(x) m	v(x)		$\sigma(x)$ hm ³
				parziali m ²	complesive m ²	
0	0	0	0	0	0	0
1	262,5	17475,0	575,0	106250	106250	10.048125
2	500,0	25065,5	912,5	178125	284375	22.872269
3	750,0	42162,5	1347,5	325000	609375	56.813969
4	1000,0	43375,0	1375,0	368750	978125	59.640625
5	1250,0	44981,0	1455,0	362500	1340625	65.447355
6	1500,0	48093,7	1612,5	393750	1734375	77.551091
7	1750,0	51312,5	1825,0	443750	2178125	93.645312
8	2000,0	49125,0	1887,5	506250	2684375	92.723438
9	2250,0	42625,0	1962,5	540625	3225000	83.651562
10	2512,5	24187,5	1462,5	631250	3856250	35.374219
11	2762,5	14750,0	1262,5	321875	4178125	18.621875
12	3037,5	5562,5	712,5	337500	4515625	3.963281
13	3287,5	2187,5	425,0	150000	4665625	0.929688
14	3687,5	0	0	181250	4846875	0

La [2], alle condizioni poste, risulta soddisfatta solo da particolari valori di λ . Hidaka, applicando un noto teorema del calcolo delle variazioni, mostra che l'integrazione dell'equazione [2] equivale alla ricerca del minimo valore dell'integrale:

$$I(u) = \int_0^1 \left\{ \left(\frac{du}{dz} \right)^2 - \frac{\lambda}{\sigma(z)} u^2 \right\} dz \quad [3]$$

e propone per u l'espressione:

$$u = \sum_0^m A_i z (1+z) \cdot z^i \quad [4]$$

Derivando questa equazione rispetto a z e sostituendo la derivata ottenuta col relativo valore di u nell'integrale [3] si hanno $(m+1)$ equazioni nella A .

Annullando il determinante dei coefficienti delle A_i si arriva ad un'equazione di grado $(m+1)$ in λ , che è l'equazione dei periodi delle sesse ricercate. In questa equazione:

$$I_n = \int_0^1 \frac{z^2 (1-z)^2 z^n}{\sigma(z)} dz.$$

Nel caso in esame, integrato I_n numericamente, tenendo conto delle condizioni agli estremi, il calcolo, come dalla tabella II, ha dato i seguenti risultati:

$$\begin{aligned} I_0 &= 0.611352 \cdot 10^{-3} & I_1 &= 0.378996 \cdot 10^{-3} & I_2 &= 0.275479 \cdot 10^{-3} \\ I_3 &= 0.217762 \cdot 10^{-3} & I_4 &= 0.180620 \cdot 10^{-3} \end{aligned}$$

La soluzione dell'equazione per m crescente è via via più difficile; però, se la curva normale non è troppo complessa, è più che sufficiente l'approssimazione ottenuta con le soluzioni dell'equazione per m uguale a 2.

Per u in questo caso si ha:

$$u = z(1-z) (A_0 + A_1 z + A_2 z^2),$$

e l'equazione di Hidaka per i periodi, sviluppata, risulta:

$$(I_0 I_2 I_4 - I_0 I_3^2 - I_1^2 I_4 + I_1 I_2 I_3 - I_2^3) \lambda^3 - \left[\frac{3}{35} (I_0 I_2 - I_1^2) + \frac{1}{5} (-I_0 I_3 + I_1 I_2 + I_1 I_3) + \frac{2}{15} I_0 I_4 + \frac{1}{3} (-I_1 I_4 - I_2^2 + I_2 I_3 + I_2 I_4 - I_3^2) \right] \lambda^2 + \left(\frac{1}{700} I_0 - \frac{3}{350} I_1 + \frac{53}{2100} I_2 - \frac{1}{30} I_3 + \frac{1}{60} I_4 \right) \lambda - \frac{1}{10500} = 0,$$

le cui radici permettono di determinare i periodi delle tre prime sesse.

Sostituendo in questa equazione i cinque valori di I calcolati, ho ottenuto la seguente equazione di 3° grado in λ :

$$10^{-9} 0,525 \lambda^3 - 10^{-6} 2,824605 \lambda^2 + 10^{-3} 3,454395 \lambda - 1 = 0,$$

che risolta col metodo di Newton, per successive approssimazioni, partendo dai due valori di λ ricavati dall'equazione di Hidaka per $m=1$, mi ha dato per λ i seguenti valori:

$$\lambda_1 = 426,29 \quad , \quad \lambda_2 = 1185,66 \quad , \quad \lambda_3 = 3768,21.$$

Questi valori sostituiti nell'espressione $\lambda = \frac{4\pi^2 a^2}{T^2 g}$, tenendo conto che la superficie del lago è $a = 4846875 \text{ m}^2$, mi hanno dato per i periodi delle tre sesse rispettivamente i valori:

$$T_1 = 7^m,84 \quad ; \quad T_2 = 1^m,70 \quad ; \quad T_3 = 2^m,64.$$

Linee nodali. — Per la determinazione delle linee nodali vale la condizione $\frac{du}{dz} = 0$, perciò derivando la [5] e dividendo per A_0 si può scrivere:

$$4 \frac{A_2}{A_0} z^3 + 3 \left(\frac{A_1}{A_0} - \frac{A_2}{A_0} \right) z^2 + 2 \left(1 - \frac{A_1}{A_0} \right) z - 1 = 0. \quad [6]$$

Per ottenere i valori dei rapporti $\frac{A_1}{A_0}$ e $\frac{A_2}{A_0}$ per i tre tipi di sesse considerati, basta risolvere il seguente sistema, tenendo conto dei valori delle grandezze precedentemente calcolate:

$$\begin{aligned} \left(\frac{1}{3} - I_0 \lambda \right) A_0 + \left(\frac{1}{6} - I_1 \lambda \right) A_1 + \left(\frac{1}{10} - I_2 \lambda \right) A_2 &= 0 \\ \left(\frac{1}{6} - I_1 \lambda \right) A_0 + \left(\frac{2}{15} - I_2 \lambda \right) A_1 + \left(\frac{1}{10} - I_3 \lambda \right) A_2 &= 0 \end{aligned}$$

TABELLA II

Sezioni	$v(x)$ m^2	Z	$Z^2(1-Z_f)^2$ 10^{-3}	$Z^4(1-Z_f)^2$ $\sigma(x)$ 10^{-3}	Δz	M 10^{-3}	M_Z 10^{-3}	M_Z^2 10^{-6}	M_Z^3 10^{-6}	M_Z^4 10^{-6}
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
1	106250	0,0219	0,459206	0,045701	0,0219	0,001001	0,000022	0,000180	0,000011	0,000000
2	264375	0,0587	3,053315	0,133406	0,0368	0,004909	0,000283	0,016916	0,000992	0,000059
3	609375	0,1257	12,235520	0,215361	0,0670	0,014429	0,001814	0,227978	0,028656	0,003607
4	978125	0,2018	25,945560	0,435032	0,0761	0,033106	0,006681	1,348176	0,272065	0,054890
5	1340625	0,2766	40,037248	0,611747	0,0748	0,045759	0,012657	3,500930	0,968352	0,267827
6	1734375	0,3578	52,798549	0,680823	0,0812	0,055283	0,019780	7,077385	2,532293	0,906033
7	2178125	0,4494	61,226194	0,653809	0,0916	0,059889	0,026914	12,095182	5,435586	2,442753
8	2684375	0,5538	61,060935	0,658527	0,1044	0,068750	0,038074	21,085213	11,676981	6,466694
9	3225000	0,6654	49,569745	0,592574	0,1116	0,066131	0,044004	29,279963	19,482920	12,963924
10	3856250	0,7956	26,445230	0,747585	0,1302	0,097336	0,077441	61,611644	49,018215	38,998934
11	4178125	0,8620	14,150530	0,759888	0,0664	0,050457	0,043494	37,491771	32,317910	27,858016
12	4515625	0,9317	4,049523	1,021760	0,0697	0,071217	0,066353	61,820985	57,598600	53,664645
13	4665625	0,9626	1,296312	1,394351	0,0309	0,043085	0,041474	39,922518	38,429407	36,992135
14	4846875	1,0000								
						0,611352	0,378996	275,479141	217,761988	180,619517
						I_0	I_1	I_2	I_3	I_4

Per $\lambda_1=426,29$ sono risultati per la sessa uninodale i valori dei rapporti:

$$\frac{A_1}{A_0} = -1,947 \qquad \frac{A_2}{A_0} = 3,601.$$

L'equazione [6] diviene perciò:

$$14,404 z^3 - 16,644 z^2 + 5,891 z - 1 = 0$$

la cui unica radice accettabile, perché minore dell'unità, è:

$$z_1 = 0,7218.$$

L'uninodo viene perciò a cadere tra la 9^a e la 10^a sezione, a km 2.364 dall'origine posta, come precedentemente detto, nel vertice Sud del lago.

Successivamente, per la binodale $\lambda_2=1185,66$, risultano

$$\frac{A_1}{A_0} = 2,323 \qquad , \qquad \frac{A_2}{A_0} = -4,626$$

e l'equazione dei nodi diviene

$$18,504 z^3 - 20,847 z^2 + 2,646 z + 1 = 0,$$

le cui due soluzioni accettabili sono

$$z_1 = 0.3820 \qquad z_2 = 0.9015.$$

I due nodi relativi distano dall'origine km 1,555 e 2,919.

Analogamente, per la trinodale $\lambda_3=3768,21$ e i rapporti risultano:

$$\frac{A_1}{A_0} = -3,9222 \qquad \frac{A_2}{A_0} = 3,1739.$$

L'equazione nelle z risulta:

$$12,6956 z^3 - 21,2883 z^2 + 9,8444 z - 1 = 0$$

le cui soluzioni sono:

$$z_1 = 0,1409 \qquad z_2 = 0,5922 \qquad z_3 = 0,9434.$$

I nodi si trovano rispettivamente a 0,800, 2,086 e 3.132 km dalla origine.

Distribuzione delle ampiezze. — L'andamento delle ampiezze si determina considerando la relazione

$$\eta = -\frac{du}{dv} = -a \frac{du}{dz}.$$

Sostituendo a $\frac{du}{dz}$ la sua espressione e tenendo conto delle grandezze calcolate, si perviene alle seguenti tre relazioni rispettivamente per le sesse uni-bi-trinodali

$$\zeta' = \frac{\eta}{aA_0} = - (14.404 z^3 - 16.644 z^2 + 5.894 z - 1),$$

$$\zeta'' = \frac{\eta}{aA_\alpha} = - (-18.504 z^3 + 20.847 z^2 - 2.646 z - 1),$$

$$\zeta''' = \frac{\eta}{aA_\alpha} = - (12.696 z^3 - 21.288 z^2 + 9.444 z - 1).$$

Dando a z successivamente i valori corrispondenti ad ogni sezione, ho calcolati i valori delle ampiezze che riporto nella tabella III,

TABELLA III

Sezioni	x	ζ		
		I	II	III
0	0	+1.000	-1.000	+1.000
1	262.5	+0.879	-1.048	+0.794
2	500.0	+0.708	-1.087	+0.493
3	750.0	+0.493	-1.040	+0.071
4	1000.0	+0.370	-0.837	-0.224
5	1250.0	+0.338	-0.529	-0.363
6	1500.0	+0.362	-0.125	-0.379
7	1750.0	+0.405	+0.342	-0.277
8	2000.0	+0.394	+0.785	-0.079
9	2250.0	+0.204	+1.018	+0.135
10	2512.5	-0.408	+0.772	+0.249
11	2762.5	-0.939	+0.357	+0.201
12	3037.5	-1.693	-0.334	+0.040
13	3287.5	-2.099	-0.735	-0.074
14	3687.5	-2.654	-1.303	-0.252

mentre nelle figure 2, 3, 4, i grafici relativi (linee tratteggiate) danno una idea chiara ed immediata dell'andamento delle ampiezze per il relativo tipo di sesse.

4. — *Metodo di Defant*. Questo metodo prende pure le mosse dalle equazioni differenziali fondamentali dell'idrodinamica (equazioni del movimento e della continuità) e pone al solito l'asse x lungo la linea di valle coll'origine ad

un estremo del lago e considera la massa d'acqua compresa fra due sezioni di spessore dx come uguale ad $S(x) \cdot dx$.

Se gli strati si spostano orizzontalmente di ξ , verticalmente di η le equazioni del moto e della continuità sono soddisfatte solo da autovalori di un parametro, che nel caso rappresentano i periodi delle oscillazioni libere. Il Defant integrando le due equazioni perviene alle seguenti relazioni:

$$2 \Delta \eta_0 = \frac{4 \pi^2}{g T^2} 2 \xi_0 \Delta x ,$$

$$2 \xi_0 = - \frac{1}{S(x)} \int_0^x 2 \eta_0 b(x) dx ,$$

dove $2\eta_0$ e $2\xi_0$ rappresentano le ampiezze delle oscillazioni verticali e orizzontali lungo il lago e gli altri simboli sono gli stessi precedentemente adoperati.

Queste due relazioni danno la possibilità di calcolare contemporaneamente il periodo della sessa e il relativo andamento dell'ampiezza per successive approssimazioni, una volta noto un valore approssimato del periodo stesso.

Difatti note le misure delle sezioni $S(x)$ e quelle delle superficie parziali del lago compreso tra sezione e sezione (tabella I) e fissato uno spostamento arbitrario verticale $\eta = 100\text{cm}$ in corrispondenza dell'origine con le condizioni $\xi(0)=0$, $\xi(l)=0$ alle estremità della linea di valle, è possibile calcolare il valore delle due espressioni su scritte.

Se il numero delle sezioni è sufficientemente grande, si può considerare, con buona approssimazione, che tra l'origine e la prima sezione lo spostamento verticale rimanga costante; allora si può calcolare la quantità q di acqua che, passando attraverso la prima sezione, determina lo spostamento:

$$q = \int_0^{x_1} 2v_0 b(x) dx = 2v_0 \int_0^{x_1} b(x) dx = 2v_0 v(x_1)$$

Ottenuto così il valore dell'integrale e nota la $S(x)$ corrispondente, si determina $2\xi_0$ della seconda relazione; sostituito nella prima permette di calcolare $2\Delta\eta_0$ e di conseguenza il valore dello spostamento verticale in corrispondenza della prima sezione, che risulta

Fig. 2

$100+2 \Delta \eta_0$. Si ripetono i calcoli per tutte le successive sezioni fino all'ultima, considerata di area nulla, in corrispondenza della quale si dovrà annullare q .

Fig. 3

precedentemente col metodo di Hidaka; i quali, corretti con successive approssimazioni, tenendo conto di volta in volta delle condizioni su esposte, sono risultati, in definitiva, per i tre tipi di sessa:

$$\begin{aligned} T_1 &= 7^m,13 && \text{per l'uninodale,} \\ T_2 &= 4^m,9 && \text{per la binodale,} \\ T_3 &= 3^m,22 && \text{per la trinodale.} \end{aligned}$$

Fig. 4

Se il periodo non coincide con l'esatto periodo della sessa, il calcolo va ripetuto avendo cura di diminuire il periodo precedentemente adoperato se q è maggiore di 0 per le sesse a nodi dispari; e se q è minore di 0, aumentarlo. Per le sesse a nodi pari bisogna operare in maniera contraria.

I periodi inizialmente adoperati in questo caso sono stati quelli ottenuti pre-

Lo sviluppo dei calcoli è riportato nella tabella IV, dove risultano per le q finali valori abbastanza piccoli, ma non nulli; però l'approssimazione è più che sufficiente per il problema in esame.

Questo metodo, come abbiamo già detto, permette contemporaneamente alla determinazione del periodo quella dei nodi e l'andamento degli spostamenti verticali nelle sin-

TABELLA IV

Sezioni	x m	$\alpha \Delta x$ 10^{-2}	$q = 2\eta_0 V(x)$ m^3	$2\xi_0$ m	$2 \Delta \eta_0$ cm	$2\eta_0$ cm
UNIODALE						
$T = 7^m, 13 \quad \alpha = 0,00002197 m^{-1}$						
0	0					+100,00
1	262,5	0,57663	+ 106250	— 6,0801	— 3,51	+ 96,49
2	500,0	0,52171	+ 278123	— 11,0958	— 5,79	+ 90,70
3	750,0	0,54917	+ 572898	— 13,5879	— 7,46	+ 83,24
4	1000,0	»	+ 879846	— 20,2846	— 11,14	+ 72,10
5	1250,0	»	+ 1141208	— 25,3709	— 13,93	+ 58,17
6	1500,0	»	+ 1370252	— 28,4913	— 15,65	+ 42,52
7	1750,0	»	+ 1558935	— 30,3812	— 16,68	+ 25,84
8	2000,0	»	+ 1689750	— 34,3969	— 18,89	+ 6,95
9	2250,0	»	+ 1727323	— 40,5237	— 22,25	— 15,30
10	2512,5	0,57663	+ 1630742	— 67,4209	— 38,88	— 54,18
11	2762,5	0,54917	+ 1456350	— 98,7356	— 51,22	— 108,40
12	3037,5	0,60409	+ 1090500	— 196,0449	— 118,43	— 226,83
13	3287,5	0,54917	+ 750255	— 342,9737	— 188,35	— 415,18
14	3687,5	0,87868	— 2259			

TABELLA IV

Sezioni	x m	$\alpha \Delta x$ 10^{-2}	$q=2\eta_0 V(x)$ m^3	$2 \xi_0$ m	$2 \Delta \eta_0$ cm	$2 \eta_0$ cm
BINODALE						
$T=4^m, 9 \quad \alpha=0,00004651m^{-1}$						
0	0					+100,00
1	262,5	1,22089	+ 106250	— 6,0801	— 7,42	+ 92,58
2	500,0	1,10461	+ 271158	— 10,8180	— 11,95	+ 80,63
3	750,0	1,16275	+ 533206	— 12,6465	— 14,70	+ 65,93
4	1000,0	»	+ 776323	— 17,8979	— 20,81	+ 45,12
5	1250,0	»	+ 939883	— 20,8951	— 24,30	+ 20,82
6	1500,0	»	+ 1021862	— 21,2473	— 24,71	— 3,89
7	1750,0	»	+ 1004600	— 19,5781	— 22,76	— 26,65
8	2000,0	»	+ 869684	— 17,7035	— 20,58	— 47,23
9	2250,0	»	+ 614347	— 14,4128	— 16,76	— 63,99
10	2512,5	1,22089	+ 210410	— 8,6991	— 10,62	— 74,61
11	2762,5	1,16275	— 29741	+ 2,0163	+ 2,34	— 72,27
12	3037,5	1,27903	— 273652	+ 49,1959	+ 62,92	— 9,35
13	3287,5	1,16275	— 287677	+ 131,5095	+ 152,91	+ 143,56
14	3687,5	1,86040	— 27475			

TABELLA IV

Sezioni	x m	$\alpha \Delta x$ 10^{-2}	$q = 2\eta_0 V(x)$ m^3	$2 \xi_0$ m	$2 \Delta \eta_0$ cm	$2 r_0$ cm
T = 3 ^m , 22 $\alpha = 0,00010771 m^{-1}$ TRINODALE						
0	0					+100,00
1	262,5	2,82739	+ 106250	— 6,0801	— 17,19	+ 82,81
2	500,0	2,55811	+ 253755	—10,1237	— 25,90	+ 56,91
3	750,0	2,69275	+ 438713	—10,4053	— 28,02	+ 28,89
4	1000,0	»	+ 515215	—12,5705	— 33,85	— 4,96
5	1250,0	»	+ 527265	—11,7219	— 31,56	— 36,52
6	1500,0	»	+ 383468	— 7,9734	— 21,47	— 57,99
7	1750,0	»	+ 126137	— 2,4582	— 6,62	— 64,61
8	2000,0	»	— 200951	+ 4,0906	+ 11,01	— 53,60
9	2250,0	»	— 490726	+11,5126	+ 31,00	— 22,60
10	2512,5	2,82739	— 633389	+26,1866	+ 74,04	+ 51,44
11	2762,5	2,69275	— 467816	+31,7163	+ 85,40	+136,84
12	3037,5	2,96202	— 5981	+ 1,0752	+ 3,18	+140,02
13	3297,5	2,69275	+ 204049	—93,2795	—251,18	—111,16
14	3687,5	4,30804	+ 2571			

gole sezioni; nella tabella IV, colonna 2^{da} sono infatti riportati i valori corrispondenti.

Nelle figure 2, 3 e 4 con tratto continuo sono riportati i grafici relativi, in confronto con gli analoghi ottenuti col metodo di Hidaka.

Le ascisse delle linee nodali sono in buon accordo con quelle ottenute col metodo di Hidaka, come risulta dal seguente specchietto:

Ascisse dei nodi	Hidaka	Defant	Differenze
x'_1	m 2364	m 2078	286 m
x''_1	» 1555	» 1461	94 »
x''_2	» 2919	» 3053	—134 »
x'''_1	» 800	» 963	—163 »
x'''_2	» 2086	» 2282	—196 »
x'''_3	» 3132	» 3176	—44 »

5. — *Le osservazioni.* Nei primi giorni di ottobre del 1904, Margini eseguì delle osservazioni con un limnografo del tipo giapponese, posto sul lago nelle vicinanze del paese di Santa Croce.

Dall'esame dei limnogrammi ottenuti poté stabilire l'esistenza di un movimento oscillatorio, specialmente subito dopo il cessare del vento, con un periodo medio per la sessa uninodale di 7^m,4 e per la sessa binodale di circa 5^m.

Un esempio di registrazione è riportato nella fig. 5.

Nello specchietto seguente sono a confronto i valori dei periodi calcolati coi due metodi e quelli osservati:

	uninodale	binodale	trinodale
Valori osservati	7 ^m ,4	5 ^m	
Valori calcolati metodo Hidaka	7 ,84	4 ,7	2 ^m ,64
» » » Defant	7 ,13	4 ,9	3 ,22

Si vede che, per le sesse uninodale e trinodale, i periodi calcolati con i metodi di Hidaka e di Defant sono leggermente diversi e

che, mentre per la prima il metodo di Hidaka dà un valore maggiore di quello di Defant, per la seconda le cose risultano invertite.

Il valore osservato per la sessa uninodeale risulta compreso fra i valori calcolati con i due metodi e ne è quasi la media aritmetica, mentre per la binodale

5.10.1901. Sessa di 7^m.4

Fig. 5

il valore osservato risulta di poco superiore ai calcolati.

Le differenze fra i valori calcolati e quelli osservati risultano sufficientemente piccole e per quelle relative ai valori di Defant minori che per quelle dei valori di Hidaka.

Purtroppo il periodo di osservazione fu molto limitato; tuttavia i valori ottenuti servono a confermare il risultato dei calcoli teorici dei periodi dei primi due tipi di sesse e danno indicazione per l'attendibilità anche ai valori dei periodi calcolati per la sessa trinodale.

Osservazioni sistematiche con moderni apparecchi ed eseguite per un periodo di tempo sufficiente potrebbero, associate a prove sperimentali sul modello del lago, stabilire una media precisa dei periodi delle varie sesse e quindi rendere possibile un nuovo confronto con i valori calcolati.

Roma — Istituto Nazionale di Geofisica — Gennaio 1948.

RIASSUNTO

Si espongono i risultati dei calcoli fatti con due metodi diversi (Hidaka e Defant) per la determinazione dei periodi, dei nodi e dell'andamento delle ampiezze delle sesse dei primi tre tipi del lago di Santa Croce (Belluno).

I periodi ottenuti risultano in buon accordo con i valori osservati dal Magrini.

BIBLIOGRAFIA

(1) MAGRINI G. P.: *Contributo allo studio dei laghi lapisini* - Memorie Società geografica italiana 1906.

CAIOL P.: *Le sesse del lago di Garda* - Annali di Geofisica, Parte 1^a e 2^a, n. 1 e 2, 1948.

CHRISTAL G.: *On the hydrodynamical Theory of Seiches* - Transactions of the Royal Society of Edimburgh, XLI (1905), XLV (1906), XLVI (1907-8).

HIDAKA K.: *Application of Ritz's Variation Method to the determination of Seiches in a Lake* - Mem. Imp. Marine Observ. VI, n. 2 (1936).

DEFANT A.: *Neue Methode zur Ermittlung der Eigenschwingungen (Seiches) von abgeschlossen Wassermassen ecc.* - Ann. der Hydrol. XLVI (1918).

MAGRINI G. P.: *Le sesse nei laghi italiani* - Rivista geografica italiana, 1905, pag. 222.