

# CONTRIBUTO ALLO STUDIO DELLE ONDE DI LOVE

PAOLO EMILIO VALLE

*Premessa.* — In una nota precedente (1) sono stati messi in evidenza gli effetti che la dissipazione dell'energia produce sulla propagazione delle onde di Love monocromatiche.

In sostanza è risultato che se il periodo dell'onda è grande rispetto alla costante di tempo dei due mezzi a contatto, la dissipazione dell'energia non influisce sensibilmente sulla dispersione e ancor meno sull'estinzione con la profondità. L'effetto più importante è costituito, in questo caso, dalla comparsa di un coefficiente di assorbimento, che aumenta con la frequenza e assume ordini di grandezza in accordo con le misure sperimentali, quando si attribuiscono alle costanti fisiche che caratterizzano la stratificazione valori ragionevoli.

Se invece il periodo dell'onda non è molto grande rispetto alla costante di tempo, dovrebbe essere sensibile la dispersione anomala, la quale peraltro non sembra sia stata fin'ora osservata.

Sempre restando entro i limiti di un'onda piana che si propaghi in un mezzo con una sola stratificazione, nella presente nota viene esaminata, con qualche dettaglio, la distribuzione spettrale dell'energia associata ad un'onda non monocromatica. Si accenna inoltre all'effetto dell'assorbimento sulla frequenza predominante nello spettro dell'intensità in superficie ed al passaggio dell'onda da una stratificazione ad un'altra.

*Espressioni dello spostamento.* — Nella nota precedente il riferimento è stato scelto in modo da far coincidere il piano  $xy$  con la superficie libera e il piano  $z = -D$ , dove con  $D$  si è indicato lo spessore dello strato, con la superficie di separazione dei due mezzi a contatto. L'asse  $x$  è stato orientato nella direzione della propagazione e quindi lo spostamento  $v$  parallelamente all'asse  $y$ .

---

(1) VALLE P. E., *Effetti dell'attrito interno sulla propagazione delle onde di Love*. Annali Geof. III, 47-62 (1950).

Lo spostamento deve soddisfare le note equazioni

$$0 \geq z \geq -D \quad \left(1 + \tau_1 \frac{\partial}{\partial t}\right) \Delta_2 v = \frac{\varrho_1}{\mu_1} \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} \quad [1]$$

$$z \leq -D \quad \left(1 + \tau_0 \frac{\partial}{\partial t}\right) \Delta_0 v = \frac{\varrho_2}{\mu_2} \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} \quad [2]$$

Tenuto conto delle condizioni relative allo spostamento e alle tensioni, sulla superficie libera e di separazione dei due mezzi, sono state ottenute, per un'onda monocromatica, le espressioni

$$0 \geq z \geq -D \quad v = A \cosh z \sqrt{f^2 - k_1} e^{j(pt - fx)} \quad [3]$$

$$z \leq -D \quad v = A \cosh D \sqrt{f^2 - k_1} e^{(z+D)\sqrt{f^2 - k_1}} e^{j(pt - fx)} \quad [4]$$

di cui va presa la parte reale.

La grandezza  $f$  è data, sotto forma di funzione implicita della variabile indipendente  $p$ , dalla relazione

$$\frac{k_1}{k_2} \frac{\varrho_2}{\varrho_1} \frac{\sqrt{f^2 - k_2}}{\sqrt{f^2 - k_1}} + \tanh D \sqrt{f^2 - k_1} = 0 \quad [5]$$

nella quale

$$k_1 = \frac{\varrho_1 p^2}{\mu_1 (1 + j\tau_1 p)}, \quad k_2 = \frac{\varrho_0 p^2}{\mu_2 (1 + j\tau_2 p)}, \quad f = f' - jk \quad [6]$$

La parte reale di  $f$  è proporzionale al reciproco della lunghezza d'onda, mentre il coefficiente dell'immaginario rappresenta il coefficiente di assorbimento.

Se si pone

$$\sqrt{f^2 - k_1} = \alpha = \alpha' + j\alpha'' \quad [7]$$

$$\sqrt{f^2 - k_2} = \beta = \beta' + j\beta'' \quad (\beta' > 0)$$

e si osserva che  $k_1(-p) = k_1^*(p)$ ,  $k_2(-p) = k_2^*(p)$ , dove l'asterisco indica il coniugato, risulta

$$\begin{aligned} f^{2*}(p) &= f^2(-p) \\ \alpha^*(p) &= \alpha(-p) \\ \beta^*(p) &= \beta(-p) \end{aligned} \quad [8]$$

Le onde di Love sono costituite da un gruppo la cui durata del passaggio per un certo punto è limitata. Si può costruire un tale gruppo sovrapponendo, come è noto, infinite onde sinusoidali di conveniente ampiezza. Le espressioni [3] e [4] devono pertanto essere scritte nella forma più generale

$$v = \int_{-\infty}^{+\infty} A(p) \cosh \alpha z e^{j(pt-fx)} dp \quad [3']$$

$$v = \int_{-\infty}^{+\infty} A(p) \cosh \alpha D e^{(z+D)\beta} e^{j(pt-fx)} dp \quad [4']$$

Indicando con  $v_0$  lo spostamento in superficie si avrà

$$v_0(x,t) = \int_{-\infty}^{+\infty} A(p) e^{j(pt-fx)} dp \quad [3'']$$

Si supponga ora che la perturbazione all'origine delle coordinate sia nulla p. es. fino all'istante  $t = 0$ , ossia

$$\begin{aligned} t \leq 0 & \quad v_0(0,t) = 0 \\ t > 0 & \quad v_0(0,t) = \int_{-\infty}^{+\infty} A(p) e^{jpt} dp \end{aligned} \quad [3''']$$

se  $v_0(0,t)$  è data e reale, risulta subito

$$A(p) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{+\infty} v_0(0,t) e^{-jpt} dt \quad [9]$$

con

$$A^*(p) = A(-p)$$

Tenute presenti le [8] e la seconda delle [9], con la convenzione di prendere  $f^*(p) = -f(-p)$ , si può facilmente verificare che le espressioni [3'] e [4'] dello spostamento, sono reali e rappresentano un'onda progressiva.

Sarà utile nel seguito considerare l'intensità dell'onda in superficie nell'intervallo della pulsazione compreso tra  $p$  e  $p + dp$ , ossia

$$dI = AA^* e^{-2kx} dp \quad [10]$$

L'intensità totale può essere calcolata mediante le relazioni

$$I = 2 \int_0^{+\infty} AA^* e^{-2kx} dp \quad [11]$$

$$I = \frac{1}{2\pi} \int_0^{+\infty} [v_0(x,t)]^2 dt$$

*Distribuzione spettrale dell'energia.* — È noto che la potenza dell'energia sviluppata dalle tensioni agenti su di una certa superficie di un solido è data da

$$W'(t) = \int_s \left( X_v \frac{\partial u}{\partial t} + Y_v \frac{\partial v}{\partial t} + Z_v \frac{\partial u}{\partial t} \right) ds \quad [12]$$

nella quale la superficie a cui va estesa l'integrazione è relativa allo stato indeformato.  $v$  indica la normale alla superficie stessa e risulta

$$X_v = X_x \cos \widehat{vx} + X_y \cos \widehat{vy} + X_z \cos \widehat{vz} \quad [13]$$

$$Y_v = Y_x \cos \widehat{vx} + Y_y \cos \widehat{vy} + Y_z \cos \widehat{vz}$$

.....

$X_x, X_y, \dots$ , costituiscono il tensore delle tensioni.

Trattandosi di onde di Love piane, si deve prendere in considerazione un fascio delimitato dalla superficie libera e da due piani paralleli al piano  $xz$ , la cui distanza mutua sarà indicata con  $b$ . In pratica questo caso è realizzato quando il centro di perturbazione si trova ad una distanza molto grande rispetto alla dimensione trasversale  $b$  del fronte d'onda.

Si pensi ora di tagliare il fascio, normalmente alla direzione della propagazione, mediante un piano passante per un certo punto dell'asse  $x$ .

Sui piani che delimitano lateralmente il fascio, le tensioni non eseguono lavoro, e quindi la potenza dell'energia che fluisce nel fa-

scio è uguale al lavoro eseguito, nell'unità di tempo, dalle tensioni agenti su detto piano. In base alla [12] ed alla [13] si ha

$$W'(x,t) = -b \int_{-\infty}^{\infty} Y_x \frac{\partial v}{\partial t} dz \quad [14]$$

Ricordando che la perturbazione si è supposta convenzionalmente nulla fino all'istante zero, l'energia  $E$  associata all'onda assume la forma

$$E(x) = \int_0^{+\infty} W'(x,t) dt = -b \int_0^{+\infty} dt \int_{-\infty}^{\infty} Y_x \frac{\partial v}{\partial t} dz \quad [15]$$

Si può utilizzare la relazione precedente, per calcolare l'energia associata ad uno o più periodi di un'onda monocromatica. L'integrale su  $t$  va allora esteso al numero dei periodi considerato e devono essere utilizzate le parti reali delle espressioni [3] e [4] dello spostamento.

Se invece interessa l'energia associata ad un gruppo, si devono usare le espressioni [3'] e [4'] e assegnare la perturbazione sulla superficie in un certo punto, p. es.  $x = 0$ , in funzione del tempo.

Il risultato a cui si perviene in questo caso è valido solo per la particolare forma della perturbazione assegnata e quindi, a parte la difficoltà di eseguire il calcolo effettivo di  $E$ , si presenta di scarso interesse. Conviene seguire una via meno diretta e ricercare la distribuzione dell'energia in funzione della frequenza. In altri termini conviene cercare una funzione  $W$ , in un certo punto di ascissa  $x$ , tale che risulti

$$\int_0^{+\infty} W'(x,t) dt = \int_0^{+\infty} W(x,p) dp \quad [16]$$

Il prodotto  $dE = W dp$  rappresenta evidentemente l'energia associata all'onda nell'intervallo della pulsazione compreso tra  $p$  e  $p + dp$ .

Procedendo in questo modo rimane incognita la forma dello spettro della perturbazione in superficie, e quindi si potranno avere soltanto informazioni semiquantitative, le quali peraltro sono da preferirsi a quelle fornite da un caso particolare.

Nella [16]  $W$  si è supposta dipendente da  $x$  e ciò in relazione al fatto che durante la propagazione l'onda perde continuamente energia.

Per calcolare tale perdita, senza procedere in modo formale, si

consideri un volumetto ottenuto tagliando il fascio con due piani paralleli, normali alla direzione della propagazione e passanti per i punti di ascissa  $x$  e  $x + dx$ , rispettivamente. Il lavoro compiuto dalle tensioni agenti sul piano di ascissa  $x$  nel tempo  $dt$  è dato da

$$+b dt \int_{-\infty}^0 Y_x \frac{\partial v}{\partial t} dz$$

Analogamente il lavoro compiuto dalle tensioni agenti sul piano di ascissa  $x + dx$ , vale

$$-b dt \int_{-\infty}^0 Y_x \frac{\partial v}{\partial t} dz \quad -b dt dx \int_{-\infty}^0 \frac{\partial}{\partial x} \left( Y_x \frac{\partial v}{\partial t} \right) dz$$

e quindi complessivamente risulta

$$dE = -b dx \int_0^{+\infty} dt \int_{-\infty}^0 \frac{\partial}{\partial x} \left( Y_x \frac{\partial v}{\partial t} \right) dz \quad [17]$$

$dE$  rappresenta il lavoro eseguito dalle tensioni sulle facce del volumetto al passaggio dell'onda. La [17] può essere facilmente trasformata in modo da rendere più evidente il suo significato.

Ricordando che

$$\frac{\partial Y_x}{\partial x} + \frac{\partial Y_z}{\partial z} = \rho \frac{\partial^2 v}{\partial t^2}$$

e che  $\left( Y_z \frac{\partial v}{\partial t} \right)$  è nulla per  $z = 0$  e  $z = -\infty$ , si ha

$$\int_{-\infty}^0 \frac{\partial}{\partial x} \left( Y_x \frac{\partial v}{\partial t} \right) dz = \int_{-\infty}^0 \left\{ \frac{d}{dt} \frac{1}{2} \rho \left( \frac{\partial v}{\partial t} \right)^2 + \frac{\partial^2 v}{\partial t \partial x} Y_x + \frac{\partial^2 v}{\partial t \partial z} Y_z \right\} dz$$

D'altra parte le tensioni in funzione dello spostamento hanno la forma

$$Y_x = \mu \frac{\partial v}{\partial x} + \tau \mu \frac{\partial}{\partial t} \frac{\partial v}{\partial x}$$

$$Y_z = \mu \frac{\partial v}{\partial z} + \tau \mu \frac{\partial}{\partial t} \frac{\partial v}{\partial z} \quad [18]$$

e quindi

$$\int_{-\infty}^{\circ} \frac{\partial}{\partial x} \left( Y_x \frac{\partial v}{\partial t} \right) dz = \int_{-\infty}^{\circ} \frac{d}{dt} \left\{ \frac{1}{2} \rho \left( \frac{\partial v}{\partial t} \right)^2 + \frac{1}{2} \left[ \left( \frac{\partial v}{\partial x} \right)^2 + \left( \frac{\partial v}{\partial z} \right)^2 \right] \right\} dz +$$

$$+ \tau \mu \int_{-\infty}^{\circ} \left\{ \left( \frac{\partial^2 v}{\partial t \partial x} \right)^2 + \left( \frac{\partial^2 v}{\partial t \partial z} \right)^2 \right\} dz$$

Integrando su  $t$  risulta

$$dE = -\tau \mu b dx \int_{\circ}^{+\infty} dt \int_{-\infty}^{\circ} \left\{ \left( \frac{\partial^2 v}{\partial t \partial x} \right)^2 + \left( \frac{\partial^2 v}{\partial t \partial z} \right)^2 \right\} dz \quad [17']$$

dove naturalmente a  $\mu$  e  $\tau$  vanno attribuiti i valori che competono al mezzo superiore e sottostante quando si esegue l'integrazione rispetto a  $z$ .

La [17'] mostra che il lavoro  $dE$  eseguito dalle tensioni sulle facce del volumetto, dipende, come era da prevedersi, dalla parte non conservativa delle tensioni stesse.

Se, dopo il passaggio dell'onda, si suppone di riportare il materiale contenuto nel volumetto nelle condizioni iniziali, in modo che sia nulla la variazione della sua energia interna, il lavoro  $dE$  viene restituito sotto forma di calore e quindi rappresenta effettivamente la perdita di energia per il tragitto infinitesimo  $dx$ .

Nel caso in cui  $\tau = 0$ , cioè se il solido è perfettamente elastico,  $dE = 0$ . L'energia che entra nel volumetto è uguale a quella che esce e rimane costante durante la propagazione.

La distribuzione della perdita d'energia in funzione della frequenza è contenuta nella relazione

$$\int_{\circ}^{+\infty} \frac{\partial W}{\partial x} dp = -b \int_{\circ}^{+\infty} dt \int_{-\infty}^{\circ} \frac{\partial}{\partial x} \left( Y_x \frac{\partial v}{\partial t} \right) dz \quad [19]$$

Se si indica con  $E_1$  l'energia associata all'onda nello strato di spessore  $D$  e con  $E_2$  l'analoga grandezza relativa al mezzo sottostante, in base alla [14] si ha

$$F_1 = -b \int_0^{+\infty} dt \int_{-b}^0 Y_x \frac{\partial v}{\partial t} dz \quad [20]$$

$$F_2 = -b \int_0^{+\infty} dt \int_{-\infty}^{-b} Y_x \frac{\partial v}{\partial t} dz \quad [21]$$

Si consideri p. es. la [20]. La tensione  $Y_x$ , avuto riguardo alla prima delle [18] e alla [3'], assume la forma

$$Y_x = -j\mu_1 \int_{-\infty}^{+\infty} (1 + j\tau_1 p) f A \cosh az e^{j(pt-fx)} dp$$

D'altra parte, tenuto conto che lo spostamento espresso dalla [3'] è reale, si avrà

$$\frac{\partial v}{\partial t} = -j \int_{-\infty}^{+\infty} p A^* \cosh \alpha^* z e^{-j(pt-f^*x)} dp$$

e quindi

$$Y_x \frac{\partial v}{\partial t} = -\mu_1 \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} (1 + j\tau_1 p) f p A A^* \cosh az \cosh \alpha^* z e^{jx(f^*-f)} e^{jt(p-p')} dp dp'$$

nella quale la variabile delle grandezze coniugate e segnate con asterisco è  $p'$ .

Integrando su  $t$  da  $-T$  a  $+T$ , risulta subito

$$\int_{-T}^{+T} Y_x \frac{\partial v}{\partial t} dt = -\mu_1 \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} (1 + j\tau_1 p) f p' A A^* \cosh az \cosh \alpha^* z e^{jx(f^*-f)} \frac{2 \sin T(p-p')}{p-p'} dp dp'$$

Si operi ora il cambiamento variabile  $p = p' + \sigma$  e si passi al limite per  $T \rightarrow \infty$ . In virtù di un noto teorema e tenuto conto che  $v$  si è supposto nullo fino al tempo zero, si ottiene

$$\int_0^{+\infty} Y_x \frac{\partial v}{\partial t} dt = -2\pi\mu_1 \int_{-\infty}^{+\infty} (1+j\tau_1 p) f p A A^* e^{-2kx} \cosh \alpha z \cosh \alpha^* z dp$$

che, con qualche passaggio, si trasforma nella

$$\int_0^{+\infty} Y_x \frac{\partial v}{\partial t} dt = -4\pi\mu_1 \int_0^{+\infty} p(f' + \tau_1 p k) A A^* e^{-2kx} \cosh \alpha z \cosh \alpha^* z dp$$

Resta ora soltanto da effettuare l'integrazione rispetto a  $z$ . Tenendo presente che

$$\cosh \alpha z \cosh \alpha^* z = \frac{\cosh 2\alpha' z}{2} + \frac{\cos 2\alpha'' z}{2}$$

si ottiene in definitiva

$$E_1 = b\mu_1 \pi \int_0^{+\infty} A A^* e^{-2kx} p(f' + \tau_1 p k) \left\{ \frac{\sinh 2\alpha' D}{\alpha'} + \frac{\sin 2\alpha'' D}{\alpha''} \right\} dp \quad [20']$$

Procedendo in modo analogo si trova per  $E_2$  l'espressione

$$E_2 = b\mu_1 \pi \int_0^{+\infty} A A^* e^{-2kx} p(f' + \tau_2 p k) \frac{\cosh 2\alpha' D + \cos 2\alpha'' D}{\beta'} dp \quad [21']$$

Consegue che la distribuzione dell'energia, in funzione della frequenza, nel mezzo superiore e sottostante sono date rispettivamente da

$$W_1 = b\mu_1 \pi A A^* e^{-2kx} p(f' + \tau_1 p k) \left\{ \frac{\sinh 2\alpha' D}{\alpha'} + \frac{\sin 2\alpha'' D}{\alpha''} \right\} \quad [22]$$

$$W_2 = b\mu_2 \pi A A^* e^{-2kx} p(f' + \tau_2 p k) \frac{\cosh 2\alpha' D + \cos 2\alpha'' D}{\beta'} \quad [23]$$

e risulta

$$W = W_1 + W_2 \quad [24]$$

La ripartizione spettrale della perdita di energia si ottiene derivando le precedenti rapporto ad  $x$ .

Dato che  $AA^* e^{-2kx} dp = dI$  rappresenta l'intensità dell'onda in superficie, nell'intervallo della pulsazione compreso tra  $p$  e  $p + dp$ , mentre  $dE_1 = W_1 dp$ ,  $dE_2 = W_2 dp$  le corrispondenti energie associate all'onda nel mezzo superiore e sottostante, nello stesso intervallo della pulsazione, si potrà scrivere

$$\frac{dE_1}{dI} = b \mu_1 \pi p (f' + \tau_1 p k) \left\{ \frac{\sinh 2\alpha' D}{\alpha'} + \frac{\sin 2\alpha'' D}{\alpha''} \right\} \quad [25]$$

$$\frac{dE_2}{dI} = b \mu_2 \pi p (f' + \tau_2 p k) \frac{\cosh 2\alpha' D + \cos 2\alpha'' D}{\beta'} \quad [26]$$

le quali rappresentano le energie che devono essere associate al fascio nei due mezzi, per unità d'intensità dell'onda in superficie, in funzione della frequenza.

Nel caso che i mezzi siano perfettamente elastici si ha

$$\frac{dF_1}{dI} = b \mu_1 \pi p f' \left\{ \frac{\sin 2\alpha'' D}{\alpha''} + 2\bar{D} \right\} \quad [25']$$

$$\frac{dF_2}{dI} = b \mu_2 \pi p f' \frac{\cos 2\alpha'' D + 1}{\beta'} \quad [26']$$

In generale il limite superiore delle frequenze che interessano, si mantiene molto minore dei rapporti  $1/\tau_1$ ,  $1/\tau_2$ , che sono dell'ordine di grandezza di  $10^2 \text{ sec}^{-1}$ . Ne deriva che  $\alpha'$  assume valori molto piccoli rispetto a  $D$  e  $\tau_1 p k$ ,  $\tau_2 p k$  rispetto ad  $f'$ . Converrà quindi, anche allo scopo di evitare troppe complicazioni, esaminare la [25'] e la [26'] e discutere a parte l'effetto dell'assorbimento sull'intensità in superficie.

Peraltro alcuni dei risultati cui verrà accennato nel seguito valgono anche quando non sia verificata la suddetta limitazione.

La [25'] e la [26'] possono essere scritte nella forma

$$\frac{dF_1}{dI} = b \mu_1 \pi p \varphi_1 \quad [25'']$$

$$\frac{dF_2}{dI} = b \mu_2 \pi p \varphi_2 \quad [26'']$$

dove si è posto

$$\varphi_1 = f' \left\{ \frac{\sin 2\alpha'' D}{\alpha''} + 2\bar{D} \right\} \quad [27]$$

$$\varphi_2 = \frac{\mu_0}{\mu_1} f' \frac{1 + \cos 2\alpha'' D}{\beta'}$$

Ora nel caso in esame risulta

$$\begin{aligned}\alpha'' &= \sqrt{P^2 \frac{\varrho_1}{\mu_1} - f'^2} \\ \beta' &= \sqrt{f'^2 - \frac{\varrho_2}{\mu_2} P^2} \\ \frac{\mu_2}{\mu_1} \frac{\beta'}{\alpha''} &= \text{tang } \alpha'' D\end{aligned}\quad [28]$$

con la condizione

$$\frac{\varrho_1}{\mu_1} > \frac{c_2}{\mu_2}$$

e quindi se si introduce la velocità di fase  $c$  e si pone

$$r = pD \sqrt{\frac{\varrho_1}{\mu_1}}, \quad s = \frac{1}{c} \sqrt{\frac{\mu_1}{\varrho_1}}, \quad [29]$$

le [27] divengono

$$\varphi_1 = \frac{s}{\sqrt{1-s^2}} \left( \sin 2r \sqrt{1-s^2} + 2r \sqrt{1-s^2} \right) \quad [27']$$

$$\varphi_2 = 2 \frac{\mu_2}{\mu_1} s \frac{\cos^2 r \sqrt{1-s^2}}{\sqrt{c^2 - \frac{\mu_1 \varrho_2}{\mu_2 \varrho_1}}}$$

Le [27'] mostrano che  $\varphi_1$  e  $\varphi_2$  sono funzioni della sola  $r$ . Dall'ultima delle [28] è facile vedere che per  $r \rightarrow 0$ ,  $s \rightarrow \sqrt{\frac{\mu_1 \varrho_2}{\mu_2 \varrho_1}}$ , mentre per  $r \rightarrow \infty$ ,  $s \rightarrow 1$ . Pertanto dalle [27'] risulta

$$\begin{aligned}r \rightarrow 0, & \quad \varphi_1 \rightarrow 0 \\ & \quad \varphi_2 \rightarrow \infty \\ r \rightarrow \infty, & \quad \varphi_1 \rightarrow \infty \\ & \quad \varphi_2 \rightarrow 0\end{aligned}\quad [30]$$

La fig. 1 mostra l'andamento di  $\varphi_1$ ,  $\varphi_2$  e della loro somma in funzione di  $r$ , in un caso numerico particolare e per un'onda senza piani nodali. Supponendo fissato il valore di  $D$ , si esprima  $p$  in fun-

zione di  $r$  mediante la prima delle [29] e  $r$  in funzione di  $s$  tramite la terza delle [28].

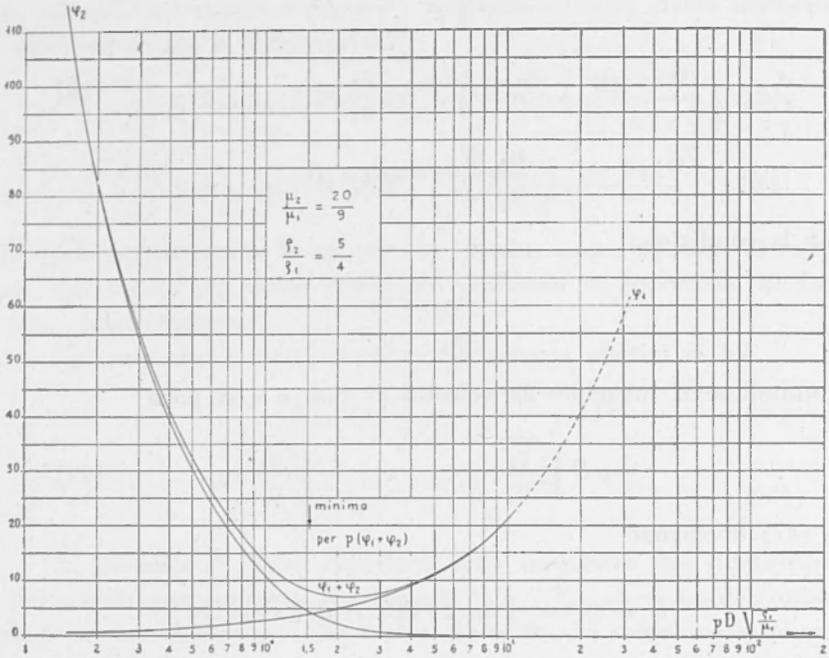


Fig. 1

Dalle [25''] e [26''], tenuto conto delle [27'], con qualche passaggio si ottiene

$$\begin{aligned}
 & \frac{dF_1}{dI} \rightarrow 0 \\
 p \rightarrow 0, & \quad \frac{dF_2}{dI} \rightarrow b \mu_1 \pi \frac{\mu_2^2}{\mu_1^2} \sqrt{\frac{\mu_1}{\mu_2}} \frac{2 \sqrt{\frac{\mu_1 \rho_2}{\mu_2 \rho_1}}}{\left(1 - \frac{\mu_1 \rho_2}{\mu_2 \rho_1}\right)} \frac{1}{D} \quad [31] \\
 & \frac{dF_1}{dI} \rightarrow \infty \\
 p \rightarrow \infty, & \quad \frac{dE_2}{dI} \rightarrow 0
 \end{aligned}$$

Si può quindi concludere che, fissato il valore dello spessore dello strato e dei parametri che caratterizzano il comportamento fisico dei

due mezzi a contatto, l'energia associata all'onda, per unità di intensità in superficie, al crescere della frequenza cresce nel mezzo superiore e decresce nel mezzo sottostante, partendo da un valore dipendente dallo spessore e dai suddetti parametri.

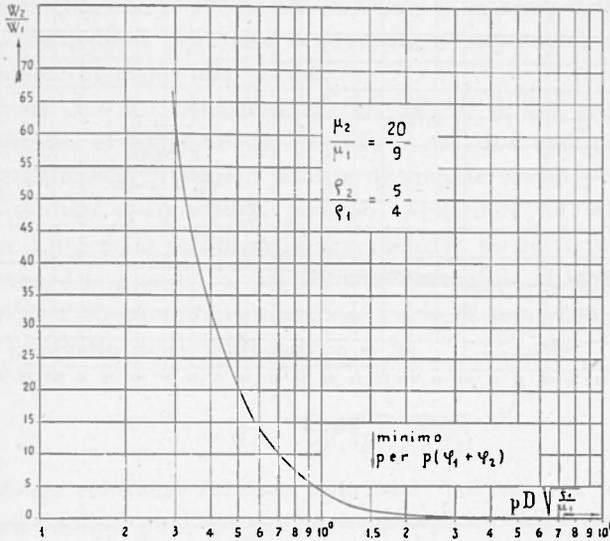


Fig. 2

La fig. 2 mostra l'andamento di  $\frac{\bar{W}_0}{W_1} = \frac{d\bar{r}_0}{dE_1} = \frac{\alpha_2}{\varphi_1}$  in funzione di  $r$ .

La somma  $(dE_1 + dE_0)/dI$  ha un minimo al variare di  $p$  e si può facilmente vedere che tale minimo si verifica in corrispondenza di un certo valore di  $r$ .

Ciò significa che esiste una frequenza, che diminuisce al crescere dello spessore dello strato, alla quale è associata, per unità di intensità in superficie, un'energia minima.

Nel caso che si assuma

$$\frac{\mu_2}{\mu_1} = \frac{20}{9} \quad , \quad \frac{\rho_2}{\rho_1} = \frac{5}{4} \quad [32]$$

il minimo di  $(dE_1 + dE_0)/dI$  si ha per

$$pD \sqrt{\frac{\rho_1}{\mu_1}} \simeq 1,52 \quad [33]$$

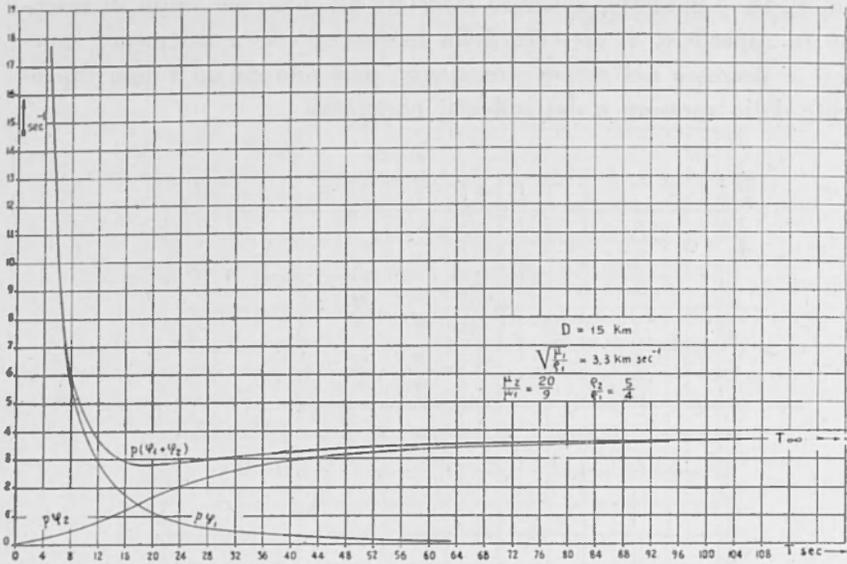


Fig. 3

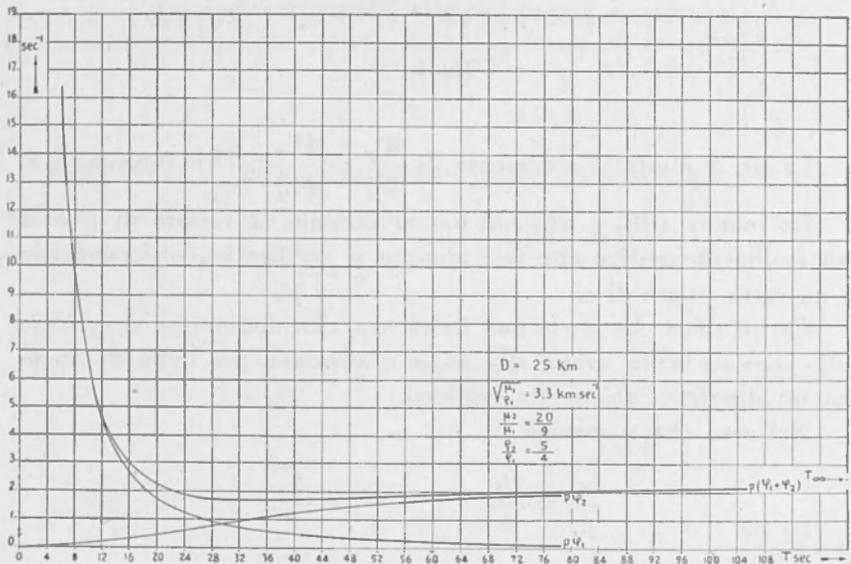


Fig. 4

Non sembra inutile osservare che il minimo della velocità di gruppo si trova invece in corrispondenza di

$$pD \sqrt{\frac{\mu_1}{\mu_2}} \simeq 3,06 \quad [34]$$

Ne deriva che le frequenze associate al minimo della velocità di gruppo richiedono, per unità di intensità in superficie, un'energia notevolmente superiore alla minima.

Le fig. 3 e 4 contengono  $dE_1/dI$ ,  $dE_2/dI$  divise per  $b\mu_1\pi$  e la loro somma, in funzione del periodo e per due casi particolari. La fig. 5 contiene le rispettive perdite di energia divise per  $2b\mu_1\pi$ .

I risultati precedenti si possono riguardare da un altro punto di vista. L'intensità dell'onda in superficie, in un certo intervallo della frequenza, è la grandezza direttamente accessibile all'osservatore. Essa costituisce l'effetto della presenza nel fascio di una certa energia, nello stesso intervallo della frequenza, e si ha

$$\frac{dI}{dE} = \frac{1}{b\mu_1\pi p(\varphi_1 + \varphi_2)} \quad [35]$$

Questa relazione fornisce l'intensità dell'onda in superficie per unità di energia presente nel fascio, al variare della frequenza.

Per quanto è stato già accennato, tale grandezza ha un massimo per un certo valore della frequenza, valore che diminuisce al crescere dello spessore dello strato. Se la frequenza assume valori più elevati di quello corrispondente al massimo, tende molto rapidamente a zero, mentre per valori minori decresce lentamente verso un valore finito: in altre parole le frequenze più alte di quella corrispondente al massimo, sono « tagliate » ed il taglio avviene per periodi tanto più lunghi, quanto maggiore è lo spessore dello strato. Si suppongano, p. es., verificate le ipotesi [32] e si assuma  $\sqrt{\frac{\mu_1}{\rho_1}} = 3,3$  km/sec.

Dalle [33] e [34] si hanno allora i seguenti valori approssimati per il periodo  $T_1$  corrispondente al massimo sopracitato e per il periodo  $T_2$  relativo al minimo della velocità di gruppo.

$D = 15$ km	$T_1 \simeq 19$ sec	$T_2 \simeq 9$ sec	
$D = 20$ »	$T_1 \simeq 25$ »	$T_2 \simeq 13$ »	[36]
$D = 25$ »	$T_1 \simeq 31$ »	$T_2 \simeq 16$ »	

I periodi corrispondenti al minimo della velocità di gruppo si trovano entro l'intervallo tagliato.

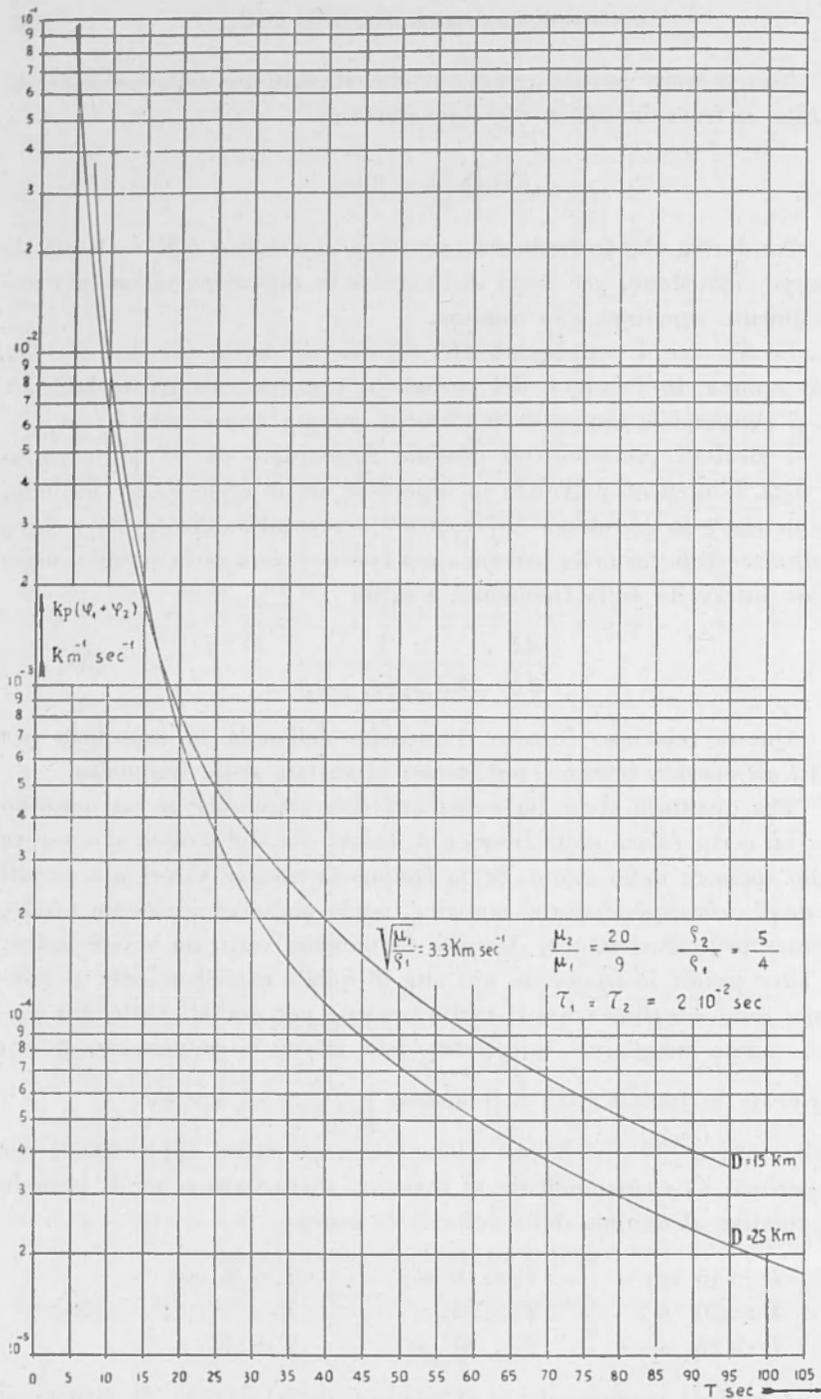


Fig. 5

*Effetto della dissipazione dell'energia sulla frequenza predominante.* — Lo spettro dell'intensità dell'onda in superficie viene progressivamente modificato durante la propagazione, per il fatto che l'assorbimento cresce con la frequenza.

Allo scopo di ottenere qualche informazione semiquantitativa, conviene seguire, se esiste, la frequenza predominante, ossia la frequenza associata al massimo assoluto dell'ampiezza.

Tale frequenza sarà fissata dalla condizione

$$\frac{d}{dp}(BB^*) = 0 \quad [37]$$

dove si è posto

$$BB^* = AA^* e^{-\gamma L x} \quad [38]$$

La [37] definisce la funzione

$$x(p) = \frac{1}{2} \left( \frac{d}{dp} \log AA^* \right) \frac{1}{\frac{dk}{dp}} \quad [39]$$

che rappresenta la distanza alla quale una certa frequenza è predominante.

Dato che  $x > 0$  e  $dk/dp > 0$ , la [39] ha senso soltanto se  $dAA^*/dp > 0$ .

Se per es. anche  $AA^*$  ha un massimo assoluto in corrispondenza di un valore  $p_0$  della pulsazione, il campo di definizione della  $x(p)$  sarà 0 —  $p_0$  da cui vanno tolti tutti i tratti nei quali la derivata di  $AA^*$  è negativa. Se  $AA^*$  presenta quindi valori stazionari a sinistra di  $p_0$  la frequenza predominante non varierà con continuità al variare della distanza  $x$ . Il rapporto

$$\delta = \frac{1}{\frac{dk}{dp}} \quad [40]$$

può chiamarsi trasmissibilità del mezzo poiché misura, in un certo senso, la capacità del mezzo stesso di propagare una certa frequenza.

Nella ipotesi [32], dalla tabella III della nota precedente, si possono ricavare alcuni valori approssimati di  $\delta$ . Se p. es. si pone

$$D = 20 \text{ km} , \quad \sqrt{\frac{11.2}{\rho_1}} = 3,3 \text{ km sec}^{-1} , \quad \tau_1 = \tau_2 = 210^{-2} \text{ sec}$$

si ha

$$\begin{array}{ll} T=13 \text{ sec} & \delta \simeq 320 \text{ km sec}^{-1} \\ T=25 \text{ »} & \delta \simeq 600 \text{ »} \\ T=42 \text{ »} & \delta \simeq 1230 \text{ »} \\ T=63 \text{ »} & \delta \simeq 2040 \text{ »} \end{array}$$

Dato che  $d\delta/dp < 0$ , se non si entra nel campo delle frequenze acustiche, la frequenza associata al massimo, andrà spostandosi generalmente verso lo zero, al crescere della distanza. Il suo andamento peraltro resta subordinato alla forma di  $AA^*$ , che dipende a sua volta dalla distribuzione dell'energia inizialmente convogliata nel fascio.

Per avere un'idea di come varia l'intensità dell'onda, nell'intorno della frequenza predominante, si può considerare il suo spettro, ossia

$$MM^* = AA^* e^{-2kx(p)} \quad [41]$$

Se si deriva  $MM^*$  rispetto a  $p$  tenendo conto della [39], si ha

$$\frac{1}{MM^*} \frac{dMM^*}{dp} = -2k \frac{dx}{dp}$$

Poiché  $dx/dp$  è in generale negativa e  $k$  cresce rapidamente con la frequenza, soltanto le basse frequenze tenderanno a conservare una ampiezza sensibile dopo lunghi tragitti. La perdita d'energia ha quindi l'effetto di ridurre rapidamente l'intensità dell'onda in corrispondenza delle frequenze più elevate, facendo diminuire, in generale senza regolarità, la frequenza predominante al crescere della distanza.

*Effetto dovuto alla variazione delle caratteristiche del mezzo stratificato.* — Durante la propagazione, un'onda può passare da una stratificazione ad un'altra. Si supponga, per semplicità, che il passaggio avvenga, in modo che non nascano sensibili onde secondarie. L'intensità dell'onda in superficie varierà in ogni intervallo della frequenza, perché l'energia associata al fascio rimarrà costante e dovrà ripartirsi in modo diverso fra i due mezzi a contatto della seconda stratificazione, nei riguardi della prima.

Se si indicano con un apice le grandezze relative alla prima stratificazione e con due apici le analoghe grandezze relative alla seconda stratificazione, supponendo, per evitare inutili complicazioni, che il passaggio avvenga in prossimità dell'origine, si avrà

$$\mu'_1 A' A'^*(\varphi'_1 + \varphi'_2) = \mu''_1 A'' A''^*(\varphi''_1 + \varphi''_2) \quad [42]$$

L'andamento del rapporto  $A'A^*/A''A''^*$  in funzione di  $p$ , dipende da un elevato numero di parametri.

Si supponga che siano verificate le condizioni

$$\frac{\mu'_1}{\mu'_2} = \frac{\mu''_1}{\mu''_2}, \quad \frac{\rho'_1}{\rho'_2} = \frac{\rho''_1}{\rho''_2} \quad [43]$$

in base alla seconda delle [31] risulta

$$p \rightarrow 0, \quad \frac{A'A^*}{A''A''^*} \rightarrow \frac{\mu'_1}{\mu'_1} \sqrt{\frac{\mu''_1 \rho'_1 D'}{\mu''_1 \rho''_1 D''}} \quad [44]$$

mentre dalle [27'], con qualche passaggio, si ottiene

$$p \rightarrow \infty, \quad \frac{A'A^*}{A''A''^*} \rightarrow \frac{\mu''_1}{\mu''_1} \sqrt{\frac{\mu'_1 \rho''_1 D''}{\mu'_1 \rho'_1 D'}} \quad [45]$$

Dalla [44] e [45] si vede, p. es., che se un'onda di Love passa da una stratificazione ad un'altra di spessore diverso, rimanendo costanti tutte le altre grandezze, le basse frequenze verranno amplificate e le alte ridotte, se lo spessore della seconda stratificazione è più grande della prima. Viceversa nel caso contrario.

La fig. 6 mostra appunto l'andamento del rapporto  $A''A''^*/A'A^*$

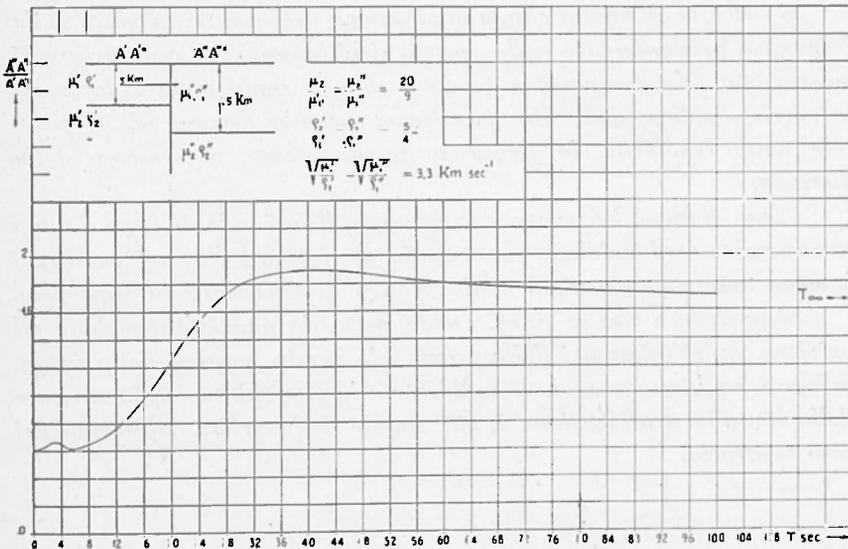


Fig. 6

in questa ipotesi. Più in generale, dal verificarsi di una delle eventualità

$$\sqrt{\frac{\mu''_1}{\rho''_1}} D' \leq \sqrt{\frac{\mu'_1}{\rho'_1}} D'' \quad [46]$$

dipende l'amplificazione o la riduzione delle alte e basse frequenze.

Mi riservo di ritornare prossimamente su questo particolare argomento, per una applicazione della teoria all'ampiezza dell'agitazione microsismica in osservatori diversi.

Roma — Istituto Nazionale di Geofisica — Aprile 1950.

### RIASSUNTO

*Mediante il calcolo della ripartizione spettrale dell'energia associata ad un'onda di Love non monocromatica e piana, viene valutato l'andamento dell'intensità in superficie, per unità di energia associata all'onda, in funzione della frequenza.*

*È risultato che questa grandezza ha un massimo in corrispondenza di un certo valore della frequenza, valore che diminuisce al crescere dello spessore dello strato. Se la frequenza assume valori più elevati di quello corrispondente al massimo, tende rapidamente a zero, mentre, per valori minori decresce lentamente verso un valore finito.*

*Si accenna all'effetto che la dissipazione dell'energia produce sulla frequenza predominante nello spettro dell'intensità in superficie e si mostra che tale dissipazione tende a ridurre rapidamente l'intensità in corrispondenza delle alte frequenze, facendo decrescere, in generale senza regolarità, la frequenza predominante, al crescere della distanza.*

*Viene discusso brevemente il passaggio di un'onda di Love da una stratificazione ad un'altra, pervenendo al risultato che nel passaggio avviene una redistribuzione nello spettro dell'intensità in superficie.*

*Si fa vedere che se p. es. l'onda passa da una stratificazione ad un'altra che si differenzia dalla prima solo per lo spessore dello strato, le basse frequenze vengono amplificate e le alte ridotte, se lo spessore della seconda stratificazione è più grande della prima. Viceversa nel caso contrario.*