PROBLEMI MATEMATICI NELLA GEOFISICA (*)

ERWIN HARDTWIG

La geofisica è una parte della fisica che si occupa dei processi fisici, in immediata relazione con la Terra. Di conseguenza si ripete nella geofisica la struttura della scienza fisica, non solo per quanto riguarda la suddivisione in meccanica, idromeccanica, elettromagnetismo, ottica ecc., ma anche riguardo alla suddivisione in una parte pratica applicata e una teorica. Ma mentre nella fisica la separazione della parte teorica, cioè della fisica teorica, si è dimostrata opportuna e feconda, non si è ancora sentita la necessità di una geofisica teorica, più o meno autonoma. Ciò non infirma tuttavia il fatto che nella geofisica ci sono ampi campi, che, più o meno chiusi in sè, richiedono per la loro trattazione metodi puramente teorici, cioè puramente matematici.

Qui sotto si indicheranno e discuteranno problemi di geofisica, che a una attenta considerazione appaiono problemi puramente matematici. Naturalmente, saranno addotti anzitutto problemi dei quali si è occupato l'Autore, o alla cui soluzione egli ha contribuito.

Problemi idrodinamici. — La risposta a tutta una serie di problemi di geofisica dipende dalla capacità di risolvere determinati problemi di idromeccanica. Ricordo qui la teoria delle maree, la trattazione teorica delle correnti marine, le oscillazioni proprie di parti di mare più o meno chiuse, e di mari interni, come pure i problemi relativi alla produzione, propagazione ed estinzione di onde d'acqua (onde di mare). Si aggiunge poi l'immenso complesso di problemi aereodinamici, posti dalla meteorologia dinamica. Nemmeno uno di questi problemi è completamente risolto; la maggior parte di essi non è ancora stata studiata o solo modestamente.

Accenniamo ad alcuni fondamenti. Se u, v, w indicano le componenti di una velocità di corrente dominante al tempo t in un determinato luogo x, y, z; ϱ la densità del fluido (aria) e p la pressione in questo posto; se inoltre X, Y, Z sono le componenti della forza di massa (p. es. della forza di gravità o delle forze d'onda) che agisce dall'esterno, allora devono sussistere simultaneamente le seguenti quattro equazioni differenziali:

$$\left.\begin{aligned} &\frac{\partial u}{\partial t} + u\frac{\partial u}{\partial x} + v\frac{\partial u}{\partial y} + w\frac{\partial u}{\partial z} = X - \frac{1}{\varrho}\frac{\partial p}{\partial x} \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ &\frac{\partial \varrho}{\partial t} + \frac{\partial(\varrho u)}{\partial z} + \frac{\partial(\varrho v)}{\partial y} + \frac{\partial(\varrho w)}{\partial z} = 0 \end{aligned}\right\} \qquad [1]$$

Sono le tre equazioni di impulso e l'equazione di continuità nelle coordinate di

(*) Traduzione in lingua italiana della Nota di pag. 315.

Eulero, riferite ad un sistema di assi cartesiani rettangolari. Di fronte a queste quattro equazioni, stanno cinque funzioni incognite u, v, w, ϱ, p.

La corrente è perciò indeterminata, finché non si aggiunge una quinta equazione.

Prescindiamo per il momento dalla quinta equazione mancante. Il campo della corrente abbisogna ancora della indicazione delle condizioni iniziali e ai limiti per essere determinato. Le prime devono stabilire la corrente, la densità e la pressione iniziali $u(x,y,z,o)=u_0$, ... $p(x,y,z,o)=p_0$, cioè lo stato al tempo $t=0$. Allora, la soluzione del problema [1] dipenderà bensì dallo stato iniziale ben definito, ma il suo influsso sulla forma della soluzione, aumentando il tempo, diventerà sempre più piccolo e può alla fine essere del tutto trascurato.

Le condizioni iniziali, geofisicamente parlando, sono quelle che si possono trascurare al più presto. Importanza ben maggiore spetta alle condizioni ai limiti. Le masse d'acqua terrestri, con le quali abbiamo da fare in geofisica, sono limitate d'ogni parte, sia: *a*) dalla superficie libera; *b*) dal suolo (fondo del mare, del lago); *c*) dall'orlo marginale (riva).

Finché si tratta di problemi idrodinamici, ϱ può essere presa come costante, e l'equazione di continuità esprime allora l'incompressibilità del fluido. Il sistema [1], a quattro equazioni, basta allora perfettamente a determinare, insieme con le condizioni secondarie, il campo di corrente e di pressione. Benché questo sia il caso più semplice che si possa pensare, passando ad esempi correnti, risultano notevoli difficoltà. La difficoltà principale sta in questo, che non si è ancora riusciti ad integrare sistemi di equazioni differenziali, non lineari, parziali. L'integrazione di *una* equazione differenziale parziale non lineare, con *una* funzione incognita è notoriamente data dalla teoria di Hamilton-Jacobi. Una trasposizione di essa ai sistemi non è ancora stata fornita dalla matematica, benché si possa ammettere che il pensiero di Lie, riguardo alla trattazione di equazioni di Pfaff, dovrebbe render possibile una tale trasposizione, o farne riconoscere l'impossibilità.

Un'altra difficoltà è che le equazioni idrodinamiche dovrebbero essere adattate alla figura terrestre, cioè ridotte a coordinate polari globali.

In coordinate curvilinee, la non linearità appare in forma particolarmente spiacevole, perché membri di secondo ordine appariscono nei u, v, w... che conformemente all'ordine di grandezza si lasciano difficilmente computare, l'uno rispetto all'altro e rispetto alla soluzione attesa, e rendono perciò difficile il trascurarli utilmente. Le equazioni ridotte si complicano sopra tutto perché le nuove coordinate debbono essere riferite alla Terra rotante.

La teoria delle maree di Laplace dimostra due cose: *primo*, che semplificando con l'aiuto di certe ipotesi (oceano dovunque egualmente profondo, avvolgente completamente la Terra, eliminazione delle oscillazioni proprie), si può giungere a conclusioni essenziali sul decorso delle maree; *secondo* che queste conclusioni coincidono tuttavia solo difettosamente con l'esperienza.

Il motivo va ricercato nell'assenza di condizioni sul bordo. Non solo la profondità del mare è una funzione di luogo molto variabile, ma anche il limite dell'oceano con le sue innumerevoli curve, baie, stretti, parti separate e isole, è di una così sconfinata varietà, che è praticamente impossibile chiudere in una forma empirica il decorso del suo confine e ancor meno a integrare poi con questa condizione marginale le equazioni idrodinamiche. Il problema della descrizione dei fenomeni delle maree, come quello delle correnti marine, prescindendo

dalla fondamentale difficoltà della integrazione di sistemi non lineari, non si potrà forse mai risolvere soddisfacentemente, anche solo per ragioni di matematica pratica. Ciò che noi qui possiamo fare, e che è già stato tentato da Airy nella teoria delle maree in un canale, come nei lavori di K. von Sterneck, può essere solo la soluzione di problemi parziali, che muovono da delimitazioni di semplice trattazione matematica e che permettono così, almeno per parti della superficie terrestre, la spiegazione dei fenomeni delle maree.

Per quanto doloroso possa essere il rinunciare ad una descrizione globale dei processi idrografici, l'elaborazione di problemi parziali è ricca di successi. A questo proposito rimando alla teoria delle oscillazioni di parti isolate di mare e di mari interni (sesse), com'è stata sviluppata da A. Defant e Hidaka, muovendo dagli esperimenti ancora semplici di P. du Boys e Chrystal. Le ricerche di *P. Caloi* e della sua scuola sulle oscillazioni proprie del golfo di Napoli, e di una serie di laghi italiani, hanno mostrato quanto si possono avvicinare teoria ed esperienza. Sarebbe augurabile che, dietro questo esempio, le oscillazioni proprie dei laghi tedeschi, specialmente della Baviera superiore, venissero ancora una volta calcolate. Le ricerche di Endrös, risalendo a 40 anni fa, si appoggiano ancora ai lavori di Chrystal e si possono considerare sorpassate.

Anche riguardo alle onde d'acqua, il lavoro principale è ancora da fare. Le esposizioni di Thorade, del conte von Larisch-Moenich e di O. Krümmel riuniscono bensì un ampio materiale, soprattutto di natura empirica, ma non s'addentrano nei singoli problemi. Questi sono: la produzione delle onde di mare dovuta al vento, la loro propagazione e il conseguente allungamento di periodo da una parte, estinzione dall'altra. Per quanto concerne la genetica delle onde del mare, i lavori di Jeffreys, Bondi e G. Neumann hanno già fatto notevoli passi verso la soluzione. I problemi, di cui qui si tratta, si possono risolvere supponendo, per semplificare, un mezzo fluido, infinitamente esteso, riempiente il semispazio, la cui superficie libera confina con un mezzo mosso, l'aria. L'attrito, essendo essenzialmente efficace alla produzione e al cambiamento di forma, non può essere trascurato, cioè le equazioni di Navier-Stokes di fluidi viscosi devono costituire la base dell'indagine.

Trattandosi qui in prima linea di onde superficiali, risulta da sé una certa analogia con la sismologia. Specialmente il problema dell'allungamento del periodo e della estinzione di onde a periodo breve, richiede una precisa indagine. Se questi due complessi di problemi finora non sono stati soddisfacentemente trattati, lo si deve a difficoltà d'ordine matematico. Certamente la viscosità, o, trattandosi di onde di terremoto, l'attrito del corpo solido, ha in ciò la propria parte. Essa produce smorzamento ed estinzione selettiva, come pure — nel problema dei limiti — allungamento del periodo. Ma non ne è la sola causa. La causa principale dovrebbe essere puramente matematica. Sia l'allungamento del periodo che l'estinzione dovrebbero risultare anche se si muove da un «fluido» ideale, cioè senza attrito, in quanto si cerca di integrare strettamente solo le equazioni di movimento. Strettamente, cioè con riguardo ai membri di II ordine. Per facilitare l'integrazione, si sostituiscono di solito le derivazioni totali secondo il tempo du/dt..... con le parziali $\partial u/\partial t$ e si linearizza così il problema. Ma in tal modo si introduce, senza saperlo, la premessa che le onde siano *stabili di forma*. Tale ipotesi può essere fatta finché si tratta di processi d'onde in piccoli ambienti e per breve tempo. Le differenze fra teoria ed esperienza sono qui così piccole,

che si possono trascurare. Ma le onde marine passano sopra a zone immense e durano ore e giorni. In *questo* caso appaiono palesi le discordanze che si fondano su ingiustificate ipotesi semplificatrici. Anche qui ci troviamo quindi di nuovo davanti al problema di integrare le equazioni non lineari di movimento della idrodinamica.

Problemi aerodinamici. — Come già fu ricordato, i rapporti sono particolarmente semplici, se si può ammettere, come nell'idrodinamica, ϱ = costante. Per la descrizione dei processi atmosferici questa ipotesi non si deve più fare, e ciò significa che il sistema [1] a quattro equazioni differenziali, non determina più univocamente il campo di corrente (u, v, w, ϱ, p). Si deve aggiungere ancora un'equazione. Si può senz'altro ricorrere alla equazione di stato del gas (dell'aria) $\varrho = \varrho(p, T)$; o addirittura considerare l'equazione ideale $p = R\,\varrho\,T$ (R = costante del gas, T = temperatura assoluta) come sufficientemente esatta.

Se si conoscesse, per ogni elemento di volume dell'atmosfera, la temperatura come funzione del tempo, il sistema [1] sarebbe completo così che la corrente complessiva, che parte da una determinata corrente ideale, ed è in accordo stabile con le condizioni ai confini, sarebbe perfettamente determinata. Ma questo non è il caso. Il decorso della temperatura nel tempo per ogni punto dell'atmosfera non è noto; viceversa, non solo dipende dal processo di corrente, ma ciò che più conta, dal continuo assorbimento ed irraggiamento di energia calorifica. Ogni singolo elemento di volume dell'oceano d'aria sta in stabile relazione di irraggiamento col sole, con lo spazio e con i vicini elementi di volume. Inoltre al margine del campo, quindi alla superficie terrestre, ha luogo continuamente assorbimento ed emanazione di energia, il che comporta una variazione di temperatura di ogni elemento di superficie.

Nell'equazione di stato non possiamo quindi far variare indipendentemente T (x, y, z, t), ma la dobbiamo considerare come una funzione egualmente incognita, così che dobbiamo determinare ora sei funzioni u, v, w, ϱ, p, T. La sesta equazione, ancora mancante, deve portare una chiarificazione circa il movimento di energia di ogni elemento di volume. Questo può essere il primo fondamento della termologia nella sua forma differenziale. Possedendo esso la forma di una equazione di Pfaff non integrabile, ciò significa da un punto di vista puramente matematico, un tale aumento di difficoltà del problema, che non si può pensare alla sua soluzione. Anche se si ammette che i processi nell'atmosfera decorrano solo adiabaticamente o isotermicamente, cioè anche se si rende artificiosamente integrabile la prima proposizione fondamentale, questa difficoltà viene solo di poco diminuita.

Il problema di determinare la circolazione globale atmosferica, che si verifica sulla Terra rotante sotto l'influsso della temperatura oscillante periodicamente, non può essere considerato con probabilità di successo. Ciò è spiacevole perché alla sua soluzione è legata quella di molti altri problemi. Anzitutto, con ipotesi generali e fortemente idealizzate, conseguirebbe un quadro della grande circolazione spaziale dell'aria, che si manifesta in flusso e riflusso, deriva occidentale e circolazione nelle zone polari.

Il quadro migliorerebbe considerando più esattamente le relazioni ai limiti (superficie terrestre con proprietà termodinamicamente molto diverse, come terra, mare, suolo nudo, bosco, neve...), e diventerebbe, almeno teoricamente, quasi perfetto, considerando le relazioni orografiche nelle condizioni ai limiti.

Il problema fondamentale della meteorologia: da una data distribuzione iniziale della corrente d'aria sulla Terra rotante, determinarne l'ulteriore decorso, non è quindi fondamentalmente insolubile. Il compito non si può esaurire solo per via pratica. Ma che si tratti qui veramente del problema fondamentale, lo si riconosce, se si riflette che quando può essere previsto il decorso della corrente da una situazione iniziale, è predeterminata anche la stratificazione delle masse d'aria, di fronti e della formazione di pressione. Queste però formano nel loro complesso il decorso del tempo e questo è quanto importa, non la predeterminazione dei singoli elementi del tempo.

A una circostanza ci si deve qui richiamare: l'evento terrestre del tempo atmosferico, prescindendo da influssi extraterrestri (naturalmente, eccettuato il sole), che in caso di necessità sono pure pensabili, forma una *unità globale.*

Non è possibile separare una zona parziale della superficie terrestre e voler per essa risolvere il problema idrotermodinamico della corrente. Ciò non va, perché il campo di corrente, pressione e temperatura, alle condizioni iniziali e ai limiti che si devono allora supporre, è bensì determinabile nell'ambito considerato, ma agisce tosto al di là del proprio limite, ed influisce nuovamente su di questo, così che le condizioni marginali così modificate agiscono nuovamente sulla corrente.

Non esiste allora appunto alcun sistema idrotermodinamico chiuso. Ciò che tutt'al più si può intraprendere come suddivisione, è il considerare a sé gli emisferi nord e sud.

La zona equatoriale forma allora per entrambi il limite comune.

I campi di corrente nord e sud sarebbero allora indipendenti l'uno dall'altro. È noto che anche questa idealizzazione strettamente presa non è accettabile, poiché le correnti esorbitano dalla zona equatoriale e anche al di là dell'equatore sussiste scambio di energia. Tuttavia separare zone parziali convenienti e risolvere il problema di corrente anzitutto per esse, sarà l'unica possibilità per procedere di alcuni passi nella predizione del tempo. Si è già guadagnato molto, se partendo da una situazione iniziale, si può determinare il decorso di corrente per i giorni successivi, sempre appoggiandosi a situazioni atmosferiche trascorse, ben provate. Non ci si dovrà aspettare che teoria e pratica vadano conformemente per più giorni. Non essendo il problema posto con la necessaria completezza, appariranno tra teoria e realtà, scostamenti sempre più grandi, che alla fine le faranno divergere.

Se dall'aver impostato problemi così generali e difficili si passa a problemi più speciali e modesti, rimane ancor sempre una quantità di possibili feconde ricerche. Per es., si trattano problemi del gradiente del vento ancora in sistemi di coordinate tangenziali a piccoli spazi, per i quali si può ammettere come costante l'ampiezza geografica. Tutte le condizioni sul gradiente del vento si ottennero sempre a questa condizione, molto limitante, per quanto le zone di alta e bassa pressione che compaiono in natura si estendono per campi ben più vasti. La coincidenza con l'esperienza basta per scopi pratici, ma un giudizio sarà possibile solo quando le affermazioni riguardanti il gradiente del vento siano indagate in un sistema globale di coordinate saldamente collegato col centro della Terra. Ma che nemmeno nei cosidetti sistemi a piccoli spazi siano state ancora esaurite tutte le possibilità per il vento-gradiente, lo poté dimostrare l'Autore due anni fa in una piccola nota: accanto al vento-gradiente normale, è sempre possibile, sia

in caso di cicloni che di anticicloni, che ce ne sia uno «anormale» che spira sempre anticiclonicamente, anche se non c'è alcun gradiente di pressione.

Ai problemi aereodinamici della geofisica appartengono anche quelli relativi ai processi di turbolenza e scambio, sia nei gas (aria) che nei fluidi (mare, acqua). È noto che circa l'origine della turbolenza non si poté ancora stabilire nessuna teoria soddisfacente. Le equazioni idrodinamiche, che costituiscono sempre il punto di partenza per ricerche di corrente, non contengono, nella loro forma semplificata per la pratica del calcolo, nulla che conduca al passaggio dalla corrente laminare a quella turbolenta. Nella teoria della elasticità la considerazione dei termini non lineari permette l'interpretazione dei fenomeni fino ad ora non spiegabili, come l'allungamento dei periodi e la levigazione delle onde. Si solleva il sospetto che una cosa simile possa essere nell'idrodinamica: sussiste la possibilità che la linearizzazione che si intraprende per la semplificazione matematica, porti alla eliminazione di elementi essenziali nelle equazioni di movimento, elementi che nelle conseguenze che si possono derivare dalle equazioni conducono forse a quei rapporti, dai quali dipende l'avverarsi della turbolenza. Qui sono necessarie indagini più precise sul campo dell'«idromeccanica non lineare», analogamente all'espressione della teoria della elasticità.

Ma anche se riuscisse il passaggio dalla corrente laminare a quella turbolenta, movendo puramente dalle equazioni di movimento, sarebbe comunque un'impresa disperata e anche inutile, ai fini di una completa conoscenza del decorso della corrente. Essenziale non è la conoscenza del movimento, di ogni singola particella di massa, ma il movimento in grande, la corrente macroscopica. Si tratta quindi di porre equazioni per la corrente macroscopica. Muoviamo in questo dalla convinzione che il decorso della corrente macroscopica sia descrivibile per mezzo di equazioni della forma Navier-Stockes, purché poniamo per le costanti che vi compariscono (tenacia, attrito) valori di ordine di grandezza corrispondentemente diverso (attrito di turbolenza). Che questo pensiero non sia errato, lo mostrano i successi incontrati nel problema del vento.

Difficoltosa è soltanto la derivazione delle equazioni corrispondenti.

Il motivo di tale difficoltà va ricercato innanzitutto nel concetto «elemento di turbolenza», matematicamente difficile da afferrarsi; tali elementi poi si trovano in effetto scambievole, altrettanto difficile ad afferrarsi; inoltre non sono persistenti, in completa opposizione alle molecole di un gas, con le quali sono spesso poste in parallelo.

L'Autore ha cercato di percorrere una via per la derivazione delle equazioni macroscopiche di movimento, partendo da una serie di postulati, il più importante dei quali è l'ipotesi che l'elemento di turbolenza sia identificabile con un sistema meccanico d'altissimo grado di libertà. È fuori di dubbio che il risultato finale, appunto le equazioni di Navier-Stockes, è giusto.

Non incontrerà pure obiezione alcuna, che l'inizio di rimescolamento di *Prandtl* sia da sostituire con uno più generale, fisicamente più plausibile. Ma l'identificazione degli elementi di turbolenza con un sistema di grado di libertà N, apparirà dubbio a qualcuno; sarebbe pertanto augurabile tentare per altra via una derivazione degli stessi risultati.

Al problema della turbolenza si connette quello dello scambio («Austausch»). Ogni turbolenza determina lo scambio di qualche proprietà localizzata in qualche determinato punto spazio-temporale del mezzo, in quanto le trasporta oltre. General-

mente si descrive questo scambio con una equazione differenziale unica, apparentemente simile a quella della conduzione del calore, l'equazione di scambio. L'Autore poté mostrare che le cose sono sostanzialmente più complicate. Per la descrizione del procedimento di scambio non basta un'unica equazione, quale l'equazione di continuità. Lo scambio dipende piuttosto da un sistema di equazioni differenziali parziali non lineari, che sono analoghe alle equazioni di impulso dell'idromeccanica. L'equazione di continuità per la massa deve a sua volta essere adempiuta e fornisce l'equazione di scambio in senso più stretto. La derivazione del sistema si compie come quella delle equazioni macroscopiche di movimento di fluidi e gas scorrenti turbolentemente, con l'aiuto di una serie di postulati plausibili. In particolare, ci si richiama al pensiero di Maxwell, di stabilire un'« equazione di trasporto » di forma molto generale. Ma vale qui la stessa osservazione, come sopra: mentre il risultato finale come tale non può essere messo in dubbio, la via che vi conduce non è pericolosa ma rischiosa e dovrebbe essere sostituita da una più semplice.

Ciò che conta in tali riflessioni è che con esse si indica la sorgente di qualche divergenza fra teoria ed esperienza: i processi non sono appunto descrivibili a mezzo di una sola equazione nella quale la corrente macroscopica compare come dato stabilmente proposto, mediante il quale la « proprietà » viene trasportata oltre. Si possono pensare dei casi, in cui il campo di corrente vien mutato dal trasporto della proprietà, in cui, in altre parole, lo scambio agisce di rimando sulla corrente e la modifica. Se si ammette questo, si deve anche ammettere che solo un sistema di equazioni differenziali può riprodurre questi processi, non un'equazione singola. Che queste riflessioni siano giuste, lo mostra sopra tutto il noto fatto che la vecchia teoria di scambio non è sufficiente in questioni di scambio di calore. Deve essere insufficiente, perché appunto il calore agisce di rimando sull'originario campo di densità e di corrente, deformandolo.

Problemi riguardanti la fisica della Terra solida. — La meccanica della Terra solida pone una serie di quesiti di natura matematica non ancora, o non ancora definitivamente, risolti. Uno dei più importanti sarebbe questo: quali specie di onde sismiche sono possibili? I sismologi si rendono il compito troppo facile, se muovono dal presupposto, che, — premesso sempre in un mezzo omogeneo isotropo — ci siano due specie di onde spaziali: trasversali e longitudinali con le relative velocità di fasi

$$V_s = \sqrt{\frac{\mu}{\varrho}}, \quad V_p = \sqrt{\frac{\lambda + 2\mu}{\varrho}} \qquad (\lambda, \mu = \text{costanti di Lamé}, \ \varrho = \text{densità}) \qquad [2]$$

Si dovrebbero qui aggiungere le onde superficiali di Rayleigh ed, eventualmente, in un mezzo stratificato, le onde di Love. Si deve dire: onde puramente trasversali sono nell'interno della terra impossibili, come quelle puramente longitudinali (tranne singole eccezioni). Certamente, le equazioni differenziali della teoria dell'elasticità conducono ai due noti tipi di equazioni per onde distorsionali e di condensazione, con le espressioni [2] per la velocità di fase, ma questo vale solo nello spazio illimitato da ogni parte, che si estende quindi dappertutto all'infinito. Appena una superficie di confine appare nel finito — e che questo sia il caso per la Terra, nessuno vorrà contestare — si devono considerare nella integrazione delle equazioni di onde le condizioni di superficie, indipendentemente dal fatto

che ci si interessi di onde superficiali o spaziali. È indifferente che si supponga una superficie libera o che si stabilisca una qualche altra prescrizione: essenziale è solo che la presenza della superficie deve essere presa matematicamente in considerazione.

Il merito di aver segnalato questa circostanza — anche se con poco successo — spetta a C. Somigliana. Si ammette, come di consueto, che il mezzo giacente sotto il piano xy possa riempire il semispazio, quindi avere per superficie il piano $z = O$. In una superficie libera le componenti di tensione p_{xz}, p_{yz}, p_{zz} devono scomparire per $z = O$. Queste sono le solite condizioni di superficie. Le componenti p vengono usualmente supposte come funzioni lineari delle componenti di deformazione (senza considerare i membri di II ordine). Nè le onde di spostamento u, v, w, appartenenti alle onde trasversali nè quelle appartenenti alle onde longitudinali sono compatibili con queste condizioni di superficie. Solo se da entrambe si forma una coppia di onde, si è in grado di soddisfare alle condizioni di superficie. Che si debba procedere così con le onde di superficie, è noto da tempo, dopo il lavoro di Lord Rayleigh. Non sembra evidente che si debba considerare la necessità che si soddisfino le condizioni di superficie anche nelle onde spaziali. Ciò è tanto più notevole in quanto nella teoria dell'elasticità (ed anche nell'idromeccanica) vi è l'uso di considerare le condizioni di superficie, nonché di supporre la soluzione generale come composta di una parte libera da rotazione e una libera da divergenza.

L'Autore ha l'intenzione di investigare meglio queste cose in uno studio in preparazione. Certamente la teoria delle onde sismiche ne risulta molto più complicata e scomoda, come si vede già p. es. dall'ottimo lavoro di C. R. Lapwood. Ma d'altra parte certi fatti, finora sentiti come paradossi, trovano la loro spiegazione. Le onde di Rayleigh p. es. si devono muovere solo lungo la superficie (quindi orizzontalmente). Ma si osservano anche in profondità, p. es. per esplosioni alla superficie terrestre. Come giungono gli impulsi fin laggiù? Qual è la legge di propagazione verso le profondità? Questa ed altre domande trovano la loro spiegazione se si muove dalla teoria delle coppie di onde, che soddisfano alla condizione di superficie. Una parte principale l'ha in questo la cosidetta equazione di Rayleigh di III grado, con una radice sempre reale e quasi immutata in valore (conformemente alla scelta della costante di Poisson), mentre le altre due radici accoppiate possono essere reali, coincidenti, complesse coniugate. Va da sé di interpretare come onda S la soluzione relativa alla radice isolata, più difficile ma inevitabile, è la interpretazione come onda P delle soluzioni corrispondenti alla coppia di radici.

Mi riserbo di studiare meglio tali rapporti in altra occasione.

Merita di rilevare che i pensieri di Somigliana sono stati continuati in altra direzione: *P. Caloi* ha cercato di identificare certi gruppi di onde nella fase principale di un terremoto, con onde richieste dalla teoria di Somigliana.

Nell'esposizione della teoria appare del resto il fatto notevole che le espressioni per la velocità non dipendono più solo da μ ma anche da λ; si rileva inoltre che il trasporto di energia perpendicolarmente alla superficie si manifesta in modo completamente trascurabile, e, se non già lungo la superficie, ha luogo tuttavia sotto il suo immediato influsso.

I concetti qui esposti sarebbero certamente affiorati più volte nella letteratura, se Uller, che si è per primo occupato di onde generali associate alle condizioni

di superficie, non avesse esposto le sue teorie in una forma quasi illeggibile. Con l'esagerata preoccupazione di eleganza matematica, ha reso più difficile la diffusione dei suoi pensieri, degni di nota almeno in questo campo.

Anche per un altro motivo si può diffidare delle formule [2]. Esse sono derivate non solo sotto la premessa di un mezzo infinitamente esteso, ma anche nell'ipotesi che il mezzo sia originariamente allo stato naturale, cioè libero da tensione e deformazione. Ora la Terra possiede non solo una superficie posta tutta nel finito, ma nel suo interno domina una indefinita pressione idrostatica, conseguente alle masse gravitanti. Come agisce essa sulla velocità delle onde? Anzitutto, la pressione muta le costanti μ e λ e precisamente nel senso di una elevazione, anche se relativamente piccola. Ma prescindendo da questo, sembrano contraddirsi al presente due concezioni. Poincaré ha mostrato nelle sue lezioni sulla teoria della elasticità, che l'ipotesi di una tensione iniziale è d'importanza nello stabilire le formule che si vogliono conseguire.

Brillouin ha trattato questo problema da un punto di vista generale e giunge egualmente al risultato, che p. es. la pressione idrostatica nei valori di velocità che ora dovrebbero essere dati da

$$V_s = \sqrt{\frac{\mu - p}{\varrho}}, \quad V_p = \sqrt{\frac{\lambda + 2\mu - p}{\varrho}} \qquad [3],$$

si fa fortemente sentire.

In opposizione a questa concezione Biot e Birch giungono al risultato che la pressione idrostatica nell'interno della Terra non sia di influsso essenziale sulla velocità delle onde. Se dovesse risultare che le formule [3] si possono sostenere, sarebbe possibile un'interpretazione sulla mancanza delle onde S nel nucleo della Terra.

In realtà verso l'interno della Terra la rigidità (calcolata sulla base di [2]) e la pressione (calcolata dalla distribuzione della densità) diventano press'a poco dello stesso ordine di grandezza, e si può pensare che alla profondità critica di 2900 km., i valori di p e μ diventino eguali fra loro, cosicché V_s scompare. Per p ancora maggiore V_s diverrebbe immaginario (scomparsa delle onde S). Nel tempo stesso diminuirebbe in corrispondenza V_p. Una difficoltà per questa concezione sta nell'improvvisa mancanza dell'onda S e nel forte salto di velocità dell'onda P al confine del nucleo (che *P. Caloi* ha trovato nuovamente a 2920 km).

Che le questioni qui toccate siano ancora aperte e abbisognano di una ricerca matematica, consegue da queste altre osservazioni.

La mancanza della fase S si spiega con l'improvviso abbassamento del valore di μ nei pressi dello zero, sia che si ritenga il nucleo fluido (ipotesi del nucleo di ferro di Wiechert), sia che, con Ramsey, si ammetta il passaggio dalla fase molecolare a quella metallica. Le oscillazioni del polo con il loro periodo di ca. 430 giorni da una parte (Periodo di Chandler) e le deformazioni periodiche della corteccia solida della Terra che vengono provocate dalle forze delle maree dall'altra, esigono una determinata distribuzione di μ nell'interno della Terra, conforme alle leggi fisiche.

Supponendo un aumento di densità nell'interno della Terra secondo la legge

di Roche, Schweydar ha trovato che μ varia con la distanza dal centro nel seguente modo (R = raggio della Terra):

$$\mu = 16.10^{11}\left[1 - 0.83\left(\frac{r}{R}\right)^2\right].$$

Ad un risultato fondamentalmente simile si deve giungere naturalmente anche se si sostituisce la legge di Roche con un'altra, ed es. con la distribuzione di densità di Bullen o Ramsey. In ogni caso, anche nel cuore della Terra μ non solo non dovrebbe essere enormemente piccolo, ma si dovrebbe supporre più grande che nel mantello. Resta quindi la questione: un valore piccolissimo di μ nel nucleo della Terra, con nota distribuzione di densità e conoscenza delle velocità delle onde sismiche, è compatibile con i valori del periodo di Chandler e con le ampiezze misurate delle maree della crosta solida terrestre? In caso contrario, come devono essere modificate le formule per spiegare la scomparsa dell'onda S e la diminuzione della velocità al limite del nucleo? Non vi ha una parte la pressione idrostatica? Le ricerche sulla struttura dell'interno della Terra hanno ignorata questa impostazione del problema: né Wiechert, né Kuhn-Rittmann, né Ramsey ne hanno tenuto conto. D'altronde Schweydar ha trascurato da parte sua la esigenza, che μ possa diventare nell'interno della Terra piccolo, tanto da scomparire, forse perché al suo tempo il fatto della scomparsa di S non era ancora noto, o sicuro, come oggi.

Un problema di Sismologia, pure essenzialmente matematico, è il seguente. Quanto viene registrato nel sismogramma è l'immagine sovrapposta di tre movimenti: delle oscillazioni proprie del sismometro, delle oscillazioni libere del suolo, di quelle forzate, provenienti dall'ipocentro.

Si supponga che sia praticamente possibile separare questi tre movimenti parziali. Resta allora la questione: dal movimento ricavato, provocato dal suolo, si può dedurre il movimento all'origine, quindi la sua propagazione? L'inverso di questa domanda dovrebbe suonare così: Dato che vi sia una condizione al limite, p. es. il decorso temporale di movimento di particelle al limite (al focolare): come apparisce a una determinata distanza del fuoco sismico il corrispondente movimento del suolo? Il modo con cui viene prodotto uno scuotimento del suolo, quindi la condizione al limite, indica come decorra il movimento del suolo nella stazione. Si tratta dunque della soluzione del valore al limite. Questioni di tal genere sono appena considerate. Alquanto più semplice a risolversi è la questione del valore iniziale, anche se le spetta un modesto valore pratico. Ma si riconosce in qual modo gli avvenimenti nella sorgente del disturbo possano modificare i movimenti. L'Autore ha trattato questa questione per le onde di Rayleigh, ma essa deve naturalmente essere risolta a fondo per tutte le specie di onde sismiche. Questo anche per il motivo che in tal modo si può interpretare un altro fenomeno, che finora non potè essere spiegato: penso all'allungamento del periodo delle onde sismiche e alla depressione dei massimi durante il processo di propagazione.

L'Autore ha indicato in una breve nota la possibilità per la trattazione del problema. La Terra considerata nel suo insieme è completamente elastica per perturbazioni a breve periodo, come sono le onde sismiche.

È quindi lecito partire dalle equazioni di movimento di corpi puramente

elastici. Queste forniscono però solo processi puramente periodici; allungamenti di periodi non compaiono, nemmeno nella soluzione di problemi ai limiti, mancando lo smorzamento. Un'esatta indagine mostra che la costanza di forma delle onde elastiche non è affatto in relazione con l'elasticità pura; in altri termini, le equazioni di movimento della teoria dell'elasticità non danno onde di forma costante, quindi puramente periodiche, *se non vengono artificialmente semplificate*. Se non si sostituiscono le derivazioni secondo il tempo per mezzo di quelle parziali, se non si interrompe inoltre lo sviluppo del potenziale elastico dopo i membri di secondo ordine, se infine si impiega il *tensore* di deformazione completo anziché abbreviato, allora le equazioni perdono bensì il loro carattere semplice, lineare e la capacità di sovrapposizione delle loro soluzioni, ma la rappresentazione dei movimenti possibili diventa più ricca e le onde cambiano forma durante il processo di propagazione. Sarà uno dei principali compiti della teoria dell'elasticità non lineare, indagare il modo secondo cui i profili di disturbo si deformano durante il processo di propagazione. Troveranno allora la loro spiegazione anche l'allungamento dei periodi e il progressivo appiattimento delle onde.

La trattazione di problemi non lineari è difficile. È perciò opportuno procurarsi un modello di processi che permetta una trattazione lineare e permetta al tempo stesso di dare un'immagine dei processi elastici nell'interno della Terra. Possiamo dire che i processi si svolgono così come se il mezzo Terra fosse non puramente ma viscosamente elastico.

Dobbiamo lasciare aperta la possibilità, che alla Terra spetti un certo grado di viscosità. La questione è soltanto di trovare le corrispondenti equazioni di movimento. Di per sé, è possibile in svariatissimi modi, di trovare mezzi che hanno proprietà tanto elastiche quanto viscose. Le necessità della tecnica hanno promosso sempre nuovi tentativi a questo riguardo. Si tratta qui del problema di riprodurre le proprietà meccaniche delle distanze usuali nella tecnica, quanto matematicamente meglio è possibile. La valutazione più semplice al riguardo risale a Voigt. Egli rappresenta il tensore di tensione come funzione lineare del tensore di deformazione e del tensore di velocità di deformazione, dà quindi un primo accostamento per cambiamenti molto piccoli e lenti. Le equazioni fondamentali elastiche sono allora nel solito modo.

$$\rho \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = (\lambda + \mu) \frac{\partial \vartheta}{\partial x} + \mu \Delta u + (\lambda' + \mu') \frac{\partial \vartheta}{\partial x} + \mu' \Delta u \,; \ldots \quad [4].$$

Le costanti λ', μ' rappresentano le proprietà viscose del mezzo.

L'Autore ha studiato più a fondo la propagazione delle onde in un tal mezzo. Ricerche profonde su onde superficiali ecc. furono fatte ad opera di *P. Caloi*. Sulla base di studi propri, risulta il seguente notevole stato di cose. Finché il mezzo si considera come infinitamente esteso, λ', μ' come λ, μ rimangono grandezze da scegliersi da arbitrio. Le onde mostrano una dispersione dipendente da λ', μ'. Ma se si introduce una superficie, e insieme quindi condizioni di superficie, cessa l'arbitrio nella scelta di λ', μ' e sussistono le relazioni

$$\lambda\mu' - \lambda'\mu = 0, \qquad \text{cioè} \qquad \mu' = \mu\tau, \qquad \lambda' = \lambda\tau$$

dove τ è un fattore di proporzionalità della dimensione di un tempo. Ciò significa: la proporzionalità già postulata da Maxwell tra viscosità μ' e la rigidità μ

risulta da sé, insieme al corrispondente rapporto per λ'. Il τ ha la funzione del tempo di rilasso. La formula per la velocità di fase dell'onda S diventa ora

$$V_s = \sqrt{\frac{\mu}{2\varrho}\left[1+\sqrt{1-\left(2\pi\frac{\tau}{T}\right)^2}\right]}\ , \qquad T = \text{periodo}$$

ed una corrispondente relazione vale per l'onda P. Si riconosce che nel caso puramente elastico (quindi per $\tau = 0$ e perciò anche $\mu' = \lambda' = 0$) risulta l'usuale formula per V_s, ma che nel caso di elasticità viscosa ($\tau > 0$) la dispersione dipende dal rapporto $2\pi\tau/T$. Se questo diventa $= 1$, V_s raggiunge il suo valore più piccolo: per tempi di rilasso maggiori del periodo, V_s diventa immaginario: una propagazione d'onda non ha più luogo, nemmeno per onde longitudinali. Queste riflessioni si devono contrapporre alle spiegazioni di Kulmn-Rittmann, errate e basate su un malinteso del concetto di tempo di rilasso, le quali credono di dover ricondurre la mancanza delle onde S nell'interno della Terra alle formule [2].

Accanto alla dispersione, appare nel mezzo viscoso-elastico un altro importante fenomeno: l'attenuazione e smorzamento, precisamente secondo lo spazio e il tempo. Se osserviamo ora l'attenuazione temporale, risulta che il fattore di smorzamento $\exp(-a\,t)$ è dipendente dal periodo — a contiene il periodo nel denominatore, e quadraticamente —. Delle oscillazioni libere possibili nel mezzo durante il processo di diffusione, quelle a periodo breve vengono attenuate più fortemente di quelle a periodo lungo. Ci troviamo qui in coincidenza con altri campi della fisica, nei quali parimenti i fenomeni a periodo breve durano molto meno di quelli a periodo lungo. Praticamente, questo significa che le onde più lunghe si propagano a maggior distanza.

Con questo si spiega anche il fenomeno dell'allungamento del periodo e dell'allisciamento delle onde. Sia supposto un disturbo nel focolare, come funzione del tempo. Questa funzione si può pensare formalmente sorta per sovrapposizione di onde parziali di periodo diverso (sviluppo in una serie di Fourier o in un integrale di Fourier). Risolviamo dunque il problema del valore al limite mediante uno sviluppo in serie. Mentre il disturbo passa dalla sorgente alla stazione, noi supponiamo che pure questo sviluppo proceda. Con ciò, le onde componenti a periodo breve vengono sempre più eliminate; quelle a periodo lungo determinano sempre più fortemente l'aspetto dell'onda. Gli angoli e le punte nel profilo del disturbo, nei quali le componenti a periodo breve hanno particolarmente parte, vengono spianati. Contemporaneamente ha luogo un'estensione in lunghezza di tutto il profilo, cominciando dalla testa dell'onda. Si giunge così all'allungamento del periodo. Come questo processo si svolga singolarmente, l'ho spiegato nel mio studio per l'abilitazione a Stoccarda. Con ciò si spiega perché p. es. l'agitazione microsismica (microsismologia) giunga alle stazioni interne con periodi molto maggiori che nelle stazioni vicino alla costa, e perché le onde siano là più liscie che non più vicino al focolare d'origine.

Non dobbiamo però perdere d'occhio che queste considerazioni sono suggerite nient'altro che da un particolare modello.

La verità si troverà altrove. I *due* effetti coincideranno: la deformazione del profilo d'inizio, trattando più rigorosamente le equazioni, *e* la deformazione conseguente alla viscosità. Ma è chiaro che così il problema si complica molto.

Fin qui si poté dare solo una scelta limitata di questioni matematiche, che interessano il sismologo. La scelta fu determinata dalle vedute dell'Autore. Una serie di altri problemi fu citata da Richter.

Problemi del magnetismo terrestre. Dopo i lavori di Bartels e Chapman, si possono considerare risolti i problemi più essenziali, riguardanti variazioni e disturbi del campo magnetico terrestre. Ma nel frattempo il grande e vecchio problema circa la natura del magnetismo terrestre, e più generalmente del magnetismo stellare, è stato nuovamente portato alla ribalta. Blackett ha espresso il sospetto che il possesso di un momento magnetico possa appartenere alle proprietà generali di qualsiasi materia, non solo ai corpi celesti rotanti.

È chiaro che indagando lo stato di cose qui accennato, non si può trattare di un problema singolo, ma di un singolo aspetto di un problema molto più generale. È semplicemente il problema della materia, che qui si tocca, il problema delle particelle elementari e delle loro proprietà. Non occorre dire che si tratta qui essenzialmente di problemi anche matematici, forse persino prevalentemente matematici, dei quali si deve occupare il geofisico, se si vuol decidere a lasciare il suo ambito ristretto, per familiarizzarsi nei campi della fisica atomica con risultati da trasportare nel suo vero e proprio campo.

RIASSUNTO

Si cita una serie di problemi del campo della Geofisica, la cui soluzione è essenzialmente legata alla soluzione di un corrispondente problema matematico. Risulta che la soluzione di tutta una serie di problemi geofisici è collegata alla soluzione di un sistema di equazioni differenziali, non lineari, parziali, di secondo ordine. Ogni progresso in questo campo, significa un corrispondente progresso nel campo geofisico. Del resto, l'Autore si è lasciato guidare nella scelta dei problemi, dalle sue preferenze. In primo piano, stanno dunque problemi, alla cui soluzione egli stesso ha collaborato.