OSCILLAZIONI LIBERE DEL GOLFO DI NAPOLI

P. CALOI - L. MARCELLI

1. *Richiami teorici.* — Il problema della determinazione dei periodi relativi alle oscillazioni libere delle baie e dei golfi, fu affrontato, per la prima volta, dai giapponesi Honda, Terada, Yoshida e Isitani (¹).

a) *Baia rettangolare di profondità costante.* — L'oscillazione dell'acqua in una baia è uguale a quella dell'acqua di un lago di lunghezza doppia, tenuto conto della correzione di bocca. Perciò se l e h denotano rispettivamente la lunghezza e la profondità di una baia rettangolare di profondità costante, il periodo T dell'oscillazione libera nella baia, avente il nodo in corrispondenza della bocca e il ventre al suo estremo chiuso, sarà dato dalla formula

$$T = \frac{4l}{\sqrt{gh}}, \quad [1]$$

quando si trascuri la correzione dovuta all'estremo aperto verso il mare (correzione di bocca).

Questa correzione può essere determinata come segue.

Prendiamo l'origine delle coordinate nel punto di mezzo della bocca della baia, l'asse x nella direzione della lunghezza, positivamente verso l'interno, e l'asse y verso l'alto.

Supponiamo che lo spostamento verticale η nell'interno della baia sia dato da

$$\eta = a \sin \frac{\pi x}{2l} \cos \frac{2\pi}{T} t$$

Trascurando l'accelerazione verticale, si sa che

$$\eta = -h \cdot \frac{\partial^2 z}{\partial x^2},$$

dove z è lo spostamento orizzontale dell'acqua. Così sarà

cioè

$$\xi = \frac{2l}{\pi} \frac{a}{h} \cos \frac{\pi x}{2l} \cos \frac{2\pi}{T} t ;$$

è quindi (derivando rispetto al tempo)

$$\dot{\xi} = -a \frac{4l}{Th} \cos \frac{\pi x}{2l} \sin \frac{2\pi}{T} t .$$

Se b è la larghezza della baia, ϱ la densità dell'acqua, l'energia cinetica e potenziale nell'interno della baia sono date rispettivamente da

$$\frac{1}{2} \varrho h b \int_0^l \dot{\xi}^2 dx = \frac{4a^2 l^3 b \varrho}{T^2 h} \sin^2 \frac{2\pi}{T} t$$

e

$$\frac{1}{2} g b \varrho \int_0^l \eta^2 dx = \frac{a^2 l b g \varrho}{4} \cos^2 \frac{2\pi}{T} t .$$

Se l'energia cinetica fuori della baia assume la forma

$$P h b^2 \varrho \dot{\xi}_0^2 = \frac{16 P a^2 b^2 l^2 \varrho}{T^2 h} \sin^2 \frac{2\pi}{T} t ,$$

dove $\dot{\xi}_0$ è il valore di $\dot{\xi}$ per $x=0$, e P ha le dimensioni di un numero, trascurando l'energia potenziale fuori della baia, che è piccolissima, abbiamo

$$\frac{4a^2 l^3 b \varrho}{T^2 h} \sin^2 \frac{2\pi}{T} t + \frac{a^2 l b g \varrho}{4} \cos^2 \frac{2\pi}{T} t + \frac{16 P a^2 l^2 b^2 \varrho}{T^2 h} \sin^2 \frac{2\pi}{T} t = \text{cost.}$$

La relazione deve valere per qualsiasi valore di t : per $t=0$ e $t=T/4$, avremo pertanto

$$\frac{a^2 b l g \varrho}{4} = \text{cost} ,$$

$$\frac{4a^2 l^3 b \varrho}{T^2 h} + \frac{16 P a^2 b^2 l^2 \varrho}{T^2 h} = \text{cost} = \frac{a^2 b l g \varrho}{4} .$$

Perciò

$$T = \frac{4l}{\sqrt{gh}} \left(1 + 4P \frac{b}{l} \right)^{1/2} . \quad [2]$$

Lord Rayleigh trovò che la reazione dell'aria sopra un pistone rettangolare vibrante, la cui lunghezza y è molto grande rispetto alla larghezza b , equivale all'aggiunta di una massa

$$y \frac{b^2}{\pi} \left(\frac{3}{2} - \gamma - \log \chi \frac{b}{2} \right),$$

dove γ è la costante di Mascheroni ($\gamma=0,5772$) e $\chi = \frac{2\pi}{\lambda}$, λ essendo la lunghezza d'onda. Se la reazione sul pistone è uniforme, abbiamo per $y=h$,

$$\frac{h b^2}{\pi} \left(\frac{3}{2} - \gamma - \log \frac{\chi b}{2} \right).$$

Nei problemi implicanti moti di grande lunghezza d'onda, abitualmente si trascura l'accelerazione verticale e si ritiene pressoché co-

Fig. 2

stante l'accelerazione orizzontale per profondità diverse. Si può paragonare il moto dell'aria nei tubi vibranti a quello dell'acqua, quando si noti che i nodi delle onde d'aria stazionarie corrispondono ai ventri delle onde d'acqua e viceversa. Se poi spingiamo l'analogia anche all'espressione dell'energia cinetica, abbiamo

$$P = \frac{1}{2\pi} \left(\frac{3}{2} - \gamma - \log \frac{\pi b}{4l} \right).$$

La relazione si mostra sufficiente per la stima dell'ordine di grandezza della correzione di bocca. Se si assume

$$\eta = \sum a_k \sin \frac{k\pi x}{2l} \cos \frac{2\pi k}{T} t,$$

il risultato non muta.

Va ancora notato che l'approssimazione consentita dalla [2] diminuisce quando il rapporto della larghezza alla lunghezza della baia diventa maggiore dell'unità, perché in una baia siffatta la non uniformità dello spostamento orizzontale per ogni sezione trasversale diventa troppo grande.

b) *Baia di forma irregolare.* — Il problema di cercare il periodo d'oscillazione in baie di forma irregolare è riducibile a quello delle sesse in un lago di forma irregolare. Se la forma del lago non differisce molto da quella di un bacino rettangolare, può valere il metodo seguente. In accordo con questa ipotesi, possiamo supporre che la velocità normale di una sezione qualunque sia costante e che l'innalzamento sulla superficie in quiete sia lo stesso lungo l'intera larghezza corrispondente a detta sezione S . L'accelerazione verticale sia trascurabile nei confronti di quella orizzontale.

Si prenda l'origine delle coordinate rettangolari ad un estremo del lago, l'asse x essendo nella direzione della lunghezza. Valendo per ξ , η , b e l lo stesso significato che in a), avremo per l'energia cinetica e potenziale

$$E.C. = \frac{1}{2} \int_0^l \varrho S \dot{\xi}^2 dx, \quad E.P. = \frac{1}{2} \int_0^l \varrho g b \eta^2 dx,$$

essendo S l'area della sezione.

Dall'equazione di continuità, posto $S\dot{\xi} = \dot{X}$, abbiamo

$$b\eta = -\frac{\partial X}{\partial x} ;$$

perciò

$$E.C. = \frac{1}{2} \varrho \int_0^l \frac{\dot{X}^2}{S} dx, \quad E.P. = \frac{1}{2} g \varrho \int_0^l \frac{1}{b} \left(\frac{\partial X}{\partial x} \right)^2 dx.$$

Se facciamo assumere ad X un'espressione analoga a quella che le competerebbe se S fosse costante, la linea di valle essendo retta o curva, talché

$$\begin{aligned} X &= \sum a_k \sin \frac{k\pi x}{l} \cos p_k t, \\ &= \sum \Phi_k \sin \frac{k\pi x}{l}, \quad \Phi_k = a_k \cos p_k t, \end{aligned}$$

allora

$$\dot{X} = \sum \sin \frac{k\pi x}{l} \dot{\Phi}_k$$

e

$$\frac{\partial X}{\partial x} = \sum \phi_k \frac{h \pi}{l} \cos \frac{k \pi x}{l}$$

Perciò

$$E.C. = \sum \left\{ \frac{1}{2} \varrho \int \frac{1}{S} \sin^2 \frac{k \pi x}{l} dx \right\} \phi_k^2 + \\ + \sum_k \sum_m \left\{ \frac{1}{2} \varrho \int \frac{1}{S} \sin \frac{k \pi x}{l} \sin \frac{m \pi x}{l} dx \right\} \phi_k \phi_m ;$$

e, analogamente,

$$E.P. = \sum \left\{ \frac{1}{2} \frac{h^2 \pi^2}{l^2} g \varrho \int \frac{1}{b} \cos^2 \frac{k \pi x}{l} dx \right\} \phi_k^2 + \\ + \sum_k \sum_m \left\{ \frac{1}{2} \frac{km \pi^2}{l} g \varrho \int \frac{1}{b} \cos \frac{k \pi x}{l} \cos \frac{m \pi x}{l} dx \right\} \phi_k \phi_m ,$$

dove nelle doppie sommatorie dev'essere $k \neq m$.

Poiché le ϕ sono funzioni pressoché ortogonali e normali, le quantità sotto i segni di doppia sommatoria sono piccole, così che, per semplicità possiamo scrivere

$$E.C. = \sum (A_k + \delta A_k) \phi_k^2 + \sum \sum \delta A_{km} \phi_k \phi_m , \\ E.P. = \sum (C_k + \delta C_k) \phi_k^2 + \sum \sum \delta C_{km} \phi_k \phi_m ,$$

dove

$$A_k + \delta A_k = \frac{1}{2} \varrho \int \frac{1}{S} \sin^2 \frac{k \pi x}{l} dx , \\ C_k + \delta C_k = \frac{1}{2} \frac{k^2 \pi^2 \varrho}{l^2} g \int \frac{1}{b} \cos^2 \frac{k \pi x}{l} dx .$$

Perciò, si ottiene

$$p_k^2 = \frac{C_k + \delta C_k}{A_k + \delta A_k} = \sum \frac{(\delta C_{km} - p_k^2 \delta A_{km})^2}{A_k A_m (p_m^2 - p_k^2)} \simeq \frac{C_k + \delta C_k}{A_k + \delta A_k} ,$$

oppure, indicando con T_k il periodo del k -mo armonico,

$$(T_k)^2 = \left(\frac{2 \pi}{p_k} \right)^2 = \frac{4 l^2}{k^2 g} \frac{\int \frac{1}{S} \sin^2 \frac{k \pi x}{l} dx}{\int \frac{1}{b} \cos^2 \frac{k \pi x}{l} dx} .$$

Fatto $S = S_0 + \Delta S$ e $b = b_0 + \Delta b$, e trascurando i quadrati e i prodotti di ΔS e Δb , otteniamo

$$T_k^2 = \frac{4l^2}{k^2 gh_0} \frac{\int_0^l \sin^2 \frac{k\pi x}{l} dx}{\int_0^l \cos^2 \frac{k\pi x}{l} dx} \left(1 - \frac{\int_0^l \frac{\Delta S}{S_0} \sin^2 \frac{k\pi x}{l} dx}{\int_0^l \sin^2 \frac{k\pi x}{l} dx} + \frac{\int_0^l \frac{\Delta b}{b_0} \cos^2 \frac{k\pi x}{l} dx}{\int_0^l \cos^2 \frac{k\pi x}{l} dx} \right),$$

dove $h_0 = \frac{S_0}{b_0}$. Fatte le posizioni

$$A_0 = l b_0, \quad v_0 = l S_0, \quad \Delta A = \int \Delta b dx, \quad \Delta v = \int \Delta S dx,$$

avremo finalmente

$$T_k = \frac{2l}{k \sqrt{gh_0}} \left\{ 1 + \frac{1}{2} \frac{\Delta A}{A_0} - \frac{1}{2} \frac{\Delta v}{v_0} + \frac{1}{2} \int_0^l \left(\frac{\Delta S}{v_0} + \frac{\Delta b}{A_0} \right) \cos \frac{2k\pi x}{l} dx \right\} \quad [3]$$

Scegliendo v_0 , A_0 in modo che Δv , ΔA si annullino, e posto

$$(T_k)_0 = \frac{2l}{k \sqrt{gh_0}}$$

la [3] può semplificarsi come segue

$$T_k = (T_k)_0 \left\{ 1 + \frac{1}{2} \int_0^l \left(\frac{\Delta S}{v_0} + \frac{\Delta b}{A_0} \right) \cos \frac{2k\pi x}{l} dx \right\}. \quad [4]$$

La [4] dà il periodo in funzione di lievi variazioni nell'area e nel volume dell'acqua oscillante. L'espressione mostra che una contrazione o un'espansione nella parte mediana del lago prolunga o accorcia il suo naturale periodo, e che una contrazione o un'espansione ad una porzione estrema lo accorcia o lo allunga, rispettivamente. Applicando la [4] al caso di una baia, basta considerare un lago la cui forma sia simmetrica rispetto al piano verticale passante per la linea di bocca, e cercare il periodo delle sasse in tale lago. Questo periodo, corretto dall'azione di bocca, è il cercato periodo d'oscillazione della baia.

Questo metodo fu applicato da uno di noi ai golfi del lago di Garda (2). Esso, in genere, conduce solo a valori approssimativi; inol-

Fig. 3

tre, si limita alla determinazione del periodo lasciando indeterminati i nodi e l'andamento delle ampiezze.

c) *Metodo di Goldberg.* — Per la determinazione degli elementi caratteristici delle sesse di una baia può servire anche il noto metodo di Defant. Qui noi preferiamo ricorrere ad un metodo che ha analogie con quello e che è stato ideato da J. Goldberg (²⁰).

Come nel metodo Defant, lo spostamento orizzontale ξ e il dislivello η , per un determinato periodo T , abbiamo l'espressione

$$\xi = \xi_v \cos \frac{2\pi}{T} x, \quad \eta = \eta_v \cos \frac{2\pi}{T} x,$$

dove ξ_v , η_v rappresentano i massimi valori di queste grandezze, indipendenti dal tempo, nel punto $x=x_v$.

Il bacino si suppone diviso in n parti, mediante n sezioni trasversali S_v , praticate nei punti $x=x_v$, $v=1, 2, \dots, n$: Δx_v , Δv_v siano le parti dell'asse x e le porzioni di superficie libera comprese fra due sezioni S_v, S_{v-1} , rispettivamente; m sia il volume d'acqua che nel tempo $T/4$, fra la quiete e l'estremo spostamento di una particella, passa attraverso la sezione S_v .

Il metodo di Goldberg prende le mosse dalla bocca del golfo

$(\eta_0=0)$, supponendo arbitraria la massa d'acqua m_0 che attraversa la sezione di Bocca S_0 nel tempo $T/4$. La massa d'acqua m_0 determina i massimi spostamenti orizzontali ξ_v e dislivelli η_v nell'interno del golfo. Dall'equazione del moto, con le consuete ipotesi valevoli per i bacini naturali, si deduce, tenendo conto dell'espressione di ξ e di η ,

$$\frac{d\eta_v}{dx} = \frac{4\pi^2}{gT^2} \xi_v,$$

che dà l'inclinazione della tangente al profilo longitudinale della superficie oscillante del golfo. Poiché questa inclinazione viene supposta costante per ogni suddivisione, ciò che equivale a ritenere trascurabile il piccolissimo ammontare di

$\frac{d^2\eta}{dx^2}$ in tutti i casi di bacini naturali, il profilo longitudinale del golfo in oscillazione viene approssimato in una linea spezzata, i cui tratti corrono parallelamente alla tangente di profilo.

Ora è

$$\Delta \eta_{v+1} = \frac{d\eta_v}{dx} \Delta x_{v+1},$$

e lo schema di calcolo per l'integrazione numerica diviene:

$$\left\{ \begin{array}{l} \xi_v = \frac{m_v}{s_v} \quad ; \quad \frac{d\eta_v}{dx} = \frac{4\pi^2}{gT^2} \xi_v \\ \eta_{v+1} = \eta_v + \frac{d\eta_v}{dx} \Delta x_{v+1} \quad , \quad m_{v+1} = m_v - \frac{\eta_v + \eta_{v+1}}{2} \Delta v_{v+1} \end{array} \right. \quad [5]$$

L'ultima delle [5] esprime che l'eccedenza dell'acqua entrante da S su quella uscente da S_{v+1} , determina il dislivello sulla superficie Δv_{v+1} , che intercede fra queste sezioni.

Fig. 4

La relazione sul contorno per l'estremo chiuso del golfo dà naturalmente

$$m_n = m_n - \sum_{v=1}^{n-1} \frac{\eta_v + \eta_{v+1}}{2} \Delta v_{v+1} = 0 \quad . \quad [6]$$

2. — Nel presente lavoro abbiamo studiato le oscillazioni libere del golfo di Napoli, dapprima con il metodo esposto in *b)* che però non dà risultati soddisfacenti, indi con il metodo di Goldberg mediante

il quale si giunge a risultati ottimi, che trovano la loro conferma sperimentale in una serie di registrazioni mareografiche, gentilmente messi a disposizione dal prof. L. Greco del Consiglio Superiore dei Lavori Pubblici e delle quali riproduciamo gli esemplari più significativi.

La fig. 1 mostra quella parte del golfo da noi studiata, divisa in 17 sezioni condotte normalmente alla linea di valle. La bocca del golfo è stata considerata all'altezza della 17ª sezione la cui traccia, in figura, congiunge la punta S. Pan-

Fig. 5

crazio d'Ischia, con la punta di Vitareta dell'Isola di Capri.

La linea di valle, lungo la quale vanno computate le ascisse, taglia il golfo da un punto un poco a Sud di Portici fino a circa la metà della bocca.

Sono state misurate, con un planimetro, le aree delle sezioni orizzontali $r(x)$ e quelle delle sezioni verticali $S(x)$. La superficie totale del golfo risulta così essere di m² 846.873.500.

Chiamata poi $b(x)$ la larghezza di ogni sezione, e calcolatone il valore medio b_n , risulta

$$b_n = 27271 \text{ m.}$$

mentre la media S_0 delle aree delle sezioni verticali è

$$S_0 = 5.009.208 \text{ m}^2.$$

Sicché il valore medio della profondità risulta

$$h_0 = \text{m. } 183,68$$

ed il volume dell'acqua contenuta nel golfo è di circa

$$155,6 \cdot 10^9 \text{ m}^3.$$

Per applicare il metodo esposto nel paragrafo *b)*, basta rifarsi alla formula [4], ponendo $k=1$ ed integrando tra i limiti 0 ed $L/2$, se con L si rappresenta il doppio della lunghezza del golfo contata sulla linea di valle.

La tabella I mostra il procedimento necessario per il calcolo.

La numerazione delle sezioni vien fatta a partire dalla base.

Risultano così, per i due integrali che compaiono nella [4] i valori numerici

$$\int_0^{L/2} \Delta b(x) \cos \frac{2\pi x}{L} dx = -70.844.523$$

$$\int_0^{L/2} \Delta S(x) \cos \frac{2\pi x}{L} dx = -58.451.916.983.$$

La [4] per $k=1$, è

$$T_1 = (T_1)_0 \left\{ 1 + \frac{1}{L S_0} \int_0^{L/2} \Delta S(x) \cos \frac{2\pi x}{L} dx + \frac{1}{L b_0} \int_0^{L/2} \Delta b(x) \cos \frac{2\pi x}{L} dx \right\}.$$

Sostituendo i valori trovati e tenendo presente che

$$(T_1)_0 = \frac{2L}{\sqrt{gh_0}}$$

si ottiene, per il periodo, il valore

$$T_1 = 36^m,8 \quad [7]$$

Per quanto si è detto nel paragrafo *a)* occorre ora apportare al valore del periodo così trovato, la correzione di bocca data dalla [2]. Poiché è $l=L/2$, avremo, con i dati a disposizione,

$$P = 0,21054,$$

TABELLA I

Numero sezioni	Distanza tra sez. consec. m	Larghezza di ogni sezione $b(x)$ m	Area di ogni sezione verticale $S(x)$ m^2	$\Delta b(x) =$ $b(x) - b_0$	$\Delta S(x) =$ $S(x) - S_0$	Distanza di ogni sez. dalla base x_i m	$\frac{x_i}{L}$	$\frac{2\pi x_i}{L}$	$\cos \frac{2\pi x_i}{L} dx$	$\frac{2\pi x_i}{L} dx$	$\Delta b(x) \cos \frac{2\pi x_i}{L} dx$ m^2	$\Delta S(x) \cos \frac{2\pi x_i}{L} dx$ m^3
0	885	0	0	-27,271	-5,009,208	0	0	0	885,00	-21,134,835,00	-4,133,149,080,00	
1	1770	24,900	1,260,420	-2,371	-3,748,783	1,770	0,05793	$10^{\circ}26'$	1740,74	-4,127,294,54	-6,520,665,223,12	
2	1800	23,760	2,006,100	-3,511	-3,093,168	3,570	0,11685	21°02'	1680,07	-5,898,725,77	-5,015,431,657,56	
3	1800	25,320	2,751,300	-1,951	-2,257,908	5,370	0,17576	31°38'	1532,55	-2,990,024,56	-3,460,379,481,43	
4	1860	25,800	3,003,600	-1,471	-2,005,608	7,230	0,23664	42°36'	1369,15	-2,011,019,65	-2,745,978,193,20	
5	1800	24,600	3,096,000	-2,671	-1,913,208	9,030	0,29556	53°12'	1078,24	-2,879,979,04	-2,062,897,393,92	
6	1770	23,640	3,152,400	-3,631	-1,856,306	10,800	0,35349	63°38'	786,07	-2,851,220,17	-1,459,579,492,42	
7	1800	26,400	3,681,600	-871	-1,327,608	12,600	0,41241	74°14'	499,10	-426,002,62	-649,327,162,37	
8	1800	30,600	4,306,500	+3,329	-702,768	14,400	0,47133	84°50'	162,09	+539,597,61	-113,901,939,72	
9	1860	33,420	4,512,180	+6,149	-497,028	16,260	0,53221	95°48'	187,97	+1,155,839,83	+93,427,341,22	
10	1800	33,900	4,777,200	+6,629	-232,008	18,060	0,59112	106°21'	508,21	-3,368,937,35	+117,909,249,70	
11	1800	28,620	5,221,560	+1,349	+215,352	19,860	0,65001	117°00'	817,18	-1,102,378,52	-175,981,778,06	
12	1860	29,400	5,710,680	+2,129	+731,472	21,720	0,71092	127°58'	1141,27	-2,436,150,83	-837,001,465,41	
13	1860	30,210	7,240,200	+2,969	+2,230,992	23,580	0,77180	138°55'	1401,97	-4,162,448,93	-3,127,763,851,21	
14	1860	30,510	7,911,000	+3,269	+2,901,792	25,410	0,83268	149°53'	1608,92	-5,259,559,48	-1,673,577,941,64	
15	2112	31,500	9,851,400	+4,229	+4,842,192	27,552	0,90181	162°19'	2012,21	-8,509,636,09	-9,473,507,161,32	
16	1500	28,560	9,381,600	+1,289	+4,372,392	29,052	0,95090	171°10'	1482,21	-1,910,568,69	-6,480,893,146,32	
17	1500	26,040	9,761,400	-1,231	+4,752,192	30,552	1	180°00'	1500,00	+1,316,500,00	-7,126,268,000,00	
										$\int_0^L \Delta b(x) \cos \frac{2\pi x}{L} dx =$	$\int_0^L \Delta S(x) \cos \frac{2\pi x}{L} dx =$	
										$= -58,451,916,983$	$= -70,844,523,45$	

e il periodo corretto diviene

$$T = 43^m.2.$$

Applicazione del metodo di Goldberg. — Il metodo di Goldberg, applicato in un secondo tempo, ha dato dei risultati diversi dal precedente, ma più attendibili, giacché ci sono, come s'è detto, delle conferme sperimentali. Questo metodo, ad una maggiore precisione nei risultati, accoppia, rispetto al precedente, il vantaggio di consentire la determinazione, oltre che del periodo, anche dell'andamento delle ampiezze e della posizione dei nodi delle sesse.

Questa volta le sezioni v_j si contano a partire dalla bocca: si suppone arbitraria la massa d'acqua m_0 che attraversa la sezione di bocca S_0 nel tempo $T/4$ (per noi $m_0 = 1 \cdot 10^8 \text{ m}^3$) e seguendo lo schema di calcolo indicato dalle [5], si deve trovare verificata, per l'estremo chiuso del golfo, la condizione al contorno

$$m_n = m_{n+1} = 0$$

Se questo avviene, vuol dire che il valore del periodo adoperato nei calcoli

e che compare nell'espressione di $\frac{d\eta_V}{dx}$

è quello giusto (naturalmente, corretto poi per l'azione di bocca). Se invece risulta $m > 0$ o $m < 0$, il periodo va allora opportunamente corretto diminuendolo o aumentandolo rispettivamente.

La tabella II riporta tutti i calcoli necessari per la determinazione del periodo relativo alla sessa uninodale

Grafico n. 1

TABELLA II
Sessa uninodale del golfo completo

Numero delle sezioni v	Δx_v m	$[S(x)]_v$ 10^5 m^2	$[M(x)]_v$ 10^5 m^2	$T=45^m \ 30^s = 2730^s$		
				η_v	m_v	ξ_v
				m	10^8 m^3	m
0	0	97,611	0	0	1,000	10,20
1	1500	93,816	399,381	0,008	0,998	10,61
2	1500	98,511	111,741	0,017	0,993	10,10
3	2112	79,110	601,367	0,028	0,979	12,10
4	1860	72,102	171,888	0,011	0,963	13,30
5	1860	57,107	459,612	0,051	0,911	16,10
6	1860	52,216	136,140	0,071	0,911	17,50
7	1800	17,772	518,118	0,088	0,873	18,30
8	1800	45,122	623,772	0,105	0,813	18,00
9	1860	43,065	523,116	0,123	0,753	17,50
10	1800	36,816	167,160	0,140	0,691	18,80
11	1800	31,524	529,740	0,159	0,612	19,10
12	1770	30,960	455,580	0,177	0,535	17,30
13	1800	30,036	544,392	0,191	0,131	11,46
14	1860	27,513	557,352	0,209	0,322	11,70
15	1800	20,061	189,381	0,220	0,217	10,80
16	1800	12,604	118,521	0,230	0,116	9,20
17	1770	0	498,132	0,239	— 0,0007	

TABELLA III
Sessa binodale del golfo completo

v	Δx_v m	$[S(x)]_v$ 10^5 m^2	$[M(x)]_v$ 10^5 m^2	$T=17^m 5^s = 1025^s$			$T=17^m 8^s = 1028^s$		
				η_v	m_v	ξ_v	η_v	m_v	ξ_v
				m	10^8 m^3	m	m	10^8 m^3	m
0	0	97,611	0	0	1,000	10,2	0	1,000	10,2
1	1500	93,816	399,381	0,059	0,988	10,5	0,058	0,988	10,5
2	1500	98,511	111,741	0,119	0,949	09,6	0,118	0,949	09,6
3	2112	79,110	601,367	0,197	0,851	10,8	0,195	0,855	10,8
4	1860	72,102	171,888	0,274	0,743	10,3	0,272	0,745	10,3
5	1860	57,107	459,612	0,317	0,600	10,5	0,315	0,603	10,5
6	1860	52,216	136,140	0,422	0,433	08,3	0,419	0,436	08,3
7	1800	17,772	518,118	0,179	0,199	01,2	0,176	0,201	01,3
8	1800	45,122	623,772	— 0,108	— 0,108	— 02,4	0,506	— 0,102	— 02,3
9	1860	43,065	523,116	0,491	— 0,370	— 08,6	0,489	— 0,362	— 08,1
10	1800	36,816	167,160	0,432	— 0,585	— 15,9	0,432	— 0,578	— 15,7
11	1800	31,524	529,740	0,322	— 0,785	— 21,9	0,321	— 0,778	— 21,7
12	1770	30,960	455,580	0,153	— 0,893	— 28,8	0,158	— 0,882	— 28,7
13	1800	30,036	544,392	— 0,015	— 0,922	— 30,7	— 0,039	— 0,920	— 30,6
14	1860	27,513	557,352	— 0,261	— 0,836	— 30,1	— 0,256	— 0,838	— 30,1
15	1800	20,061	189,381	— 0,171	— 0,655	— 32,7	— 0,161	— 0,662	— 33,0
16	1800	12,604	118,521	— 0,699	— 0,392	— 31,1	— 0,690	— 0,103	— 31,9
17	1770	0	498,132	— 0,910	— 0,009		— 0,906	— 0,005	

INIZIO ORE 10.15 DEL 13 GIUGNO 1942 (STANTE MAREOGRAFICA I.M.) SESSA BINODALI DEL GOLFO COMPLETO

Grafico n. 3

Grafico 3 a

Grafico n. 4

Grafico 4a

del golfo di Napoli. Ci limitiamo a riportare quelli che hanno dato per m_{17} all'estremità chiusa un valore molto prossimo allo zero ($m_{17} = -0,0007 \cdot 10^8 \text{ m}^3$). E questo avviene per un periodo.

$$T = 45^{\text{m}} 30^{\text{s}} .$$

Apportando a questo valore la correzione di bocca, si ottiene, per la sessa uninodale il valore

$$T_1 = 59^{\text{m}} 6 .$$

La fig. 2 mostra l'andamento delle ampiezze η di questa sessa.

Grafico n. 8

Dalle registrazioni risulta evidente il buon accordo tra la teoria e la pratica. Il periodo della sessa uninodale oscilla in media intorno ai 58^{m} (v. grafici 1 e 4).

Nella Tabella III sono riportati i calcoli relativi alla sessa binodale. Il periodo (compreso tra $17^{\text{m}} 5^{\text{s}}$ e $17^{\text{m}} 8^{\text{s}}$) risulta

$$T = 17^{\text{m}} 7^{\text{s}} .$$

La correzione di bocca per la binodale, si fa tenendo presente la seguente proporzione: il rapporto tra i valori non corretti della uninodale e binodale deve eguagliare il rapporto tra i valori osservati (o quelli corretti) delle stesse sesse: cioè

$$\frac{T_1 \text{ non corretto}}{T_2 \text{ non corretto}} = \frac{T_1 \text{ osservato}}{T_2 \text{ corretto}} \quad [8]$$

$$T_2 \text{ corretto} = \frac{17^{\text{m}} 1}{45^{\text{m}} 5} \cdot 58^{\text{m}} ,$$

sicché il periodo corretto per la binodale è

$$T_2 = 21.8 \text{ m.}$$

SESSE BINODALI DEL GOLFO COMPLETO - $T = 22^m$

Grafico n. 2

SESSE UNINODALI DEL GOLFO RIDOTTO - $T = 46^m$

Ottobre 1942

Grafico n. 5

SESSE UNINODALI DEL GOLFO RIDOTTO - $T = 46^m$

Giugno 1942

COSTANTE MAREOGRAFICA

Grafico n. 6

Grafico n. 7

TABELLA IV
Sessa uninodale del golfo ridotto

v	Δx_V	$[S(x)]_V$	$[\Delta F(x)]_V$	$T = 35^m = 2100^s$			$T = 37^m = 2220^s$		
				η_V	m_V	ξ_V	η_V	m_V	ξ_V
	m	10^5 m^2	10^5 m^2	m	10^8 m^3	m	m	10^8 m^3	m
0	0	52,246	0	0	1,000	19,1	0	1,000	19,1
1	1800	47,772	518,148	0,031	0,992	20,8	0,028	0,993	20,8
2	1800	45,122	623,772	0,065	0,962	21,3	0,059	0,966	21,1
3	1860	43,065	523,116	0,101	0,919	21,3	0,092	0,927	21,5
4	1800	36,816	467,160	0,136	0,861	23,5	0,121	0,877	23,8
5	1800	31,524	529,740	0,175	0,782	24,8	0,159	0,802	25,4
6	1770	30,960	455,580	0,215	0,693	22,1	0,196	0,721	23,3
7	1800	30,036	544,392	0,252	0,566	18,8	0,230	0,605	20,1
8	1860	27,513	557,352	0,281	0,417	15,2	0,261	0,468	17,0
9	1800	20,061	489,381	0,309	0,272	13,6	0,286	0,331	16,6
10	1800	12,604	448,521	0,331	0,128	10,2	0,310	0,200	15,9
11	1770	0	498,132	0,347	-0,011		0,333	0,010	

TABELLA V
Sessa binodale del golfo ridotto

v	Δx_V	$[S(x)]_V$	$[\Delta F(x)]_V$	$T = 13^m = 780^s$		
				η_V	m_V	ξ_V
	m	10^5 m^2	10^5 m^2	m	10^8 m^3	m
0	0	52,246	0	0	1,000	19,1
1	1800	47,772	518,15	0,227	0,9411	19,7
2	1800	45,122	623,77	0,162	0,7261	16,1
3	1860	43,065	523,12	0,660	0,1326	10,0
4	1800	36,816	467,46	0,780	0,0961	02,6
5	1800	31,524	529,74	0,811	- 0,3251	- 10,3
6	1770	30,960	455,58	0,690	- 0,6670	- 21,5
7	1800	30,036	544,39	0,431	- 0,9728	- 32,4
8	1860	27,513	557,35	0,035	- 1,1031	- 40,1
9	1800	20,061	489,38	- 0,113	- 1,0036	- 50,0
10	1800	12,604	448,52	- 1,038	- 0,6717	- 53,3
11	1770	0	498,13	- 1,662	+ 0,0008	

Bellissimi esempi di sesse con questo periodo, sono riportati nei grafici.

Nella figura 3 è messo in evidenza l'andamento delle ampiezze e la posizione dei binodi, dei quali uno, naturalmente, si trova sulla bocca del golfo, e l'altro vicino alla 13^a sezione a partire dalla bocca.

Sesse di periodo minore. Golfo ridotto. — Esaminando le registrazioni (nn. 4-9) abbiamo notato la presenza di onde il cui periodo non corrisponde esattamente a quelli trovati per le sesse uninodali e binodali, ma si mantiene alquanto inferiore, e precisamente

$$T'_1 \sim 48 \text{ m} \quad T'_2 \sim 17,8 \text{ m.}$$

Ciò ci ha indotto a ritenere che una porzione del golfo oscillasse liberamente, per proprio conto: ridotto il numero delle sezioni, abbiamo trovato infatti che, se si limita il golfo all'altezza dell'undicesima sezione (capo Miseno), e si assume questa sezione come bocca del golfo, i periodi corrispondenti delle sesse uninodale e binodale, sono proprio quelli risultati dall'esame delle registrazioni. Le Tabelle IV e V riportano i calcoli relativi. Il periodo della uninodale, corretto per l'azione di bocca, diventa

$$T''_1 = 47^m,4$$

e il periodo della binodale, di 17^m, corretto con la [8], diventa

$$T''_2 = 17^m,3.$$

Le figure 4 e 5 mostrano l'andamento delle ampiezze. I due binodi cadono uno, ovviamente, all'altezza della bocca, l'altro all'altezza della 3^a sezione, a partire da Portici.

Grafico n. 9

Nel seguente specchietto mettiamo a confronto i periodi ottenuti con i calcoli, con quelli osservati.

Periodi osservati	Periodi calcolati
$T_1 = 58^m - 59^m$ uninodale dell'intero golfo.	$T_1 = 59^m,6$
$T_2 \sim 22^m$ binodale dell'intero golfo.	$T_2 = 21^m,8$
$T'_1 \sim 18^m$ uninodale del golfo ridotto	$T'_1 = 17^m,4$
$T'_2 \sim 17,8^m$ binodale del golfo ridotto	$T'_2 = 17^m,3$

Risulta di qui il buon accordo esistente tra le due serie di misure.

Roma — Istituto Nazionale di Geofisica — Settembre 1948.

RIASSUNTO

Si fanno alcuni richiami teorici sugli studi relativi alle oscillazioni libere nelle baie e nei golfi. Considerato dapprima il caso di una baia rettangolare di profondità costante, si perviene alla formula che si deve applicare per apportare al periodo della sessa la cosiddetta "correzione di bocca". Si estende poi il problema al caso di una baia di forma irregolare, richiamando la teoria di alcuni scienziati Giapponesi. Tale procedimento, applicato allo studio delle oscillazioni libere del golfo di Napoli, dà risultati piuttosto grossolani, mentre il metodo suggerito da Goldberg — ivi riassunto — conduce a valori molto soddisfacenti.

Una serie di registrazioni mareografiche sta a convalidare la bontà dei risultati conseguiti teoricamente.

Vengono messe in luce alcune sesse relative ad una porzione del golfo, sesse delle quali si era sospettata l'esistenza dall'esame dei mareogrammi.

BIBLIOGRAFIA

(¹) HONDA K., TERADA T., YOSHIDA Y. e ISITANI D.: *An Investigation on the secondary undulations of oceanic tides* - The Journal of the College of Science, XXIV, 1908.

(²) CALOI P.: *Le sesse del Lago di Garda*, Parte II - Annali di Geofisica, 1, 2, 1918.

(³) GOLDBERG J. UND KEMPNI K.: *Ueber di Schwingungen der Bucht von Bakar und das allgemeine Problem der Seiches von Buchten* - Académie Yougoslave des Sciences et des Beaux - Arts, Zagreb, 1937.