LE SESSE DEL LAGO DI ISEO

FRANCESCO PERONACI

PARTE PRIMA

SESSE CHE INTERESSANO L'INTERO LAGO

La presente ricerca va inquadrata nel complesso di lavori di natura sistematica che l'Istituto Nazionale di Geofisica sta compiendo allo scopo di portare un contributo alla conoscenza dei problemi relativi alla limnologia italiana. In essa non si è ritenuto necessario richiamare le teorie matematiche sulle sesse, in quanto esse sono state ampiamente sviluppate in precedenti lavori già pubblicati dall'Istituto.

Premettiamo anzitutto alcune notizie sui principali dati morfometrici relativi al lago di Iseo (Sebino): posto tra le provincie di Bergamo e Brescia si distingue per la sua forma sinuosa, infatti il suo asse, partendo dalla foce dell'Oglio si dirige per ca. 5 km da NNE a SSW, quindi per un tratto di circa 11 km si allinea da Nord a Sud e infine per altri 9 km piega bruscamente verso Ovest. Il lago ha tre isole sorgenti all'estremo meridionale della parte mediana: la maggiore di esse è Montisola con una superficie di km² 4.28, le altre due sono piccole e trascurabili nel calcolo delle aree. Queste isole e la riva sinistra, cui sono più vicine, determinano il canale di Sale largo in media km 0.84. I dati seguenti sono stati ricavati da una carta batimetrica al 50.000 pubblicata dall'Istituto Geografico De Agostini:

altezza sul livello del mare	m	185
superficie (escluse le isole)	km ²	60.62
profondità massima	m	250.75
lunghezza (sulla linea di valle)	km	23.95
larghezza massima	km	4.46

questi dati sono in ottimo accordo con quelli ottenuti dal Salmoiraghi nel 1897 in una serie di 268 scandagli.

Come è noto lo studio delle oscillazioni libere di un lago, assimilato ad un canale finito di sezione variabile in modo non brusco, può essere eseguito partendo dalla equazione di Chrystal

Fig. 1

$$\sigma(v) \frac{d^2 u}{dv^2} + \frac{4\pi^2}{g T^2} u = 0 \quad [1]$$

che deriva direttamente dall'equazione fondamentale dell'idrodinamica, qualora si facciano opportune ipotesi semplificatrici. Nella [1] soggetta alle condizioni ai limiti

$$u(0) = u(a) = 0$$

v esprime l'area superficiale del lago da una estremità ad una qualsiasi sezione trasversale (e varia quindi da 0 e l'area a totale del lago) $\sigma(v)$ rappresenta il prodotto dell'area $S(x)$ della sezione considerata, u il volume del liquido che attraversa la sezione per uno spostamento orizzontale ξ , T il periodo della sessa, g l'accelerazione di gravità.

La curva rappresentata dalla funzione $\sigma(v)$ è detta da Chrystal curva normale del bacino d'acqua; essa ha per ordinate i valori di

$S(x) b(x)$ e per ascisse i valori di $v(x) = \int_0^x b(x) dx$. La integrazione

Fig. 3

Fig. 2

della [1] viene eseguita da Chrystal supponendo che la $\sigma(v)$ sia esprimibile in una forma analitica piuttosto semplice e che u sia rappresentabile mediante una serie di funzioni sinusoidali

$$u = \sum_i u_i(v) \sin \frac{2\pi}{T_i} (t - t_i)$$

Nel nostro caso, usando la su citata carta batimetrica, furono tracciate, a partire dall'estremo nord del lago, 37 sezioni orizzontali

TABELLA I

Sez.	Distanze x 10 ³ m	S(x) 10 ⁴ m ²	b(x) 10 ² m	V(x) 10 ³ m ²	v(x) 10 ⁴ m ²	$\sigma(x) =$ S(x) · b(x) 10 ⁶ m ²
0	0	0	0	0	0	0
1	1,00	314.00	30.85	3587.5	3587.5	968.69
2	2,00	291.00	21.90	2567.5	6155.0	637.29
3	3,00	350.25	23.15	2182.5	8337.5	810.83
4	3,50	302.50	16.50	1182.5	9520.0	499.13
5	4,00	282.50	15.50	1037.5	10557.5	437.88
6	5,00	359.50	18.50	1737.5	12295.0	665.08
7	6,00	608.50	29.35	2750.0	15045.0	1773.78
8	7,00	651.25	29.20	3100.0	18145.0	1901.65
9	8,00	604.50	27.70	2725.0	20870.0	1644.24
10	9,00	663.00	30.85	3290.0	24160.0	2045.36
11	10,00	579.50	33.15	3025.0	27185.0	1921.04
12	10,25	609.00	36.00	937.5	28122.5	2192.40
13	10,50	682.50	42.45	962.5	29085.0	2897.21
14	10,75	616.25	44.75	1112.5	30197.5	2757.72
15	11,00	571.50	46.60	1037.5	31235.0	2663.19
16	11,25	517.50	34.80	1017.5	32252.5	1800.90
17	11,50	491.25	32.60	890.0	33112.5	1601.48
18	12,00	474.35	33.05	1825.0	34957.5	1567.73
19	12,50	415.75	29.30	1737.5	36705.0	1218.15
20	13,00	345.25	23.85	1487.5	38192.5	823.42
21	13,25	262.25	27.95	437.5	38630.0	732.99
22	13,50	332.50	37.60	1187.5	39817.5	1250.20
23	13,75	312.00	34.00	625.0	40442.5	1060.80
24	14,00	324.00	34.00	625.0	41067.5	1101.60
25	14,50	398.50	32.10	1062.5	42130.0	1279.19
26	14,75	367.50	29.95	892.5	43022.5	1100.66
27	15,00	275.75	29.20	737.5	43760.0	805.19
28	15,25	258.25	19.15	812.5	44572.5	494.55
29	15,50	201.25	20.95	475.0	45047.5	421.62
30	16,00	194.75	22.95	1225.0	46272.5	446.95
31	17,00	183.25	21.85	2325.0	48597.0	400.40
32	18,00	141.37	24.70	2600.0	51197.5	349.18
33	19,00	114.75	23.65	2625.0	53822.5	271.38
34	20,00	44.37	23.75	2812.5	56635.0	105.38
35	21,00	14.00	12.20	1700.0	58335.0	17.08
36	22,00	13.00	10.50	1125.0	59460.0	13.65
37	23,00	12.00	10.25	1157.5	60617.5	12.30
38	23.95	0		950.0		0

(come è indicato dalla fig. 1) con direzione normale alla linea che tocca i punti di massima profondità (linea di valle); costruite quindi le corrispondenti sezioni verticali furono calcolate con un planimetro le aree $V(x)$ ed $S(x)$ delle sezioni orizzontali e verticali (i risultati sono riportati nella tabella I) e, mediante essi, si è costruita per punti la curva normale (fig. 2). Detta curva non si presta ad essere ridotta in forma analitica e quindi si è ritenuto opportuno non applicare direttamente il metodo di Chrystal, e servirsi invece di due metodi dovuti ad Hidaka e a Defant che furono applicati contemporaneamente onde poter confrontare tra loro i dati ottenuti.

Metodo di Hidaka.

La [1] con l'introduzione della variabile ausiliaria $z = \frac{v}{a}$ assume la forma

$$\frac{d^2 u}{dz^2} + \frac{\lambda}{\sigma(z)} u = 0 \quad [2]$$

ove

$$\lambda = \frac{A \pi^2 \omega^2}{T^2 g} \quad [3]$$

è soggetta alle condizioni ai limiti

$$u(0) = u(1) = 0 \quad [4]$$

detta equazione è soddisfatta solo per opportuni valori di λ . Hidaka dimostra che la integrazione della [2] equivale alla ricerca del minimo valore dell'integrale

$$I(u) = \int_0^1 \left\{ \left(\frac{du}{dz} \right)^2 - \frac{\lambda}{\sigma(z)} u^2 \right\} dz \quad [5]$$

ove u può scriversi nella forma

$$u = \sum_{i=1}^m A_i z(1-z)^i \quad [6]$$

sostituendo le [6] nella [5] si ottengono $m+1$ equazioni

TABELLA II

Sez.	$Z = \frac{v}{a}$	$M = \frac{z^2(1-z^2)}{\sigma(z)} \Delta z$	Mz	Mz^2	Mz^3	Mz^4
0	0	0	0	0	0	0
1	0.05827	0.181062	0.010550	0.000616	0.000036	0.000002
2	0.09997	0.529748	0.052959	0.005292	0.000529	0.000053
3	0.13542	0.599366	0.081166	0.010992	0.001486	0.000201
4	0.15463	0.657665	0.101695	0.015725	0.002433	0.000376
5	0.17148	0.776775	0.133201	0.022845	0.003915	0.000671
6	0.19970	1.083815	0.216449	0.043223	0.008627	0.001723
7	0.24437	0.858682	0.209836	0.051280	0.012528	0.003061
8	0.29472	1.143966	0.337150	0.099365	0.029286	0.008631
9	0.33898	1.351537	0.458144	0.155305	0.052642	0.017845
10	0.39242	1.485318	0.582868	0.228724	0.089758	0.035223
11	0.44155	1.555069	0.686611	0.303192	0.133829	0.059092
12	0.45678	0.427703	0.195366	0.089240	0.040764	0.018620
13	0.47241	0.335139	0.158323	0.074793	0.035334	0.016692
14	0.49048	0.409257	0.200732	0.098455	0.048288	0.023684
15	0.50733	0.395279	0.200537	0.101721	0.051616	0.026186
16	0.52386	0.571065	0.299158	0.116717	0.082096	0.043007
17	0.53831	0.557336	0.300020	0.161505	0.086939	0.046300
18	0.56796	1.138789	0.646787	0.367351	0.208636	0.118497
19	0.59618	1.342039	0.800097	0.477001	0.284378	0.169540
20	0.62034	1.627636	1.009688	0.626347	0.388549	0.241032
21	0.62744	0.529330	0.332123	0.208387	0.130750	0.082038
22	0.64673	0.805344	0.520840	0.336813	0.217846	0.140888
23	0.65688	0.485105	0.319313	0.209749	0.137782	0.090506
24	0.66703	0.454511	0.303172	0.202226	0.134890	0.089976
25	0.68429	0.629795	0.430962	0.294902	0.201799	0.138089
26	0.69879	0.583670	0.407863	0.285012	0.199160	0.139171
27	0.71077	0.628839	0.446960	0.317683	0.225797	0.160490
28	0.72396	1.065041	0.771047	0.558209	0.401119	0.292566
29	0.73168	0.705680	0.516332	0.377793	0.276422	0.202252
30	0.75158	1.522285	1.166666	0.876843	0.659018	0.495305
31	0.78934	2.607741	2.058394	1.624779	1.282513	1.012339
32	0.83157	2.251791	1.872522	1.557136	1.294870	1.076775
33	0.87421	1.900872	1.661761	1.452722	1.269992	1.110240
34	0.91989	2.355090	2.166424	1.992877	1.833226	1.686366
35	0.94750	4.005710	3.795410	3.596166	3.407337	3.228452
36	0.96577	1.472308	1.421911	1.373236	1.326240	1.280813
37	0.98457	0.356130	0.350635	0.345225	0.339898	0.334653
		39.417498	25.223702	18.699477	14.903318	12.391885

$$\left\{ \begin{aligned} \left(\frac{1}{3} - I_0 \lambda \right) A_0 + \left(\frac{1}{6} - I_1 \lambda \right) A_1 + \left(\frac{1}{10} - I_2 \lambda \right) A_2 + \dots &= 0 \\ \left(\frac{1}{6} - I_1 \lambda \right) A_0 + \left(\frac{2}{16} - I_2 \lambda \right) A_1 + \left(\frac{1}{10} - I_3 \lambda \right) A_2 + \dots &= 0 \\ \left(\frac{1}{10} - I_2 \lambda \right) A_0 + \left(\frac{1}{10} - I_3 \lambda \right) A_1 + \left(\frac{3}{35} - I_4 \lambda \right) A_2 + \dots &= 0 \\ \dots &\dots \end{aligned} \right. \quad [7]$$

ove

$$I_n = \int_0^1 \frac{z^2 (1-z^2)^2 z^n}{\sigma(z)} dz \quad [8]$$

e che permettono l'eliminazione della $A_0, A_1, \dots, A_m$ e ci fanno giungere all'equazione dei periodi che, limitatamente al caso di $m=2$ è

$$\begin{vmatrix} \frac{1}{3} - I_0 \lambda & \frac{1}{6} - I_1 \lambda & \frac{1}{10} - I_2 \lambda \\ \frac{1}{6} - I_1 \lambda & \frac{2}{15} - I_2 \lambda & \frac{1}{10} - I_3 \lambda \\ \frac{1}{10} - I_2 \lambda & \frac{1}{10} - I_3 \lambda & \frac{3}{35} - I_4 \lambda \end{vmatrix} = 0 \quad [9]$$

I coefficienti I_n furono calcolati mediante una integrazione numerica (Tabella II) che diede luogo ai valori

$$\begin{aligned} I_0 &= 39.417498 & ; & & I_1 &= 25.223702 & ; & & I_2 &= 18.609477 \\ I_3 &= 14.903318 & ; & & I_4 &= 12.391885 \end{aligned}$$

e l'equazione [9] diviene

$$11.998195 \lambda^3 - 1.151593 \lambda^2 + 0.021801 \lambda - 0.00009524 = 0$$

che risolta fornisce le radici

$$\lambda_1 = 0.00628330 \quad ; \quad \lambda_2 = 0.02002001 \quad ; \quad \lambda_3 = 0.0504707$$

cui corrispondono i periodi

$$T_1 = 25^m.97 \quad T_2 = 14^m.55 \quad T_3 = 9^m.60$$

relativi alle sesse uninodale, binodale, trinodale.

TABELLA III

Sezioni	uni —	bi —	tri —
	— nodale		
	ζ_1	ζ_2	ζ_3
0	100.00	100.00	100.00
1	+ 69.8148	+ 110.3566	+ 50.0008
2	54.6732	100.4360	22.1380
3	45.1999	105.3213	3.2292
4	41.7588	101.2878	— 5.3411
5	39.1615	096.9296	11.8457
6	36.0216	88.1825	21.0942
7	33.7916	71.0586	31.2827
8	34.3451	48.1213	37.1445
9	36.6330	25.7863	38.0733
10	40.3862	— 02.3028	34.9407
11	43.6739	27.8311	28.8336
12	44.4691	35.5307	26.4704
13	45.2614	43.1774	23.8572
14	45.6304	51.7205	20.6224
15	45.7111	59.2013	17.5589
16	45.6410	66.3560	14.2881
17	45.2101	72.1590	11.3772
18	43.3419	82.8669	5.4046
19	40.1426	91.3272	+ 0.2302
20	36.1464	97.0102	4.8924
21	34.7340	98.4294	6.2206
22	30.2967	101.4753	9.6884
23	27.5870	102.6224	11.4110
24	24.6287	103.4675	13.0746
25	18.9392	104.1012	15.6869
26	13.5309	103.8758	17.6915
27	8.5721	103.0922	19.1598
28	2.6104	101.6198	20.6051
29	— 1.1349	100.4476	21.1775
30	11.7212	96.2953	22.8917
31	35.6069	83.8099	24.2465
32	68.7975	61.9940	22.8290
33	109.9514	30.7039	17.7001
34	163.3631	+ 13.5959	7.1552
35	200.6907	47.3024	— 1.1204
36	227.6343	71.9847	8.5314
37	257.2296	99.6476	16.8719

La determinazione della posizione delle linee nodali si esegue partendo la condizione $\frac{du}{dz} = 0$ corrispondente all'annullarsi nel nodo della componente verticale dello spostamento. Applicando detta condizione alla [6] si ottiene.

$$4 \frac{A_2}{A_0} z^3 + 3 \left(\frac{A_1}{A_0} - \frac{A_2}{A_0} \right) z^2 + 2 \left(1 - \frac{A_1}{A_0} \right) z - 1 = 0$$

e determinando i valori dei coefficienti in base alle [7] si può scrivere l'equazione delle linee nodali che per l'uninodo è

$$15,6788 z^3 - 18,0274 z^2 + 6,1788 z - 1 = 0$$

la cui sola radice minore dell'unità è

$$z = 0,72937$$

L'uninodo viene quindi a cadere a km 15,425 dall'estremo Nord del lago. Per la binodale l'equazione è

$$18,9286 z^4 - 21,6676 z^3 + 9,9807 z^2 + 1 = 0$$

che conduce alle radici minori dell'unità

$$z_1 = 0,388048 \quad z_2 = 0,906791$$

cui corrispondono rispettivamente le distanze dall'estremo Nord

$$\text{km } 8,918 \quad \text{km } 19,713$$

Per la trinodale infine si è trovato

$$12,5136 z^5 - 21,0332 z^4 + 9,7653 z^3 - 1 = 0$$

le cui radici sono

$$z_1 = 0,142373 \quad ; \quad z_2 = 0,595011 \quad ; \quad z_3 = 0,94344$$

e di conseguenza le distanze dei trinodi dall'estremo Nord sono rispettivamente km 3,181; km 12,479; km 20,853.

L'andamento delle ampiezze per le tre sesse considerate si ottiene dalla relazione

$$\eta = - \frac{du}{dz} a$$

che nel caso di $m=2$, sostituendo a $\frac{du}{dz}$ la sua espressione, e tenendo conto dei calcoli precedenti, ci fornisce le seguenti relazioni relative alle tre sesse studiate:

TABELLA IV
Uninodale $T=25,70$; $\alpha = \frac{4\pi^2}{g T^2}$

Sezioni	$\alpha \Delta x$ 10^{-6}	$q=2\eta_0 V(x)$ 10^{10} cm^3	$2 \frac{\gamma_0}{\gamma}$ 10^3 cm	$2 \Delta \eta_0$ cm	$2 \eta_{ei}$ cm
0					100,00
1	1692,48	358,75	— 1,1425	— 1,93	+ 98,07
2	1692,48	610,54	2,0981	3,55	94,52
3	1692,48	816,83	2,3321	3,95	90,57
4	846,24	923,93	3,0513	2,58	87,99
5	846,24	1015,22	3,5937	3,04	84,95
6	1692,48	1162,82	3,2345	5,47	79,48
7	1692,48	1381,39	2,2702	3,84	75,64
8	1692,48	1615,87	2,4812	4,20	71,44
9	1692,48	1810,54	2,9951	5,07	66,37
10	1692,48	2028,90	3,0602	5,18	61,19
11	1692,48	2214,00	3,8205	6,17	51,72
12	423,12	2265,30	3,7197	1,57	53,15
13	423,12	2316,46	3,3941	1,44	51,71
14	423,12	2373,99	3,8523	1,63	50,08
15	423,12	2425,95	4,2449	1,80	48,28
16	423,12	2475,07	4,7827	2,02	46,26
17	423,12	2516,24	5,1221	2,17	44,09
18	846,24	2596,70	5,1742	4,63	39,45
19	846,24	2665,26	6,4107	5,42	34,04
20	846,24	2715,89	7,8664	6,66	27,38
21	423,12	2727,87	10,1018	4,40	22,98
22	423,12	2755,16	8,2862	3,51	19,47
23	423,12	2767,33	8,8696	3,75	15,72
24	423,12	2777,16	8,5715	3,63	12,09
25	846,24	2790,01	7,0013	5,92	6,17
26	423,12	2795,52	7,6069	3,22	2,95
27	423,12	2797,70	10,1158	4,29	— 1,34
28	423,12	2796,16	10,8291	4,58	5,92
29	423,12	2793,35	13,8800	5,87	11,79
30	846,24	2778,91	14,2691	12,08	23,87
31	1692,48	2723,41	14,8617	25,15	49,02
32	1692,48	2595,96	18,3629	31,08	80,10
33	1692,48	2385,70	20,7904	35,19	115,29
34	1692,48	2061,45	46,4600	78,63	193,92
35	1692,48	1731,79	123,6993	209,36	403,28
36	1692,48	1278,10	98,3154	166,40	569,68
37	1692,48	618,70	51,5583	87,26	656,94
38		5,39			

TABELLA V
Binodale $T=16,2$ $\alpha = \frac{4\pi^2}{g T^2}$

Sezioni	$\alpha \Delta x$ 10 ⁻⁶	$q=2\eta_0 V(x)$ 10 ¹⁰ cm ³	$2 \xi_0$ 10 ³ cm	$2 \Delta \eta_0$ cm	$2 \eta_{0j}$ cm
0					100,00
1	1259.5155	358.75	— 1.1425	— 4.87	+ 95.13
2	1259.5155	603.00	2.0722	8.83	86.30
3	1259.5155	791.35	2.2591	9.62	76.68
4	2129.7577	882.02	2.9158	6.21	70.47
5	2129.7577	955.13	3.3810	7.20	63.27
6	1259.5155	1065.06	2.9626	12.65	50.65
7	1259.5155	1201.35	1.9792	8.13	42.22
8	1259.5155	1335.23	2.0503	8.73	33.49
9	1259.5155	1426.49	2.3598	10.05	23.44
10	1259.5155	1503.61	2.2679	9.66	13.78
11	1259.5155	1545.29	2.6665	11.36	2.42
12	1061.8789	1517.56	2.5411	2.81	— 0.39
13	1061.8789	1517.18	2.2669	2.41	2.80
14	1061.8789	1545.06	2.5072	2.67	5.47
15	1061.8789	1539.38	2.6936	2.07	8.34
16	1061.8789	1530.89	2.9582	3.15	11.49
17	1061.8789	1520.66	3.0955	3.30	14.79
18	2129.7577	1493.67	3.1189	6.71	21.50
19	2129.7577	1456.31	3.5029	7.46	28.96
20	2129.7577	1413.23	4.0934	8.72	37.68
21	1061.8789	1396.71	5.3260	5.67	43.35
22	1061.8789	1345.26	1.0459	4.31	47.66
23	1061.8789	1315.47	4.2163	4.49	52.15
24	1061.8789	1282.88	3.9595	4.22	56.37
25	2129.7577	1222.99	3.0690	6.54	62.91
26	1061.8789	1165.81	3.1751	3.38	66.29
27	1061.8789	1117.95	4.0542	4.32	70.61
28	1061.8789	1060.58	4.1068	4.37	74.98
29	1061.8789	1024.96	5.0930	5.12	80.40
30	2129.7577	926.47	4.7572	10.13	90.53
31	1259.5155	715.99	3.9072	16.64	107.17
32	1259.5155	437.35	3.0937	13.18	120.35
33	1259.5155	121.43	1.0582	4.51	124.86
34	1259.5155	229.71	+ 5.1778	+ 22.05	102.81
35	1259.5155	404.52	28.8912	123.08	— 20.27
36	1259.5155	381.72	29.3631	125.07	145.34
37	1259.5155	213.49	17.7908	75.78	221.12
38		3.43			

TABELLA VI
Trinodale $T=10,75$ $\alpha = \frac{4\pi^2}{g T^2}$

Sezioni	$\alpha \Delta x$ 10^{-6}	$q=2 \eta_0 V(x)$ 10^{10} cm^3	$2 \xi_0$ 10^3 cm	$2 \Delta \eta_0$ cm	$2 \eta_{0i}$ cm
0					+ 100.00
1	9673.270	358.75	— 1.1425	— 11.05	88.95
2	9673.270	587.13	2.0776	19.52	69.43
3	9673.270	738.66	2.1090	20.40	49.03
4	4836.635	796.64	2.6335	12.74	36.29
5	4836.635	834.29	2.9532	14.28	22.01
6	9673.270	872.53	2.4271	23.48	— 1.47
7	9673.270	868.49	1.4273	13.80	15.27
8	9673.270	821.15	1.2609	12.20	27.47
9	9673.270	746.29	1.2346	11.94	39.41
10	9673.270	616.63	0.9301	9.00	48.41
11	9673.270	470.19	0.8111	7.85	56.26
12	2418.318	417.45	0.6855	1.66	57.92
13	2418.318	361.70	0.5300	1.28	59.20
14	2418.318	295.84	0.4801	1.16	60.36
15	2418.318	233.22	0.4081	0.99	61.35
16	2418.318	170.80	0.3300	0.80	62.15
17	2418.318	115.49	0.2351	0.57	62.72
18	4836.635	1.03	0.0022	0.01	62.73
19	4836.635	107.96	+ 0.2597	+ 1.26	61.47
20	4836.635	199.40	0.5776	2.79	58.68
21	2418.318	225.07	0.8568	2.07	56.61
22	2418.318	292.29	0.8791	2.13	54.48
23	2418.318	326.34	1.0460	2.53	51.95
24	2418.318	358.81	1.1074	2.68	49.27
25	4836.635	411.16	1.0318	4.99	44.28
26	2418.318	450.68	1.2263	2.97	41.31
27	2418.318	481.15	1.7449	4.22	37.09
28	2418.318	511.29	1.9798	4.78	32.31
29	2418.318	526.64	2.6168	6.33	25.98
30	4836.635	558.47	2.8676	13.87	12.11
31	9673.270	586.63	3.2013	30.97	+ 18.86
32	9673.270	537.59	3.8027	36.78	55.64
33	9673.270	391.53	3.4120	33.01	88.65
34	9673.270	142.20	3.2049	31.00	119.65
35	9673.270	+ 61.21	— 4.3721	— 42.29	77.36
36	9673.270	148.24	11.4031	110.11	— 32.95
37	9673.270	110.10	9.1750	88.75	121.70
38		— 5.52			

$$\zeta_1 = \frac{\eta}{a A_0} = -(15,6788 z^3 - 18,0274 z^2 + 6,1788 z - 1)$$

$$\zeta_2 = \frac{\eta}{a A_0} = -(18,9285 z^3 - 21,6675 z^2 + 2,9807 z + 1)$$

$$\zeta_3 = \frac{\eta}{a A_0} = -(12,5136 z^3 - 21,0332 z^2 + 9,7653 z - 1)$$

I valori delle ampiezze si ottengono facendo variare z nelle relazioni su scritte, i risultati del calcolo sono riportati nella tabella III.

Metodo di Defant.

Indicate con $2\zeta_0$ e $2\eta_0$ le ampiezze dei moti orizzontale e verticale di una sessa generica e assumendo l'asse delle x lungo la linea di valle con l'origine in un estremo (nel nostro caso l'estremo Nord) del lago, il metodo di Defant si realizza con le seguenti formule:

$$2\eta_0 = \frac{4\pi^2}{g T^2} 2\zeta_0 \Delta x$$

[10]

$$2\zeta_0 = -\frac{1}{S(x)} \int_0^x 2r_0 b(x) dx$$

relazioni che si ottengono direttamente dalle equazioni differenziali del movimento e della continuità dell'idrodinamica. Il metodo permette di determinare contemporaneamente il periodo, l'entità degli spostamenti verticali e la posizione dei nodi per la sessa considerata.

Notiamo che nel caso di un lago gli spostamenti orizzontali agli estremi di esso devono annullarsi, per cui si avrà per entrambe le estremità $\xi = 0$.

Mi sono limitato a riportare i calcoli (vedi tabelle 4, 5, 6) rela-

Fig. 4

Fig. 5

tivi alle Sesse uni-bi-trinodale rimandando il lettore alla nota « Sulle Sesse del lago Maggiore » per quanto riguarda il procedimento da eseguire in pratica per l'applicazione del metodo sopra accennato.

Nelle figure 3, 4, 5 sono rappresentati graficamente i valori relativi all'andamento degli spostamenti verticali delle sesse uni-bi-trinodale secondo i due metodi adoperati: in esse le curve tratteggiate si riferiscono al metodo di Defant.

Il confronto tra i dati ottenuti ci mostra un buon accordo tra i valori dell'uninodale e della trinodale mentre per la binodale si nota una differenza superiore al minuto: mi propongo di riprendere la questione in una nota seguente in cui renderò conto in una serie di misure eseguite in laboratorio su un modello del Sebino.

Roma — Istituto Nazionale di Geofisica — Dicembre 1948.

RIASSUNTO

Si determinano con i metodi di Defant e di Hidaka i periodi, i nodi e l'andamento delle ampiezze per le Sesse uni-bi-trinodale del lago di Isco.

BIBLIOGRAFIA

- SALMERAGHI F.: *Contributo alla Limnologia del Sebino*, Atti Soc. I. di Scienze naturali, 37, 1897, pag. 149.
 CALOI P.: *Le sesse del lago di Garda*, Annali di Geofisica, parte I-II, n. 1-2, 1943.
 CALOI-DE PANFILIS-GIORGI-PERONACI: *Le sesse del lago Maggiore*, Annali di Geofisica, vol. I, n. 2, 1948.